

И. Г. КОРШУНОВ

# ФИЗИКА

Екатеринбург – 2014

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Уральский государственный горный университет»



И. Г. Коршунов

## ФИЗИКА

Утверждено Редакционно-издательским советом  
Уральского государственного горного университета  
в качестве учебного пособия

*Второе издание, исправленное, дополненное*

Екатеринбург – 2014

УДК 53  
ББК 22.3  
К 66

Рецензенты: *Сидоров В.Е.*, зав. кафедрой высшей математики и физики Уральского технического института связи и информатики ГОУ ВПО “СибГУТИ”, профессор, д-р физ.-мат.наук; кафедра общей физики и естествознания Уральского государственного педагогического университета (зав. кафедрой профессор, д-р физ.-мат.наук Попель П.С.)

Печатается по решению Редакционно-издательского совета  
Уральского государственного горного университета

**Коршунов И. Г.**

К 66 Физика: учебное пособие. 2-е издание, исправл., доп.  
Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2014. – 341 с.  
ISBN 978-5-8019-0335-4

В учебном пособии рассмотрены следующие разделы курса общей физики для технических вузов: механика, специальная теория относительности, электростатика, постоянный ток, магнетизм, механические и электромагнитные колебания, механические волны, электромагнитная теория Максвелла, электромагнитные волны, волновая и квантовая оптика, физика атома и квантовая механика.

Учебное пособие рассчитано на студентов, обучающихся по направлениям подготовки 130101.65 – “Прикладная геология”, 130102.65 – “Технологии геологической разведки”, 130400.65 – “Горное дело”, 140400.62 – “Электроэнергетика и электротехника”, 150700.62 – “Машиностроение”, 151000.62 – “Технологические машины и оборудование”, 220700.62 – “Автоматизация технологических процессов и производств”, 221700.62 – “Стандартизация и метрология”, 230400.62 – “Информационные системы и технологии”, 280100.62 – “Природопользование и водопользование”, 280700.62 – “Техносферная безопасность”, а также другим техническим направлениям.

Рис. 220. Табл. 4. Библиогр. 8 назв.

УДК 53

© Уральский государственный горный университет, 2010, 2014

ISBN 978-5-8019-0335-4

© Коршунов И.Г., 2010, 2014

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ПРЕДИСЛОВИЕ</b> .....	11
<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	12
<b>1. МЕХАНИКА</b>	<b>13</b>
<b>1.1. Некоторые сведения о векторах</b> .....	<b>13</b>
<b>1.2. Кинематика поступательного движения</b> .....	<b>18</b>
1.2.1. Основные понятия и определения.....	18
1.2.1.1. Материальная точка.....	18
1.2.1.2. Механическое движение .....	18
1.2.1.3. Пространство и время.....	18
1.2.1.4. Тело отсчета.....	18
1.2.1.5. Система отсчета.....	18
1.2.1.6. Закон движения.....	19
1.2.1.7. Траектория движения.....	20
1.2.1.8. Вектор линейного перемещения материальной точки.....	20
1.2.2. Скорость материальной точки.....	22
1.2.3. Ускорение материальной точки.....	23
<b>1.3. Динамика поступательного движения</b> .....	<b>29</b>
1.3.1. Понятие силы.....	29
1.3.2. Понятие инерциальной системы отсчета.....	30
1.3.3. Законы динамики.....	30
1.3.3.1. Первый закон динамики.....	31
1.3.3.2. Второй закон динамики.....	31
1.3.3.3. Третий закон динамики.....	33
1.3.3.4. Изолированные (замкнутые) системы. Закон сохранения импульса.....	34
1.3.4. Характеристика некоторых сил, рассматриваемых в механике.....	36
1.3.4.1. Упругая сила.....	36
1.3.4.2. Гравитационная сила.....	36
1.3.4.3. Сила тяжести.....	37
1.3.4.4. Сила веса (вес тела).....	37
1.3.4.5. Силы трения.....	39
1.3.4.5.1. Силы трения скольжения.....	39
1.3.4.5.2. Силы трения качения.....	40
1.3.5. Механическая работа, мощность и энергия.....	40
1.3.5.1. Работа и мощность.....	40
1.3.5.2. Консервативные силы и консервативные системы.....	43
1.3.5.2.1. Работа силы тяжести.....	43
1.3.5.2.2. Работа упругой силы.....	44
1.3.5.3. Неконсервативные силы, работа неконсервативной силы, неконсервативные системы.....	46

1.3.5.4.	Потенциальная энергия.....	47
1.3.5.4.1.	Связь потенциальной энергии и консервативной силы.....	48
1.3.5.5.	Потенциальные кривые. Условия равновесия механических систем.....	49
1.3.5.6.	Кинетическая энергия.....	52
1.3.5.7.	Полная механическая энергия системы. Закон сохранения полной механической энергии.....	53
<b>1.4.</b>	<b>Вращательное движение абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси.....</b>	<b>54</b>
1.4.1.	Кинематические характеристики вращательного движения.....	55
1.4.1.1.	Угловое перемещение тела $\Delta\vec{\varphi}$ .....	55
1.4.1.2.	Угловая скорость тела $\vec{\omega}$ .....	55
1.4.1.3.	Угловое ускорение тела $\vec{\varepsilon}$ .....	56
1.4.1.4.	Взаимосвязь между угловыми и линейными величинами....	57
1.4.2.	Момент силы.....	59
1.4.2.1.	Момент силы относительно точки.....	59
1.4.2.2.	Момент силы относительно оси вращения.....	60
1.4.3.	Момент инерции тела относительно оси вращения.....	61
1.4.3.1.	Центр инерции тела. Теорема Штейнера.....	62
1.4.4.	Момент импульса тела относительно оси вращения.....	63
1.4.5.	Аналогия между характеристиками поступательного и вращательного движения тела.....	64
1.4.6.	Основной закон динамики вращательного движения тела...	65
1.4.7.	Закон сохранения момента импульса.....	66
1.4.8.	Энергия тела при вращательном движении.....	66
1.4.9.	Работа при вращательном движении.....	67
<b>1.5.</b>	<b>Классические и современные представления о свойствах пространства и времени.....</b>	<b>68</b>
1.5.1.	Механический принцип относительности Галилея.....	68
1.5.1.1.	Преобразования Галилея.....	68
1.5.1.2.	Закон сложения скоростей в классической механике.....	70
1.5.1.3.	Законы динамики при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.....	71
1.5.2.	Элементы специальной теории относительности.....	72
1.5.2.1.	Преобразования Лоренца.....	73
1.5.2.1.1.	Следствия из преобразований Лоренца.....	75
1.5.2.1.1.1.	Релятивистский закон сложения скоростей.....	75
1.5.2.1.1.2.	Относительность понятия одновременности событий.....	76
1.5.2.1.1.3.	Изменение размеров движущихся тел (Лоренцево сокращение).....	77
1.5.2.1.1.4.	Замедление времени.....	79
1.5.2.2.	Динамика СТО.....	80
1.5.2.3.	Энергия тела в СТО. Закон взаимосвязи массы и энергии...	82

1.5.3.	Связь законов сохранения в механике со свойствами пространства и времени.....	83
<b>2. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ</b>		<b>85</b>
2.1.	Электростатика.....	85
2.1.1.	Электрический заряд и его свойства.....	85
2.1.2.	Закон Кулона.....	86
2.1.3.	Напряженность электростатического поля.....	87
2.1.4.	Индукция электростатического поля.....	91
2.1.5.	Поток вектора напряженности и вектора индукции электростатического поля.....	91
2.1.6.	Теорема Гаусса.....	93
2.1.6.1.	Применение теоремы Гаусса для расчета электростатических полей.....	95
2.1.6.1.1.	Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости.....	96
2.1.6.1.2.	Поле равномерно заряженной сферической поверхности....	98
2.1.6.1.3.	Поле равномерно заряженной бесконечной нити (цилиндра).....	100
2.1.7.	Потенциал электростатического поля.....	102
2.1.7.1.	Эквипотенциальные поверхности и их свойства.....	105
2.1.7.2.	Связь напряженности и потенциала.....	106
2.1.7.3.	Формула для расчета разности потенциалов между двумя точками поля.....	108
2.1.7.3.1.	Однородное поле ( $\vec{E} = \text{const}$ ).....	108
2.1.7.3.2.	Поле равномерно заряженной бесконечной нити.....	109
2.1.7.4.	Теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля. Потенциальный характер электростатического поля.....	110
2.1.8.	Проводники в электростатическом поле.....	111
2.1.8.1.	Потенциал проводника.....	112
2.1.8.2.	Распределение избыточных электрических зарядов в металлических проводниках.....	113
2.1.8.3.	Емкость проводников.....	116
2.1.8.4.	Конденсаторы. Емкость плоского конденсатора.....	117
2.1.8.4.1.	Соединение конденсаторов.....	118
2.1.8.5.	Энергия заряженного проводника и энергия заряженного конденсатора .....	120
2.1.8.6.	Энергия электростатического поля.....	121
<b>2.2.</b>	<b>Законы постоянного тока</b> .....	<b>123</b>
2.2.1.	Сила тока. Плотность тока.....	123
2.2.2.	Закон Ома для однородного участка цепи в интегральной форме.....	125
2.2.3.	Электросопротивление проводников.....	126

2.2.3.1.	Соединение проводников.....	128
2.2.4.	Закон Ома для однородного участка цепи в дифференциальной форме.....	129
2.2.5.	Закон Джоуля – Ленца в интегральной и дифференциальной формах. Работа и мощность тока.....	131
2.2.6.	ЭДС источника тока, разность потенциалов и напряжение.....	133
2.2.7.	Закон Ома для неоднородного участка цепи.....	134
2.2.7.1.	Следствия из закона Ома для неоднородного участка цепи.....	136
2.2.7.1.1.	Непотенциальный характер поля сторонних сил.....	136
2.2.7.1.2.	Закон Ома для замкнутой цепи.....	137
2.2.7.1.3.	Разность потенциалов на концах разомкнутого источника...	137
2.2.8.	Расчет электрических цепей. Правила Кирхгофа .....	137
<b>2.3.</b>	<b>Магнетизм.....</b>	<b>140</b>
2.3.1.	Характер электрического и магнитного взаимодействий электрических зарядов.....	140
2.3.2.	Электромагнитное взаимодействие двух движущихся электрических зарядов.....	141
2.3.3.	Магнитное взаимодействие двух движущихся электрических зарядов.....	143
2.3.4.	Магнитное поле. Индукция магнитного поля движущегося электрического заряда.....	144
2.3.5.	Магнитное поле тока. Закон Био–Савара–Лапласа (БСЛ).....	146
2.3.6.	Принцип суперпозиции. Линии вектора магнитной индукции.....	147
2.3.7.	Напряженность магнитного поля.....	148
2.3.8.	Применение принципа суперпозиции и закона БСЛ для расчета магнитных полей.....	149
2.3.8.1.	Проводник конечной длины.....	149
2.3.8.2.	Бесконечно длинный проводник.....	151
2.3.9.	Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля. Вихревой характер магнитного поля.....	152
2.3.9.1.	Применение теоремы о циркуляции вектора индукции магнитного поля для расчета магнитных полей.....	154
2.3.10.	Закон Ампера.....	155
2.3.10.1.	Применение закона Ампера для решения некоторых задач.....	156
2.3.10.1.1.	Сила, действующая в однородном магнитном поле на прямой проводник с током.....	156
2.3.10.1.2.	Взаимодействие параллельных токов.....	157
2.3.11.	Поведение контура с током в однородном магнитном поле.....	159
2.3.12.	Поведение контура с током	

	в неоднородном магнитном поле.....	163
2.3.13.	Сила Лоренца.....	164
2.3.13.1.	Характер движения заряженных частиц в однородных магнитных полях.....	165
2.3.13.2.	Характер движения заряженных частиц в неоднородных магнитных полях.....	168
2.3.13.3.	Практическое использование движения заряженных частиц в магнитных полях.....	168
2.3.13.3.1.	Эффект Холла (1880 г.).....	168
2.3.13.3.2.	Фокусировка заряженных частиц в ускорителях.....	170
2.3.13.3.3.	Широтный эффект.....	170
2.3.13.3.4.	МГД-генератор (магнитогидродинамический генератор)...	171
2.3.13.3.5.	Электронно-лучевые трубки.....	172
2.3.14.	Поток вектора магнитной индукции.....	172
2.3.15.	Теорема Гаусса для магнитного поля.....	173
2.3.16.	Работа сил магнитного поля по переносу проводника с током.....	173
2.3.17.	Работа сил магнитного поля по переносу контура с током.....	175
2.3.18.	Явление электромагнитной индукции. Закон Фарадея. Правило Ленца.....	176
2.3.19.	Электронный механизм возникновения ЭДС индукции в движущихся проводниках.....	178
2.3.20.	Связь закона Фарадея с законом сохранения энергии.....	180
2.3.21.	Заряд, переносимый индукционными токами через поперечное сечение проводников.....	181
2.3.22.	Токи Фуко.....	182
2.3.23.	Явление самоиндукции.....	183
2.3.24.	Явления, происходящие в цепях, содержащих индуктивность, при их размыкании и замыкании.....	185
2.3.24.1.	Размыкание цепи.....	186
2.3.24.2.	Замыкание цепи.....	189
2.3.25.	Энергия магнитного поля.....	191

### **3. МЕХАНИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ** 193

<b>3.1.</b>	<b>Механические гармонические колебания.....</b>	<b>193</b>
3.1.1.	Скорость и ускорение материальной точки при гармонических колебаниях.....	194
3.1.2.	Упругие и квазиупругие силы.....	195
3.1.3.	Энергия механических гармонических колебаний.....	197
3.1.4.	Векторная диаграмма.....	199
3.1.5.	Сложение механических гармонических колебаний.....	200

3.1.5.1.	Сложение двух механических гармонических колебаний одинаковой частоты, происходящих вдоль одной прямой.....	200
3.1.5.2.	Сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу.....	202
<b>3.2.</b>	<b>Электромагнитные колебания.....</b>	<b>208</b>
3.2.1.	Свободные колебания в идеальном колебательном контуре.....	208
3.2.2.	Свободные затухающие электромагнитные колебания.....	212
3.2.2.1.	Характеристики колебательного контура.....	218
3.2.3.	Вынужденные электромагнитные колебания.....	219
3.2.3.1.	Резонанс напряжения.....	221
3.2.3.2.	Резонанс тока.....	224
<b>4. МЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ</b>		<b>227</b>
4.1.	Основные понятия и определения.....	227
4.2.	Уравнение плоской гармонической механической волны. Принцип суперпозиции.....	228
4.3.	Волновое уравнение.....	231
4.4.	Стоячие волны .....	232
4.5.	Интерференция механических волн.....	235
4.6.	Дифракция механических волн.....	236
<b>5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ТЕОРИЯ МАКСВЕЛЛА</b>		<b>238</b>
5.1.	Основные экспериментальные и теоретические работы, которые привели к созданию электромагнитной теории Максвелла.....	238
5.2.	Переменное магнитное поле – источник вихревого электрического поля. Первое уравнение Максвелла.....	238
5.3.	Третье уравнение Максвелла.....	241
5.4.	Четвертое уравнение Максвелла.....	242
5.5.	Переменное электрическое поле – источник вихревого магнитного поля. Второе уравнение Максвелла.....	242
5.6.	Полная система уравнений Максвелла. Значение электромагнитной теории Максвелла.....	247
<b>6. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ</b>		<b>250</b>
6.1.	Электромагнитные волны как следствие электромагнитной теории Максвелла.....	250
6.2.	Волновое уравнение для электромагнитных волн.....	251

6.3.	Уравнение плоской гармонической электромагнитной волны.....	252
6.4.	Свойства электромагнитных волн.....	253
6.5.	Экспериментальное доказательство существования электромагнитных волн (опыты Герца).....	257

## 7. ОПТИКА 260

7.1.	<b>Волновая оптика</b> .....	261
7.1.1.	Уравнение плоской гармонической световой волны.....	261
7.1.2.	Интерференция света.....	263
7.1.2.1.	Методы наблюдения интерференции света.....	268
7.1.2.2.	Расчет интерференционной картины от двух источников...	270
7.1.2.3.	Интерференция света в тонких пластинках и пленках в отраженном свете.....	272
7.1.2.4.	Практическое применение интерференции света.....	276
7.1.2.5.	Длина и время когерентности.....	278
7.1.3.	Дифракция света.....	279
7.1.3.1.	Принцип Гюйгенса – Френеля.....	281
7.1.3.2.	Метод зон Френеля.....	282
7.1.3.3.	Дифракция Фраунгофера от одной щели.....	285
7.1.3.4.	Дифракционная решетка.....	288
7.1.4.	Поляризация света.....	292
7.1.4.1.	Поляризация света при отражении и преломлении на границе двух диэлектриков. Закон Брюстера.....	294
7.1.4.2.	Поляризация света при двойном лучепреломлении.....	295
7.1.4.3.	Поляроиды. Закон Малюса.....	296
7.2.	<b>Квантовая оптика</b> .....	298
7.2.1.	Тепловое излучение.....	298
7.2.1.1.	Равновесность теплового излучения.....	298
7.2.1.2.	Основные понятия и определения.....	299
7.2.1.3.	Закон Кирхгофа.....	301
7.2.1.4.	Распределение энергии в спектре теплового излучения АЧТ. Законы излучения АЧТ.....	301
7.2.1.5.	Объяснение спектра излучения АЧТ. Гипотеза Планка. Формула Планка.....	303
7.2.1.6.	Фотоны и их свойства.....	305
7.2.2.	Фотоэлектрический эффект.....	306
7.2.3.	Эффект Комптона.....	310

## 8. ФИЗИКА АТОМА 312

8.1.	<b>Модели атома Томсона и Резерфорда</b> .....	312
------	--	-----

8.2.	<b>Закономерности в спектрах излучения атомарного водорода.....</b>	314
8.3.	<b>Модель атома Бора.....</b>	315
8.4.	<b>Рентгеновское излучение.....</b>	320
8.4.1.	Тормозной рентгеновский спектр.....	321
8.4.2.	Характеристический рентгеновский спектр.....	322
8.4.3.	Дифракция рентгеновских лучей. Формула Вульфа-Брэгга..	324
	<b>9. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ</b>	326
9.1.	Некоторые теоретические и экспериментальные работы, которые привели к созданию квантовой механики.....	326
9.2.	Границы применимости классических теорий.....	329
9.2.1.	Задача о колебаниях материальной точки.....	329
9.2.2.	Задача о поведении электрона в электронно-лучевой трубке.....	329
9.2.3.	Задача о поведении электрона в атоме.....	330
9.3.	Статистическое толкование волн де Бройля. Волновая функция и ее свойства.....	330
9.4.	Соотношение неопределенностей.....	333
9.5.	Уравнение Шредингера.....	334
9.6.	Свободная микрочастица.....	335
9.7.	Микрочастица в одномерной бесконечно глубокой потенциальной яме.....	336
	<b>ЛИТЕРАТУРА.....</b>	341

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Научно-технический прогресс требует от специалистов глубоких знаний физики. Поэтому роль физики в подготовке современного бакалавра, инженера и магистра очень значительна.

Дисциплина “Физика” входит в математический и естественнонаучный цикл дисциплин государственных образовательных стандартов технических вузов.

Учебное пособие рассчитано на студентов, обучающихся по направлениям подготовки 130101.65 – “Прикладная геология”, 130102.65 – “Технологии геологической разведки”, 130400.65 – “Горное дело”, 140400.62 – “Электроэнергетика и электротехника”, 150700.62 – “Машиностроение”, 151000.62 – “Технологические машины и оборудование”, 220700.62 – “Автоматизация технологических процессов и производств”, 221700.62 – “Стандартизация и метрология”, 230400.62 – “Информационные системы и технологии”, 280100.62 – “Природопользование и водопользование”, 280700.62 – “Техносферная безопасность”, а также другим техническим направлениям.

Учебное пособие может быть использовано студентами как очной, так и заочной форм обучения.

При сравнительно небольшом объеме учебное пособие охватывает следующие разделы курса общей физики: механика, специальная теория относительности, электростатика, постоянный ток, магнетизм, механические и электромагнитные колебания, механические волны, электромагнитная теория Максвелла, электромагнитные волны, волновая и квантовая оптика, физика атома и квантовая механика. Это достигнуто за счет сжатого, экономного изложения материала, строгого подхода к отбору фактов, а также и тем, что автором за основу были взяты студенческие конспекты лекций, которые были прочитаны в течение ряда лет студентам-геофизикам и студентам-механикам Уральского государственного горного университета. Поэтому данную книгу можно рассматривать и в качестве пособия к лекциям по основам физики для студентов технических вузов.

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время все в большей мере проявляется роль науки, и физики в частности, как непосредственной производительной силы.

Физика, в одних случаях непосредственно, а в других – через ряд промежуточных звеньев воздействует на развитие практически всех отраслей техники и технологий производства – машины, оборудование, материалы, процессы обработки сырья. Без внедрения результатов физических исследований немислимо непрерывное совершенствование средств производства, качества изделий и создание продукции с новыми, до сих пор не существовавшими свойствами. Многие важнейшие отрасли техники возникли на основе тех или иных открытий физики. Более того, физические идеи и методы широко проникают в другие науки, создавая для них новые возможности, благотворно влияя на их прогресс и укрепляя их связи с производством.

Физика – наука, изучающая простейшие и вместе с тем наиболее общие закономерности явлений природы, свойства и строение материи, законы ее движения.

Под материей следует понимать все то, что существует объективно, т.е. независимо от человеческого сознания. Согласно современным представлениям, материя существует в форме вещества и в форме поля.

Неотъемлемым свойством материи является ее движение, которое происходит в пространстве и времени. Движение материи – любой протекающий в природе процесс (распространение радиоволн, изменение взаимного расположения тел в пространстве, нагревание или охлаждение, радиоактивный распад ядер и т.п.).

Физика относится к точным наукам и изучает количественные закономерности явлений. Она составляет основу естествознания и является фундаментом современной техники.

По этой причине курс физики в технических вузах включен в цикл общих математических и естественнонаучных дисциплин. Кроме того, изучение физических законов бакалаврами, магистрами и инженерами необходимо им и для того, чтобы осознанно овладевать общеинженерными и специальными дисциплинами.

В данном учебном пособии изложены основы механики, специальной теории относительности, электростатики, постоянного тока, магнетизма, механических и электромагнитных колебаний, механических волн, электромагнитной теории Максвелла, электромагнитных волн, волновой и квантовой оптики, физики атома и квантовой механики.

# 1. МЕХАНИКА

Механика – наука о механическом движении материальных тел и происходящих при этом взаимодействиях между ними. Механика тесно связана со многими другими разделами физики и, что представляет наибольший интерес для высшего технического образования, является одной из научных основ многих областей современной техники.

Механика подразделяется на три раздела: кинематику, динамику и статику.

*Кинематика* изучает движение тел в пространстве и времени без рассмотрения причин, вызывающих это движение.

*Динамика* изучает зависимость характера движения тел от их взаимодействия друг с другом.

*Статика* изучает условия равновесия тел под действием сил.

## 1.1. Некоторые сведения о векторах

Вектор  $\vec{A}$  – величина, характеризующаяся численным значением и направлением (рис. 1.1).

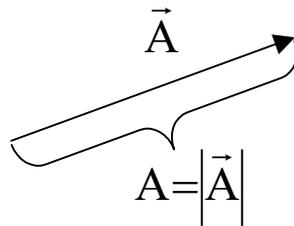


Рис. 1.1

$|\vec{A}| = A$  - модуль вектора (всегда положительное число).

1. Коллинеарные векторы (лежащие вдоль одной прямой или вдоль параллельных прямых):

- параллельные векторы  $\vec{A} \uparrow \uparrow \vec{B}$  (рис. 1.2);

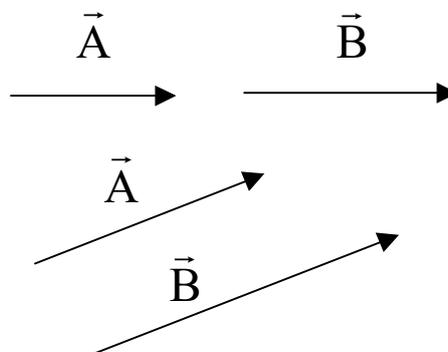


Рис. 1.2

- антипараллельные векторы  $\vec{A} \uparrow \downarrow \vec{B}$  (рис. 1.3).

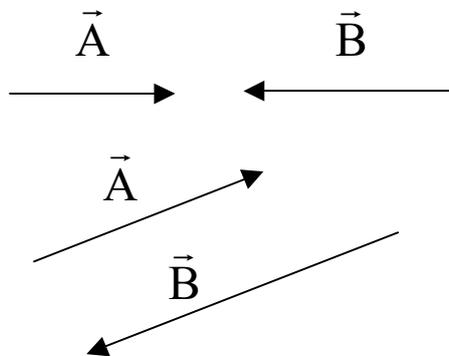


Рис. 1.3

2. Совпадающие по модулю векторы одного направления равны друг другу (рис. 1.4).

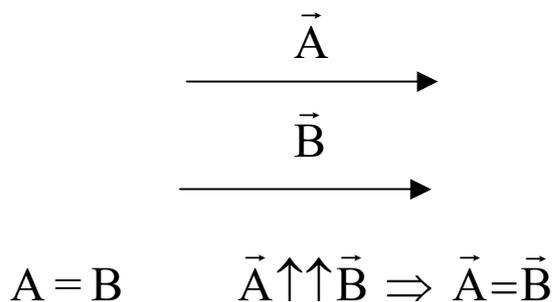


Рис.1.4

3. Если векторы антипараллельны и имеют одинаковый модуль, то они не равны друг другу (рис. 1.5).

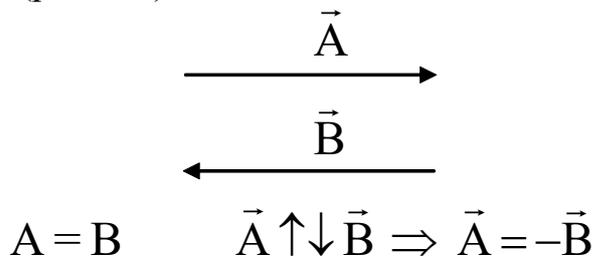


Рис. 1.5

4. Сложение векторов (рис. 1.6).

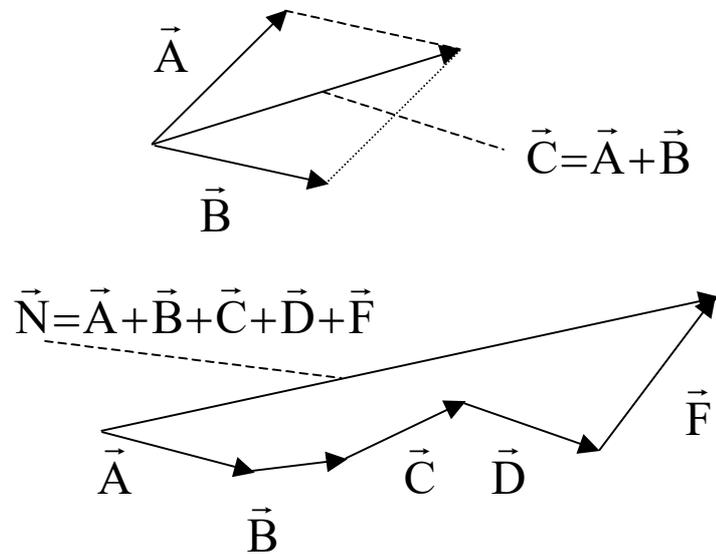


Рис. 1.6

5. Вычитание векторов (рис. 1.7).

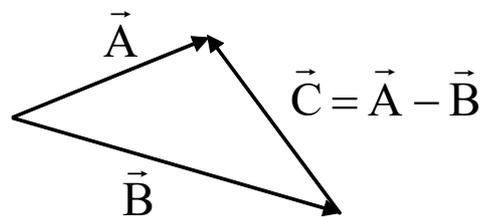


Рис. 1.7

6. Умножение вектора на скаляр.

$$\vec{A} \cdot b = \vec{C}, \quad (1.1.)$$

где  $C = A \cdot b$ ;  $\vec{C} \uparrow \uparrow \vec{A}$ .

7. Проекция вектора на ось – скаляр (рис. 1.8а).

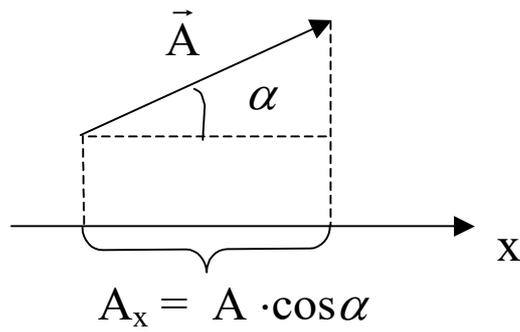


Рис. 1.8а

8. Проекция вектора на координатные оси (рис. 1.8б).

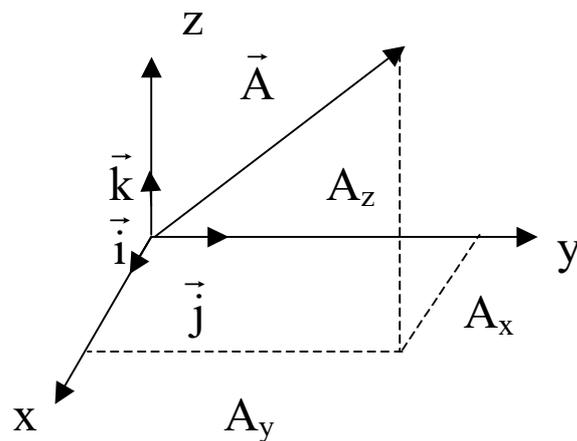


Рис. 1.8б

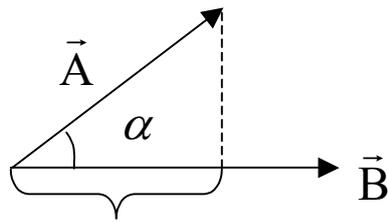
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – единичные векторы вдоль координатных осей (орты).

$$\vec{A} = \vec{i} A_x + \vec{j} A_y + \vec{k} A_z ; A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} . \quad (1.2)$$

9. Скалярное произведение векторов – скаляр.

$$(\vec{A} \cdot \vec{B}) = A \cdot B \cdot \cos \alpha . \quad (1.3)$$

$$(\vec{A} \cdot \vec{B}) = A_B \cdot B = B_A \cdot A = (\vec{B} \cdot \vec{A}) . \quad (1.4)$$



$$A_B = A \cdot \cos \alpha$$

Рис. 1.9

10. Векторное произведение векторов – вектор.

$$[\vec{A} \times \vec{B}] = \vec{C}. \quad (1.5)$$

Вектор  $\vec{C} \perp \vec{A}$  и  $\vec{C} \perp \vec{B}$ . Модуль вектора  $C = A \cdot B \cdot \sin \alpha$ .

Направление вектора  $\vec{C}$  можно найти по правилу правого винта (буравчика), поворачивая вектор  $\vec{A}$  к вектору  $\vec{B}$  по наименьшему углу (рис. 1.10).

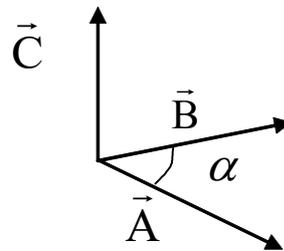


Рис. 1.10

Следует иметь в виду, что векторное произведение

$$[\vec{B} \times \vec{A}] = -\vec{C}. \quad (1.6)$$

11. Двойное векторное произведение – вектор.

$$[\vec{A} \times [\vec{B} \times \vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}). \quad (1.7)$$

**Замечание:** операции деления вектора на вектор нет.

## 1.2. Кинематика поступательного движения

### 1.2.1. Основные понятия и определения

1.2.1.1. Материальная точка – *тело, обладающее массой, размерами и формой которого в условиях данной задачи можно пренебречь.*

1.2.1.2. Механическое движение – *процесс изменения расположения тел или частей тела относительно друг друга.*

Простейшим видом механического движения является движение материальной точки. Поэтому в дальнейшем будет рассматриваться движение именно такого тела.

### 1.2.1.3. Пространство и время

Механическое движение происходит в пространстве и времени. Вся классическая механика построена на постулате Ньютона об абсолютном пространстве и абсолютном времени.

Абсолютное пространство (вместилище тел) обладает следующими свойствами: трехмерно, непрерывно, однородно, изотропно, эвклидово (т.е. описывается геометрией Эвклида).

Абсолютное время (вместилище событий) – одномерно, непрерывно, однородно, анизотропно, протекает одинаково в различных системах отсчета.

Согласно Ньютону, абсолютное пространство и абсолютное время не взаимосвязаны, что противоречит современным представлениям о свойствах пространства и времени, основанным на теории относительности. Согласно теории относительности, пространство, время и материя образуют единое целое.

### 1.2.1.4. Тело отсчета

Определить положение любого тела в пространстве можно только по его расположению относительно другого, произвольно выбранного тела.

Тело отсчета – *тело, относительно которого рассматривается движение других тел.*

### 1.2.1.5. Система отсчета

Будем в дальнейшем считать, что выбранное тело отсчета неподвижно. Свяжем с этим телом отсчета систему координат и возьмем часы. Получим систему отсчета.

Для простоты воспользуемся декартовой системой координат (рис. 1.11).

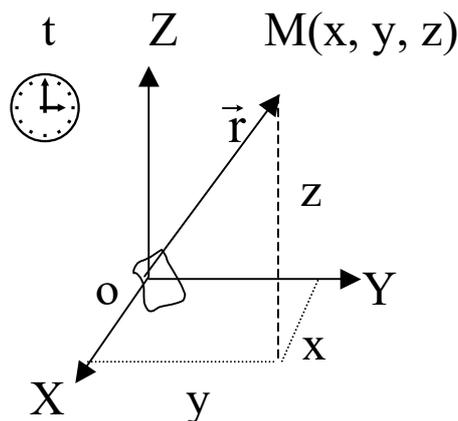


Рис. 1.11

Положение точки  $M$  в этой системе отсчета можно определить, задавая три координаты  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ . Более удобно положение этой материальной точки определить с помощью радиус-вектора  $\vec{r}$ . Тогда  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  – проекции радиус-вектора  $\vec{r}$  на координатные оси:

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (1.8)$$

Таким образом, для однозначного задания положения материальной точки в пространстве необходимо знание трех чисел (либо три координаты, либо три проекции радиус-вектора). Это является следствием трехмерности нашего пространства.

*Число независимых координат, которое необходимо задать, чтобы однозначно определить положение материального объекта относительно системы отсчета, называется числом степеней свободы этого объекта. Поэтому материальная точка обладает тремя поступательными степенями свободы.*

#### 1.2.1.6. Закон движения

Если материальная точка движется, то ее положение в пространстве с течением времени меняется. В результате чего радиус-вектор  $\vec{r}$  или три величины  $x$ ,  $y$  и  $z$  этой материальной точки являются функциями времени:

$$\vec{r} = \vec{r}(t); \quad (1.9)$$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t). \end{cases} \quad (1.10)$$

Уравнение (1.9) или система уравнений (1.10) называются законом движения материальной точки.

Нахождение этих уравнений является основной задачей кинематики.

1.2.1.7. Траектория движения – линия, образованная совокупностью последовательных положений материальной точки в пространстве в процессе ее движения.

В зависимости от формы этой линии движение может быть криволинейным или прямолинейным.

1.2.1.8. Вектор линейного перемещения материальной точки

Пусть материальная точка в момент времени  $t_1$  занимала положение 1, а в момент времени  $t_2 > t_1$  она находилась в положении 2 (см. рис.1.12).

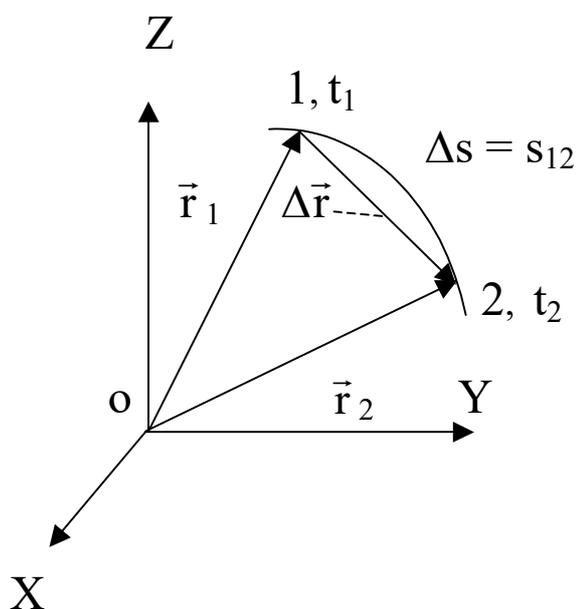


Рис. 1.12

Вектор  $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  называется вектором линейного перемещения материальной точки за время  $\Delta t = t_2 - t_1$ .

Дуга  $\Delta S$  определяет путь  $S_{12}$ , пройденный материальной точкой за время  $\Delta t$ .

Модуль вектора линейного перемещения  $\Delta r \leq \Delta S$ , так как  $\Delta r$  – хорда, а  $\Delta S$  – дуга.

Если рассматривается бесконечно малый промежуток времени перемещения  $dt$ , то говорят об элементарном векторе линейного перемещения материальной точки  $d\vec{r}$ .

Пусть  $\Delta t \rightarrow 0$  (точка 2 приближается к точке 1), тогда и вектор  $\Delta\vec{r} \rightarrow 0$ , а  $\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta r} = 1$ . Учитывая, что  $\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta r}$  равен производной

$\frac{ds}{dr}$ , получаем, что при бесконечно малом перемещении материальной точки

элементарный путь равен модулю вектора  $d\vec{r}$ , т.е.

$$ds = dr. \quad (1.11)$$

Если проинтегрировать все элементарные перемещения на соответствующем участке траектории, то получим вектор  $\Delta\vec{r}$ , а проинтегрировав модули элементарных перемещений – путь  $\Delta s$  (см. рис. 1.13):

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} = \Delta\vec{r}, \quad (1.12)$$

$$\int_1^2 |d\vec{r}| = \int_1^2 ds = \Delta s. \quad (1.13)$$

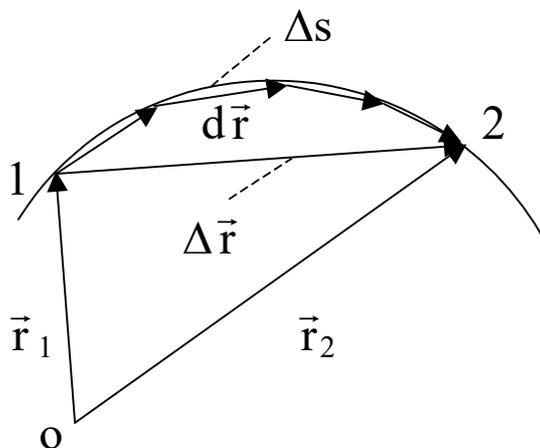


Рис. 1.13

### 1.2.2. Скорость материальной точки

Скорость является одной из основных кинематических характеристик материальной точки.

Понятие скорости вводится для характеристики направления движения материальной точки и быстроты изменения ее пространственного положения.

Различают среднюю ( $\langle \vec{v} \rangle$ ) и мгновенную ( $\vec{v}$ ) скорости.

Средняя скорость – *векторная физическая величина, численно равная линейному перемещению материальной точки, совершенному за единицу времени, т.е.*

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} . \quad (1.14)$$

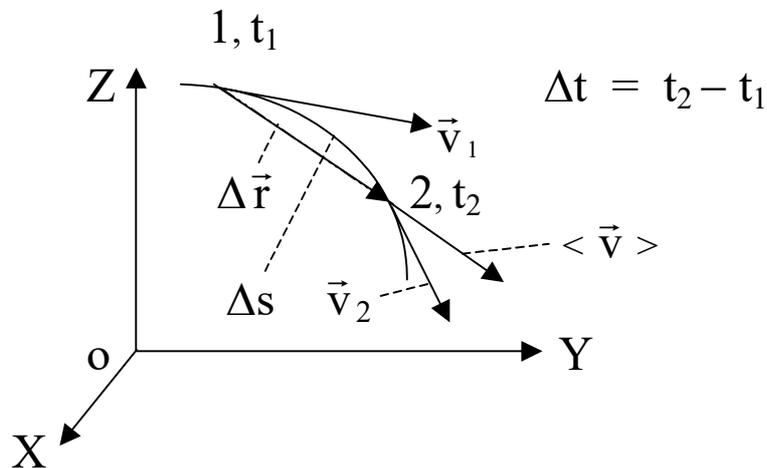


Рис. 1.14

Из формулы (1.14) следует, что вектор средней скорости  $\langle \vec{v} \rangle$  направлен вдоль вектора  $\Delta \vec{r}$  (рис. 1.14).

Числовое значение средней скорости

$$\langle v \rangle = \frac{\int_1^2 |\vec{dr}|}{\Delta t} = \frac{\int ds}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} , \quad (1.5)$$

где длина дуги  $\Delta s = s_{12}$  – путь, пройденный телом за время  $\Delta t$ .

Средняя скорость не полностью характеризует быстроту изменения координат материальной точки, так как в данный момент времени скорость

тела может существенно отличаться от средней скорости как по величине, так и по направлению. Поэтому помимо средней скорости вводят понятие мгновенной скорости тела.

Мгновенная скорость  $\vec{V}$ , или скорость тела в данный момент времени, определяется как предел средней скорости, если время перемещения тела  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} . \quad (1.16)$$

Из этого соотношения следует, что мгновенная скорость материальной точки – векторная физическая величина, равная первой производной от радиус-вектора этой материальной точки по времени.

Вектор  $\vec{V}$  направлен по  $d\vec{r}$ .

Так как секущая в пределе совпадает с касательной, то вектор мгновенной скорости  $\vec{V}$  направлен по касательной к траектории движения материальной точки (рис.1. 14).

Модуль мгновенной скорости

$$v = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{ds}{dt} , \quad (1.17)$$

а проекции вектора  $\vec{V}$  на координатные оси равны производным от соответствующих координат материальной точки по времени:

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt} . \quad (1.18)$$

Если известны проекции вектора мгновенной скорости на координатные оси, то

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} , \quad \text{а} \quad \vec{V} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} . \quad (1.19)$$

### 1.2.3. Ускорение материальной точки

В общем случае скорость материальной точки в процессе ее движения изменяется как по величине, так и по направлению. Поэтому описать изменение скорости тела с течением времени можно только с помощью векторной величины.

Векторная физическая величина, характеризующая быстроту изменения скорости материальной точки, называется ускорением.

Как и в случае скорости, различают среднее ( $\langle \vec{a} \rangle$ ) и мгновенное ( $\vec{a}$ ) ускорения.

Среднее ускорение равно:

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \quad (1.20)$$

где  $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$  определяет изменение скорости тела за время  $\Delta t$ .

Согласно (1.20) направление средней скорости совпадает с направлением вектора  $\Delta \vec{v}$  (рис. 1.15).

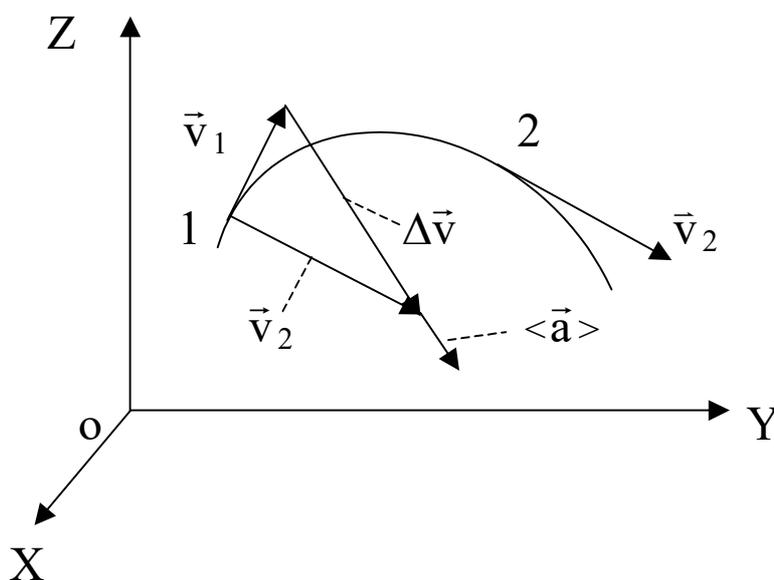


Рис. 1.15

Мгновенное ускорение  $\vec{a}$  равно пределу среднего ускорения, если  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad \text{или} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad (1.21)$$

т.е. мгновенное ускорение равно первой производной от скорости материальной точки по времени.

Учитывая, что  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ , из формулы (1.21) получим

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} . \quad (1.22)$$

С другой стороны – *мгновенное ускорение равно второй производной от радиус-вектора материальной точки по времени.*

Модуль мгновенного ускорения равен

$$a = \frac{d}{dt} \left( \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2s}{dt^2} , \quad (1.23)$$

а его составляющие по координатным осям определяются следующим образом:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} . \quad (1.24)$$

Если известны проекции вектора  $\vec{a}$  на координатные оси, то

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}; \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} . \quad (1.25)$$

Пусть в момент времени  $t_1$  (точка **A**) скорость материальной точки была равна  $\vec{v}_1$ , а в момент времени  $t_2$  (точка **B**) –  $\vec{v}_2$  (рис. 1.16).

Вектор  $\Delta\vec{v}$  равен приращению скорости материальной точки за время  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Отложим на векторе  $\vec{v}_2$  отрезок  $v_1$ , равный модулю вектора  $\vec{v}_1$ .

Из рис. 1.16 следует, что вектор  $\Delta\vec{v}$  можно представить в виде суммы двух векторов:

$$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_n + \Delta\vec{v}_\tau , \quad (1.26)$$

где вектор  $\Delta \vec{v}_n$  характеризует изменение скорости материальной точки за время  $\Delta t$  по направлению, а вектор  $\Delta \vec{v}_\tau$  – изменение ее скорости по величине.

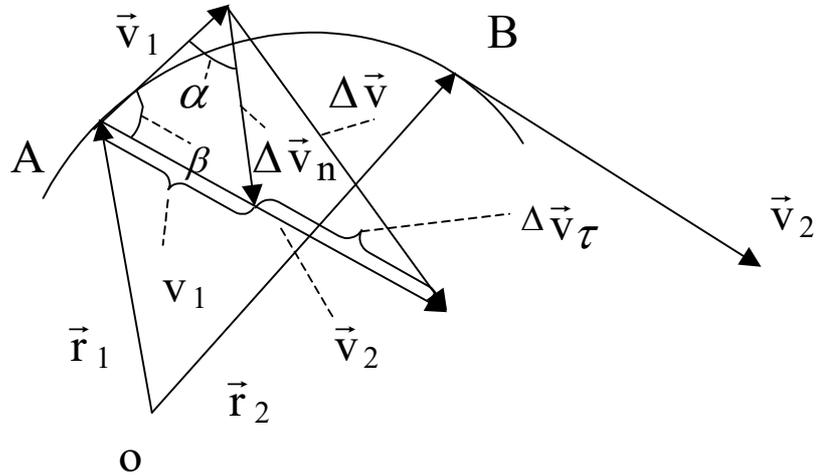


Рис. 1.16

Если разделить обе части уравнения (1.26) на  $\Delta t$  и перейти к пределу, то получим следующее:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_n}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_\tau}{\Delta t}, \quad (1.27)$$

или

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau, \quad (1.28)$$

где первое слагаемое

$$\vec{a}_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_n}{\Delta t} \quad (1.29)$$

называется нормальным или центростремительным ускорением, а второе слагаемое

$$\vec{a}_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_\tau}{\Delta t} \quad (1.30)$$

называется тангенциальным или касательным ускорением.

Если  $\Delta t \rightarrow 0$ , то угол  $\alpha \rightarrow \pi/2$ , а угол  $\beta \rightarrow 0$ . При этом вектор  $\Delta \vec{v}_n$  займет положение, перпендикулярное к касательной, а вектор  $\Delta \vec{v}_\tau$  будет направлен вдоль касательной. Поэтому вектор нормального ускорения перпендикулярен скорости материальной точки, а вектор тангенциального ускорения направлен по скорости (рис.1. 17).

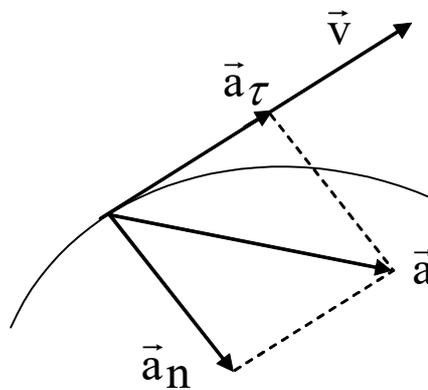


Рис. 1.17

Определим модуль вектора тангенциального ускорения.  
Так как

$$|\Delta \vec{v}_\tau| = |v_2 - v_1| = \Delta v,$$

то

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{v}_\tau|}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}. \quad (1.31)$$

Модуль нормального ускорения, как это будет показано при изучении вращательного движения твердых тел (разд. 1.4.1.4.), равен

$$a_n = \frac{v^2}{R}, \quad (1.32)$$

где  $R$  – радиус кривизны траектории движения тела в данной точке.

Модуль полного ускорения равен

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} . \quad (1.33)$$

Можно сделать следующие выводы:

1.  $\vec{a}_\tau$  – вектор, направленный по касательной к траектории движения тела и характеризующий быстроту изменения скорости материальной точки по модулю;

2.  $\vec{a}_n$  – вектор, направленный по радиусу к центру кривизны траектории движения тела и характеризующий быстроту изменения скорости материальной точки по направлению.

В зависимости от значений тангенциальной и нормальной составляющих ускорения возможны следующие частные случаи движения тела:

- $a_\tau = 0, a_n = 0$  – прямолинейное равномерное движение;
- $a_\tau = \text{const}, a_n = 0$  – прямолинейное равнопеременное движение (либо равноускоренное, либо равнозамедленное);
- $a_\tau = 0, a_n = \text{const}$  – равномерное движение по окружности;
- $a_\tau = f(t), a_n = 0$  – прямолинейное движение с переменным ускорением;
- $a_\tau = 0, a_n = f(t)$  – равномерное криволинейное движение;
- $a_\tau = f(t), a_n = f(t)$  – неравномерное криволинейное движение.

Из соотношений (1.9), (1.16), (1.21) и (1.22) следует, что радиус-вектор  $\vec{r}$  и скорость  $\vec{v}$  материальной точки характеризуют ее механическое состояние. По этой причине эти две векторные величины или шесть скалярных величин:  $X, Y, Z, v_x, v_y$  и  $v_z$  называются параметрами механического состояния материальной точки.

Если известен закон движения тела  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ , то можно определить положение этого тела в пространстве, его скорость ( $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ ) и ускорение

( $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ ) в любой момент времени.

По этой причине нахождение закона движения тела является основной задачей кинематики.

### 1.3. Динамика поступательного движения

#### 1.3.1. Понятие силы

*Сила  $\vec{F}$  – векторная физическая величина, характеризующая механическое взаимодействие тел, в результате которого тела изменяют свое движение или деформируются.*

Сила характеризуется направлением, модулем и точкой приложения.

Действие силы может быть статическим (проявляется в наличии деформации) и динамическим (проявляется в наличии ускорения).

Тела могут взаимодействовать как при непосредственном соприкосновении, так и на расстоянии.

Классическая механика Ньютона постулирует, что действие сил на расстоянии передается мгновенно, т.е. с бесконечно большой скоростью (принцип дальнего действия). По современным представлениям действие одного тела на другое передается с конечной скоростью через посредство особой материи, называемой физическим полем (теория близкодействия).

В физике рассматриваются различные силы: сила тяжести, сила веса, сила реакции опор, силы трения, силы давления газов, межмолекулярные силы и т.д. Несмотря на это, действие любой силы может быть сведено к действию одной или нескольких фундаментальных сил. Фундаментальные силы характеризуют фундаментальные типы взаимодействия между материальными объектами. В настоящее время известны четыре вида фундаментальных взаимодействий (см. табл. 1.1): гравитационное, электромагнитное, сильное и слабое.

Указанные взаимодействия являются фундаментальными потому, что любое другое взаимодействие тел или частиц, существующее во Вселенной, можно свести к этим взаимодействиям.

Таблица 1.1

Фундаментальные взаимодействия и фундаментальные силы

Фундаментальные взаимодействия	Интенсивность (относительные единицы)	Радиус действия, м	Фундаментальные силы
Гравитационное	$10^{-38}$	$\infty$	Гравитационная Электромагнитная Ядерные (условно)
Электромагнитное	$10^{-3}$	от $\infty$ до $10^{-15}$	
Сильное (ядерное)	1	$10^{-15}$	
Слабое	$10^{-14}$	$10^{-18}$	

Понятие силы как количественной характеристики взаимодействия, можно ввести только для гравитационного и электромагнитного взаимодействий. Для сильного и слабого взаимодействий понятие силы неприменимо. Это является следствием того, что сильное и слабое взаимодействия имеют чрезвычайно малый радиус действия (см. табл. 1.1.). В таких областях пространства понятия “точка приложения силы” и “линия действия силы” теряют смысл. Несмотря на это при описании взаимодействия нуклонов в ядре, применительно к сильному взаимодействию, условно пользуются понятием “ядерные силы”.

Таким образом, любая сила может быть представлена либо гравитационной, либо электромагнитной, либо комбинацией этих сил.

### 1.3.2. Понятие инерциальной системы отсчета

Опыт показывает, что одно и то же физическое явление протекает по-разному в разных системах отсчета: в одних системах – менее сложно, а в других – более сложно.

Теория и опыт свидетельствуют о том, что наиболее просто физические явления выглядят в инерциальных системах отсчета.

*Инерциальная система отсчета – это система отсчета, связанная со свободным телом отсчета.*

*Свободное тело – тело, на которое не действуют внешние силы.*

Свободных тел в природе не существует. Однако очень близка по своим свойствам к инерциальной системе отсчета система отсчета, связанная с очень далекими звездами, которые в течение многих десятков тысяч лет практически не изменяют своего положения на небосводе (например, Полярная звезда).

Любая другая система отсчета, движущаяся относительно инерциальной прямолинейно и равномерно, также является инерциальной системой отсчета. Все инерциальные системы отсчета равноправны.

Система отсчета, связанная с несвободным или вращающимся телом, не является инерциальной. Однако в тех задачах, где вращение Земли практически не оказывает влияние на рассматриваемые процессы, систему отсчета, связанную с Землей, можно условно считать инерциальной.

### 1.3.3. Законы динамики

В основе классической механики лежат три закона динамики, сформулированные И. Ньютоном в “Математических началах натуральной философии” (1687 г.). Эти законы справедливы только для инерциальных систем отсчета.

### 1.3.3.1. Первый закон динамики

Первый закон динамики утверждает, что *всякое тело сохраняет состояние покоя или прямолинейного равномерного движения до тех пор, пока внешнее воздействие на него не изменит этого состояния.*

В реальных условиях полностью устранить внешнее воздействие на тело нельзя. Его можно только скомпенсировать. Поэтому первый закон динамики можно сформулировать и следующим образом: *если сумма всех сил, действующих на тело, равна нулю, то это тело покоится или движется равномерно и прямолинейно.* Верно и обратное утверждение т.е.

$$\vec{v} = \text{const} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0. \quad (1.34)$$

*Способность тел сохранять состояние покоя или прямолинейного равномерно движения называется инерцией. Поэтому первый закон динамики называют законом инерции.*

### 1.3.3.2. Второй закон динамики

Этот закон отвечает на вопрос, как изменится механическое движение тела в том случае, если сумма всех сил, действующих на него, не будет равна нулю.

Если подействовать на материальную точку различными силами  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  (рис. 1.18) и каждый раз определить ее ускорение  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ , то на основе опытов можно установить, что

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \dots = \frac{F_n}{a_n} = m, \quad (1.35)$$

где  $m$  – масса материальной точки.

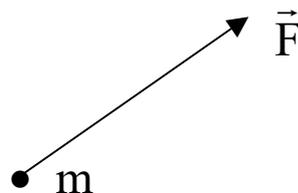


Рис. 1.18

В классической механике Ньютона предполагается, что масса тела не зависит от его скорости.

Опыт показывает, что во всех случаях направления ускорения тела и силы, действующей на это тело, совпадают. Тогда из (1.35) следует, что:

$$\vec{F} = m\vec{a} . \quad (1.36)$$

В общем случае на материальную точку могут одновременно действовать несколько сил. Поэтому под  $\vec{F}$  в (1.36) следует понимать результирующую (или равнодействующую) силу:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i . \quad (1.37)$$

Соотношение (1.37) выражает собой принцип независимости действия сил, согласно которому каждая сила сообщает телу такое ускорение, как если бы другие силы отсутствовали.

Формула (1.36) является вторым законом динамики: *равнодействующая сила равна произведению массы тела на его ускорение и совпадает с ним по направлению.*

Согласно (1.35), *масса есть мера инертности тела, т.е. она характеризует способность тела под действием данной силы приобрести вполне определенное ускорение.*

Поэтому масса тела в соотношениях (1.35) и (1.36) называется инертной.

Если учесть, что в классической механике  $m = \text{const}$ , а ускорение тела  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ , то из формулы (1.36) следует:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} . \quad (1.38)$$

Векторная физическая величина

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (1.39)$$

называется импульсом тела.

Поэтому равнодействующая сила

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (1.40)$$

Эта формула соответствует более общей форме записи второго закона динамики, чем соотношение (1.36): *скорость изменения импульса тела равна по величине равнодействующей силе и совпадает с ней по направлению.*

Согласно (1.40)

$$d\vec{p} = \vec{F} dt. \quad (1.41)$$

Уравнения (1.40) и (1.41) выражают второй закон динамики в дифференциальной форме.

Если проинтегрировать обе части дифференциального уравнения (1.41), предполагая, что в течение времени  $\Delta t = t_2 - t_1$  сила  $\vec{F} = \text{const}$ , то получим выражение второго закона динамики в интегральной форме:

$$\int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} d\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt, \quad (1.42)$$

откуда  $\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{F}(t_2 - t_1)$ , т.е.

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t. \quad (1.43)$$

Произведение  $\vec{F}\Delta t$  называется импульсом силы за время  $\Delta t$ , а выражение (1.43) является интегральной формой второго закона динамики: *изменение импульса материальной точки за время  $\Delta t$  равно импульсу силы, действующей на эту материальную точку за тот же промежуток времени.*

Второй закон динамики выражает собой один из основных принципов физики – принцип причинности. Согласно этому принципу, всякое изменение состояния системы связано с определенной причиной, порождающей это изменение. В случае классической механики Ньютона причиной является сила, а следствием – деформация тела или его ускорение.

### 1.3.3.3. Третий закон динамики

Опыт показывает (см. рис.1.19), что механическое воздействие одного тела на другое, как правило, не остается односторонним (первый индекс у

силы указывает точку приложения этой силы, а второй – тело, вызывающее появление силы).

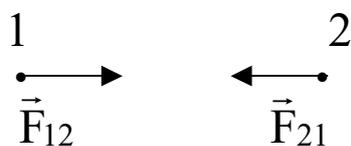


Рис. 1.19

В этом состоит третий закон динамики: *силы, с которыми взаимодействуют две материальные точки, равны по модулю и противоположно направлены, т.е.*

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (1.44)$$

Если взаимодействующие материальные точки не являются частями одного тела, то указанные силы уравновесить себя не могут, так как они приложены к разным телам.

В том случае, когда рассматриваемые материальные точки являются частями одного тела, силы действия и противодействия могут взаимно уравновешивать друг друга. Это относится и к тому случаю, когда взаимодействующие тела являются частями одной и той же системы.

Третий закон динамики не справедлив для тел, движущихся относительно друг друга со скоростями, соизмеримыми со скоростью света в вакууме, а также в некоторых других случаях.

#### 1.3.3.4. Изолированные (замкнутые) системы. Закон сохранения импульса

*Если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то такая система называется изолированной (или замкнутой).*

Близка по своим свойствам к замкнутой системе и такая система, в которой внутренние взаимодействия между телами значительно превышают внешние воздействия на эту систему.

Для изолированных систем выполняется следующий закон сохранения: *результатирующий импульс изолированной системы тел с течением времени сохраняется, т.е.*

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \text{const} \quad (1.45)$$

Получим этот закон сохранения для простейшего случая, когда система состоит всего из одной материальной точки.

Пусть на материальную точку массы  $m$  действует сила  $\vec{F}$  (рис. 1.20).

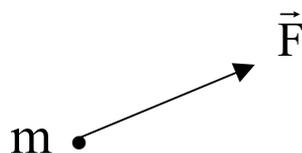


Рис. 1.20

Согласно второму закону динамики эта сила  $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ . Если система изолирована, то сила, действующая на материальную точку, должна быть равна нулю. Поэтому в этом случае производная  $\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$ , и импульс

материальной точки  $\vec{P} = \text{const}$ . Полученный вывод можно распространить и на тот случай, когда система состоит из группы тел.

Следствием закона сохранения импульса является следующее: если система не является изолированной, то тела в этой системе будут вести себя так, что проекция результирующего импульса системы на ось, перпендикулярную направлению внешней силы, действующей на систему, с течением времени изменяться не будет, т.е.  $P_x = \sum_{i=1}^n P_{xi} = \text{const}$  (рис. 1.21).

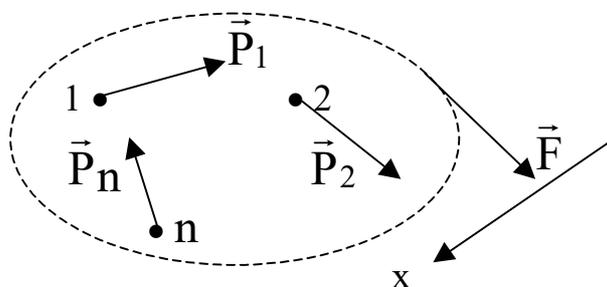


Рис. 1.21

### 1.3.4. Характеристика некоторых сил, рассматриваемых в механике

#### 1.3.4.1. Упругая сила

При упругой деформации тел внутри этих тел возникает сила  $\vec{F}_{\text{упр}}$ , под действием которой тело стремится возвратиться к исходным размерам (рис. 1.22).

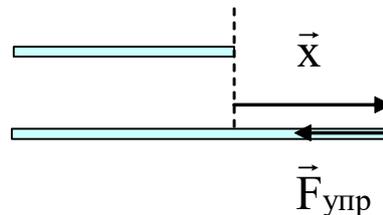


Рис. 1.22

Согласно закону Гука, упругая сила

$$\vec{F}_{\text{упр}} = -k\vec{x}, \quad (1.46)$$

где  $k$  – коэффициент упругости, численно равный упругой силе, возникающей при единичной деформации.

Как следует из закона Гука, направление упругой силы противоположно смещению.

#### 1.3.4.2. Гравитационная сила

За счет гравитационного взаимодействия две любые материальные точки испытывают взаимное притяжение (рис. 1.23).

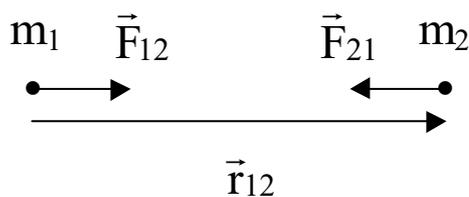


Рис. 1.23

Согласно закону всемирного тяготения, на материальную точку с массой  $m_1$  со стороны материальной точки  $m_2$  действует сила  $\vec{F}_{12}$ , определяемая следующим образом:

$$\vec{F}_{12} = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}, \quad (1.47)$$

где  $\gamma$  – гравитационная постоянная, равная  $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$ .

Соотношение (1.47) справедливо также и тогда, когда одно из тел или оба тела представляют собой однородные шары. В этих случаях расстояние между телами отсчитывается от центра шаров.

#### 1.3.4.3. Сила тяжести

Сила тяжести, действующая на тело

$$\vec{P} = m\vec{g}, \quad (1.48)$$

где  $\vec{g}$  – ускорение свободного падения.

За счет вращения Земли вокруг своей оси (см. рис. 1.24) сила тяжести совпадает с гравитационной силой только на полюсах ( $\vec{P} = \vec{F}_g$ ). Во всех других случаях, за счет наличия центростремительной силы  $\vec{F}_c$ , сила тяжести  $P < F_g$  и является отвесной составляющей гравитационной силы.

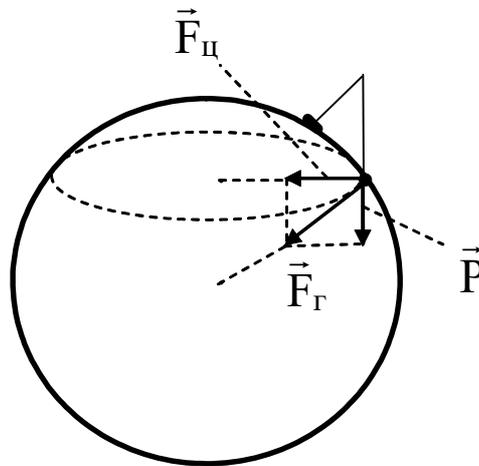


Рис. 1.24

#### 1.3.4.4. Сила веса (вес тела)

*Сила веса – сила, с которой тело действует на опору или растягивает нить.*

Сила веса  $\vec{Q}$  приложена к опоре, а не к телу.

В качестве примера рассмотрим лифт, в котором находится тело, при двух направлениях его движения.

а) Движение вверх (рис. 1.25).

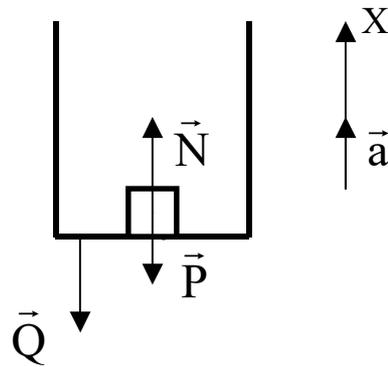


Рис. 1.25

Согласно второму закону динамики, для тела, находящегося в лифте,

$$\vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}. \quad (1.49)$$

После проектирования векторов на ось X имеем:

$$N = P + ma. \quad (1.50)$$

Из третьего закона динамики следует, что модуль силы веса  $Q = N$ . Поэтому в данном случае  $Q > P$ , и тело испытывает перегрузку.

б) Движение вниз (рис. 1.26).

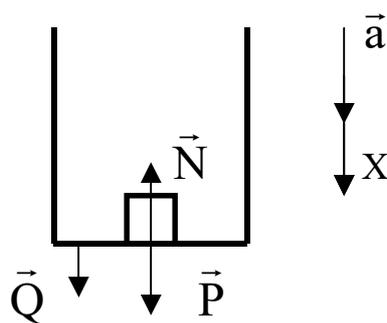


Рис. 1.26

Из уравнения (1.49) после проектирования векторов на ось X следует, что в данном случае

$$N = P - ma, \quad (1.51)$$

поэтому  $Q < P$ .

Если  $a = g$ , то  $Q = 0$ , и тело будет находиться в состоянии невесомости.

#### 1.3.4.5. Силы трения

Влияние сил трения на движение тела велико. Величина сил трения зависит от шероховатости соприкасающихся поверхностей, их физических свойств и наличия смазки между этими поверхностями. Сила трения всегда направлена против направления движения тела.

##### 1.3.4.5.1. Силы трения скольжения

Рассмотрим тело, находящееся на наклонной плоскости (рис. 1.27).

Модуль силы трения скольжения

$$F_{\text{тр}} = f_c \cdot N', \quad (1.52)$$

где  $f_c$  – коэффициент трения скольжения;  $N'$  – сила нормального давления тела на плоскость.

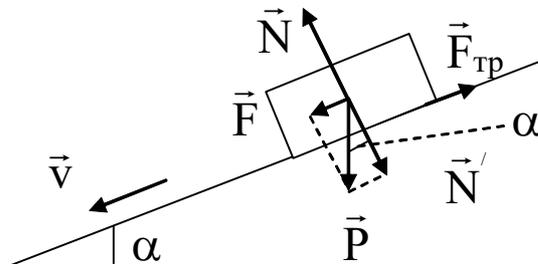


Рис. 1.27

Учитывая, что  $N' = P \cdot \cos\alpha$ , имеем:

$$F_{\text{тр}} = f_c \cdot P \cdot \cos\alpha. \quad (1.53)$$

Если тело находится на горизонтальной плоскости ( $\angle\alpha = 0$ ), то

$$F_{\text{тр}} = f_c \cdot P. \quad (1.54)$$

Из опытов с наклонной плоскостью можно экспериментально определить коэффициент трения скольжения, если найти угол  $\alpha$ , при котором тело начинает соскальзывать с наклонной плоскости. Для этого положения тела  $F = F_{\text{тр}}$ , где  $F = P \cdot \sin\alpha$  и из соотношения (1.42) следует, что

$$f_c = \operatorname{tg}\alpha. \quad (1.53)$$

Таким образом, коэффициент трения скольжения равен тангенсу угла наклона, при котором тело начинает соскальзывать с наклонной плоскости.

#### 1.3.4.5.2. Силы трения качения

Величину силы трения качения можно определить следующим образом:

$$F_{\text{тр}} = \frac{f_k N'}{R}, \quad (1.54)$$

где  $f_k$  – коэффициент трения качения;  $R$  – радиус катящегося тела.

Согласно формуле (1.54), увеличение  $R$  приводит к уменьшению силы трения качения. По этой причине эффективным способом уменьшения трения (помимо использования смазочных масел) является замена сил трения скольжения силами трения качения.

### 1.3.5. Механическая работа, мощность и энергия

#### 1.3.5.1. Работа и мощность

Теория и опыт показывают, что различные формы движения материи способны к взаимопревращению: исчезновение одной формы движения материи обязательно сопровождается возникновением эквивалентного количества другой формы движения материи.

*Работа  $A$  – скалярная физическая величина, характеризующая процесс превращения одной формы движения материи в другую.*

Пусть под действием силы  $\vec{F}$  материальная точка совершила бесконечно малое перемещение  $d\vec{r}$  (см. рис. 1.28).

В этом случае сила  $\vec{F}$  совершает элементарную работу  $dA$ , которая определяется формулой:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (1.55)$$

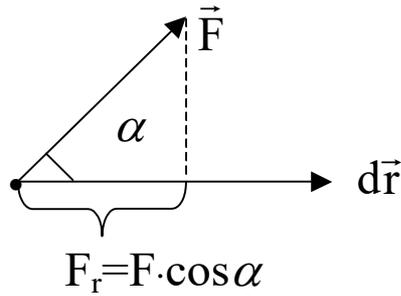


Рис. 1.28

Согласно формуле (1.55),

$$dA = F \cdot dr \cdot \cos \alpha. \quad (1.56)$$

Соотношение (1.56) позволяет сделать следующие выводы:

- работа является алгебраической величиной (т.е. имеет знак):  
если  $\angle \alpha$  острый, то  $dA > 0$ , а если  $\angle \alpha$  тупой, то  $dA < 0$ ;
- механическая работа  $dA = 0$ , если  $\angle \alpha = \pi/2$  ( $\vec{F} \perp d\vec{r}$ ) или  $dr = 0$ ;
- если на материальную точку одновременно действует несколько сил, то

$$\begin{aligned} dA &= (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) \cdot d\vec{r} = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \dots + \vec{F}_n \cdot d\vec{r} = \\ &= dA_1 + dA_2 + \dots + dA_n. \end{aligned}$$

Работа при конечном перемещении материальной точки равна:

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 F \cdot dr \cdot \cos \alpha. \quad (1.57)$$

Учитывая, что  $dr = ds$ , а  $F \cdot \cos \alpha = F_r = F_s$ , то

$$A_{12} = \int_1^2 F_s \cdot ds. \quad (1.58)$$

Таким образом, для расчета работы при конечном перемещении

материальной точки необходимо знать зависимость проекции силы  $F_s$  от пройденного телом пути  $S$ .

Рассмотрим два случая.

1) Работа постоянной силы (рис. 1.29).

$$A_{12} = \int_1^2 F_s \cdot ds = F_s \int_1^2 ds = F_s \cdot s_{12}. \quad (1.59)$$

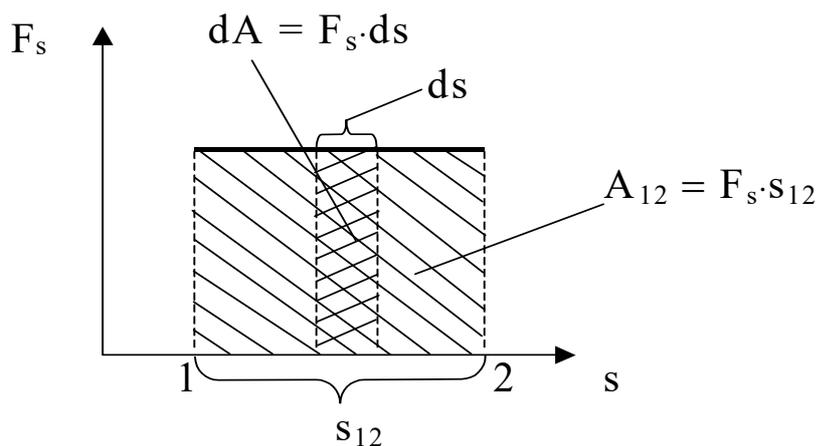


Рис. 1.29

2) Работа переменной силы (рис. 1.30).

$$A_{12} = \int_1^2 F_s \cdot ds. \quad (1.60)$$

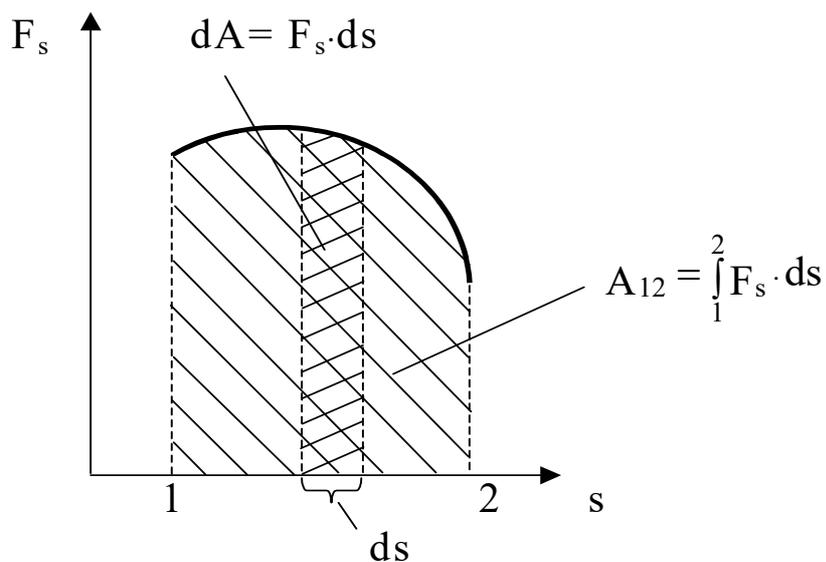


Рис.1.30

Из рис. 1.29 и 1.30 следует, что совершенная работа численно равна площади под кривой зависимости проекции силы  $F_s$ , от пройденного телом пути  $S$ .

*Быстроту совершения работы характеризует скалярная физическая величина  $N$ , которая называется мощностью. Различают среднюю и мгновенную мощность:*

- средняя мощность

$$\langle N \rangle = \frac{A_{12}}{\Delta t}; \quad (1.61)$$

- мгновенная мощность

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (1.62)$$

### 1.3.5.2. Консервативные силы и консервативные системы

*Силы, работа которых не зависит от формы траектории движения тела, называются консервативными силами.*

*Системы, в которых действуют только консервативные силы, называются консервативными системами.*

#### 1.3.5.2.1. Работа силы тяжести

Покажем, что сила тяжести является консервативной силой. Для этого рассчитаем работу силы тяжести при движении материальной точки из начального положения (1) в конечное положение (2) по двум произвольным траекториям движения (рис. 1.31).

Будем считать, что масштабы перемещения тела таковы, что ускорение свободного падения тела  $\vec{g} = \text{const}$ .

Работа силы тяжести при движении тела по траектории  $S_{1a2}$

$$A_{1a2} = \int_1^2 \vec{P} \cdot d\vec{r} = \vec{P} \cdot \int_{1a2} d\vec{r} = \vec{P} \Delta \vec{r}. \quad (1.63)$$

Работа силы тяжести при движении тела по траектории  $S_{1b2}$

$$A_{1b2} = \int_1^2 \vec{P} \cdot d\vec{r} = \vec{P} \cdot \int_{1b2} d\vec{r} = \vec{P} \Delta \vec{r}. \quad (1.64)$$

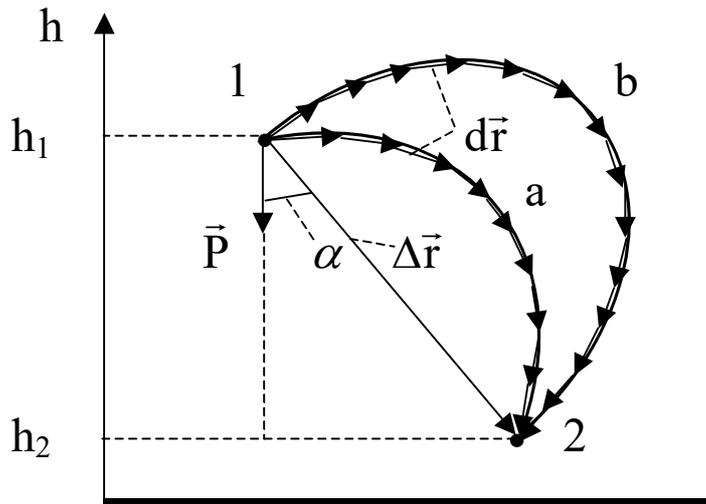


Рис. 1.31

Так как  $A_{1a2} = A_{1b2}$ , то сила тяжести является консервативной силой. Из соотношений (1.63) и (1.64) следует, что работа силы тяжести в нашем случае

$$A_{12} = \vec{P} \cdot \Delta \vec{r} = P \cdot \Delta r \cdot \cos \alpha = Ph_1 - Ph_2 = mgh_1 - mgh_2. \quad (1.65)$$

Введем новую функцию:

$$W_{\Pi} = mgh + \text{const}. \quad (1.66)$$

Тогда работа силы тяжести

$$A_{12} = W_{\Pi 1} - W_{\Pi 2} = - (W_{\Pi 2} - W_{\Pi 1})$$

и 
$$A_{12} = -\Delta W_{\Pi}. \quad (1.67)$$

Работу консервативной силы мы представили как убыль некоторой функции  $W_{\Pi}$ .

Эта функция в данном случае называется взаимной потенциальной энергией материальной точки и Земли.

*Можно показать, что в любом случае работу консервативной силы можно представить как убыль потенциальной энергии системы.*

#### 1.3.5.2.2. Работа упругой силы

Докажем, что упругая сила также является консервативной силой.

Для этого рассчитаем работу  $A_{12}$ , совершаемую упругой силой при удлинении пружины от размера  $X_1$  до  $X_2$  (рис. 1.32).

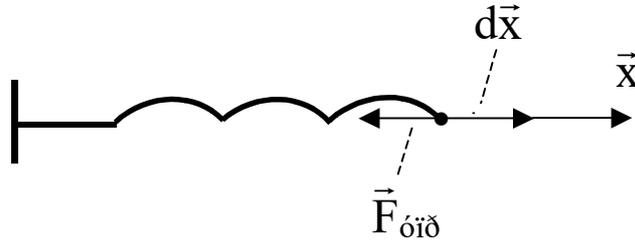


Рис. 1.32

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}_{\text{упр}} d\vec{x} = -k \int_1^2 \vec{x} d\vec{x} = -k \int_{x_1}^{x_2} x dx \cos \alpha. \quad (1.68)$$

Учитывая, что  $\cos \alpha = 1$  (см. рис.1.32), имеем:

$$A_{12} = \frac{k x_1^2}{2} - \frac{k x_2^2}{2}. \quad (1.69)$$

Полученный результат свидетельствует о том, что работа упругой силы не зависит от способа удлинения пружины от размеров  $X_1$  до размеров  $X_2$ .

Поэтому упругая сила является консервативной силой.

Обозначим:

$$W_i = \frac{k x^2}{2} + \text{const}. \quad (1.70)$$

Функция  $W_{\Pi}$  в данном случае называется потенциальной энергией упругой деформации.

С учетом этой функции работа упругой силы (1.69) равна:

$$A_{12} = W_{\Pi 1} - W_{\Pi 2} = - (W_{\Pi 2} - W_{\Pi 1}) = - \Delta W_{\Pi} \quad (1.71)$$

Как и в случае силы тяжести, работа упругой силы может быть представлена как убыль потенциальной энергии системы.

Кроме силы тяжести и упругой силы консервативными силами, например, являются силы электростатического поля.

1.3.5.3. Неконсервативные силы, работа неконсервативной силы, неконсервативные системы

*Силы, работа которых зависит от формы траектории движения тела, называются неконсервативными силами.*

Рассмотрим неконсервативную силу на примере силы тяги автомобиля.

Рассчитаем работу силы тяги, совершаемую при перемещении автомобиля из начального положения 1 в конечное положение 2 по двум произвольным траекториям движения, считая, что величина силы  $F_{\text{тяги}} = \text{const}$  (рис. 1.33).

Работа, совершаемая силой тяги при движении автомобиля по кривой  $S_{1a2}$ ,

$$A_{1a2} = \int_1^2 \vec{F}_{\text{тяги}} d\vec{r} = \int_1^2 F_{\text{тяги}} dr \cdot \cos \alpha. \quad (1.72)$$

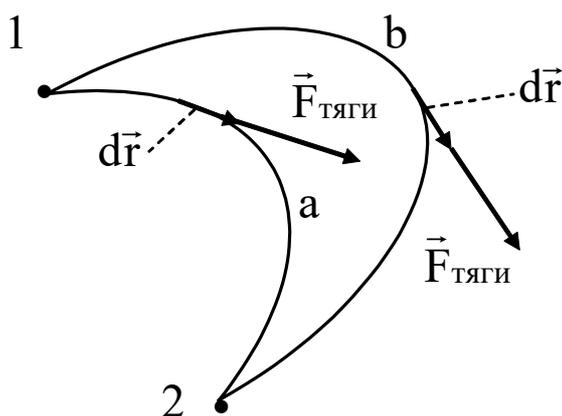


Рис. 1.33

Так как в каждой точке траектории движения автомобиля  $d\vec{r} \uparrow \uparrow \vec{F}_{\text{тяги}}$ , а  $dr = ds$  то

$$A_{1a2} = F_{\text{тяги}} \int_{1a2} ds = F_{\text{тяги}} S_{1a2}. \quad (1.73)$$

Работа, совершаемая силой тяги при движении автомобиля по кривой  $S_{1b2}$ ,

$$A_{1b2} = \int_1^2 \vec{F}_{\text{тяги}} d\vec{r} = \int_1^2 F_{\text{тяги}} dr \cdot \cos \alpha = F_{\text{тяги}} \int ds = F_{\text{тяги}} S_{1b2}. \quad (1.74)$$

Так как  $S_{1a2} \neq S_{1b2}$ , то  $A_{1a2} \neq A_{1b2}$ .

Поэтому сила тяги автомобиля является неконсервативной силой.

К неконсервативным силам также относятся все силы трения, сила давления газа, силы вихревого электрического поля.

*Работу неконсервативной силы нельзя представить как убыль потенциальной энергии системы.*

Если в системе действует хотя бы одна неконсервативная сила, то такая система называется неконсервативной системой.

#### 1.3.5.4. Потенциальная энергия

Механическое состояние системы можно определить, задавая массу координаты и скорости всех тел этой системы, т.е.  $m$ ,  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$ , или следующие величины:  $m$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$ , которые называются параметрами состояния механической системы.

Кроме параметров состояния важное значение имеют функции параметров состояния механической системы.

*Функция параметров состояния механической системы – это физическая величина, изменение которой не зависит от формы траектории движения, по которой тело переходит из начального положения в конечное, а полностью определяется только начальными и конечными параметрами состояния тела.*

Потенциальная энергия  $W_{\Pi}$  – функция параметров состояния механической системы, обладающая следующими свойствами:

- определяется взаимным расположением тел или частей тела, т.е.  $W_{\Pi} = W_{\Pi}(x, y, z)$ ;
- $W_{\Pi}$  – функция непрерывная, конечная и дифференцируемая;
- убыль потенциальной энергии  $-\Delta W_{\Pi}$  определяет работу, совершенную системой под действием консервативных сил;
- потенциальная энергия всегда определена с точностью до произвольной постоянной; по этой причине точное значение  $W_{\Pi}$  никогда не известно, что позволяет при решении данной задачи рационально выбирать начало отсчета потенциальной энергии.

### 1.3.5.4.1. Связь потенциальной энергии и консервативной силы

Пусть под действием консервативной силы  $\vec{F}$  материальная точка совершила элементарное перемещение  $d\vec{r}$  (рис. 1.34).

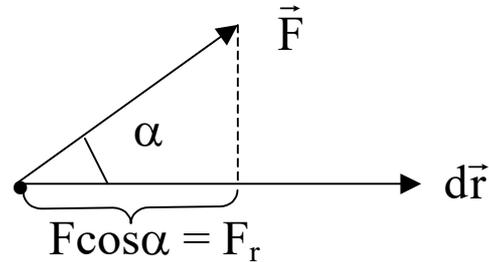


Рис. 1.34

Элементарная работа  $dA$ , совершаемая консервативной силой, с одной стороны, определяется скалярным произведением  $\vec{F}d\vec{r}$ , а с другой – убылью потенциальной энергии  $-dW_{\text{п}}$ . Поэтому, учитывая, что

$$\vec{F}d\vec{r} = -dW_{\text{п}}, \quad (1.75)$$

имеем:

$$F \cdot dr \cdot \cos \alpha = -dW_{\text{п}} \Rightarrow F_r dr = -dW_{\text{п}},$$

откуда

$$F_r = -\frac{dW_{\text{п}}}{dr}. \quad (1.76)$$

Соотношение (1.76) можно использовать для нахождения проекций консервативной силы на координатные оси:

$$F_x = -\frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial x}; F_y = -\frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial y}; F_z = -\frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial z}, \quad (1.77)$$

что позволяет определить и саму консервативную силу

$$\vec{F} = -\left(\vec{i} \frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial z}\right). \quad (1.78)$$

Вектор, стоящий в скобках выражения (1.78), называется градиентом потенциальной энергии:

$$\text{grad } W_{\Pi} = \vec{i} \frac{\partial W_{\Pi}}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial W_{\Pi}}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial W_{\Pi}}{\partial z}. \quad (1.79)$$

*Градиент потенциальной энергии – это вектор, указывающий направление быстрого возрастания потенциальной энергии и численно равный приращению потенциальной энергии на единицу длины этого направления.*

С учетом (1.79) консервативная сила

$$\vec{F} = - \text{grad } W_{\Pi}. \quad (1.80)$$

*Консервативная сила, действующая на материальную точку, численно равна и противоположно направлена градиенту потенциальной энергии этой материальной точки.*

1.3.5.5. Потенциальные кривые. Условия равновесия механических систем

*График зависимости потенциальной энергии от координат  $W_{\Pi} = W_{\Pi}(x, y, z)$  (или  $W_{\Pi} = W_{\Pi}(\vec{r})$ ) называется потенциальной кривой.*

Рассмотрим одну из возможных потенциальных кривых для случая, когда  $W_{\Pi}$  зависит только от расстояния  $r$  между двумя материальными точками, одна из которых находится в начале координат (рис. 1.35).

По наклону потенциальной кривой можно судить о модуле и направлении консервативной силы, действующей на материальную точку вдоль соответствующего направления.

Из геометрического смысла производной

$$\text{tg } \alpha = \frac{dW_{\Pi}}{dr}. \quad (1.81)$$

Однако, согласно (1.76),

$$-\frac{dW_{\Pi}}{dr} = F_r. \quad (1.82)$$

Из (1.81) и (1.82) следует, что

$$F_r = -\text{tg } \alpha. \quad (1.83)$$

Проекция силы на направление  $\Gamma$  равна по абсолютной величине и противоположна по знаку тангенсу угла наклона касательной к потенциальной кривой.

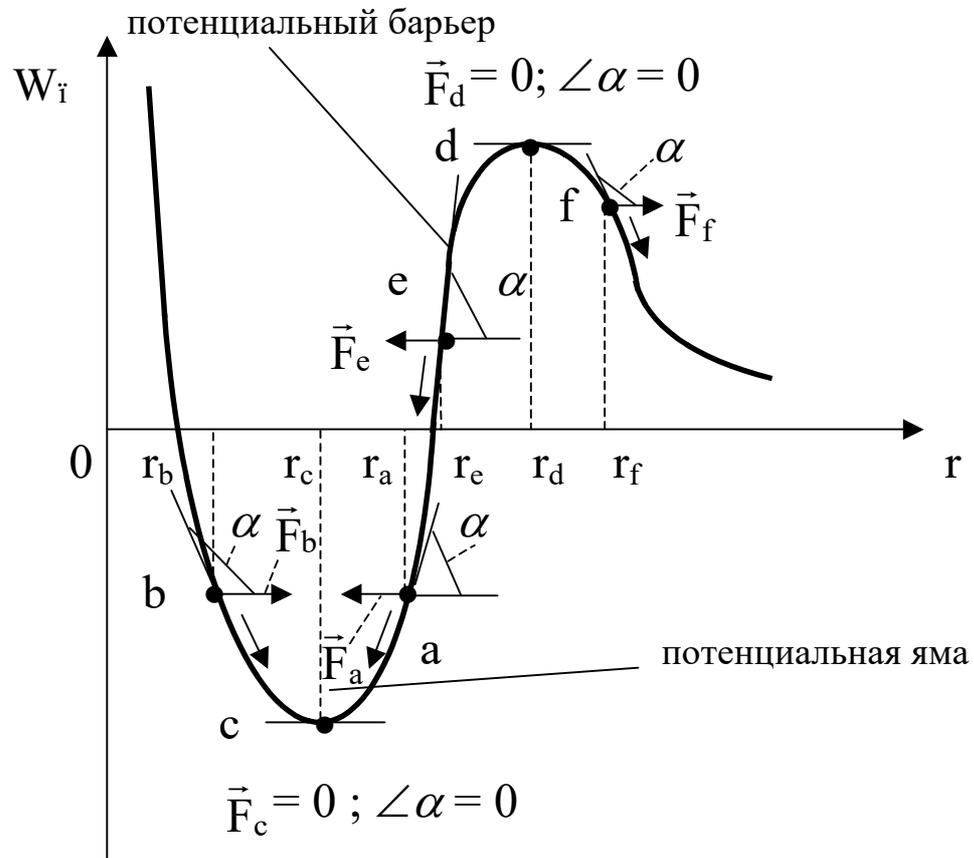


Рис. 1.35

Чем круче идет потенциальная кривая, тем больше сила, действующая на материальную точку вдоль направления  $\Gamma$ .

В общем случае на потенциальных кривых существуют потенциальные ямы и потенциальные барьеры (см. рис. 1.35).

Рассмотрим направление сил, действующих на материальную точку, находящуюся в области потенциальной ямы.

Если тело имеет координату  $r_a$ , то на потенциальной кривой ей соответствует точка  $a$ , в которой

$$\operatorname{tg} \alpha > 0 \rightarrow \frac{dW_{\text{п}}}{dr} > 0,$$

а проекция силы на ось  $r$

$$F_a < 0. \quad (1.84)$$

Поэтому на материальную точку, занимающую положение  $r_a$ , будет действовать сила, направленная против оси  $r$ . В результате чего тело будет перемещаться влево. На потенциальной кривой этому процессу соответствует перемещение точки **a** к точке **c**.

Пусть теперь материальная точка имеет координату  $r_b$ . В точке **b**

$$\operatorname{tg} \alpha < 0 \rightarrow \frac{dW_{\text{п}}}{dr} < 0,$$

проекция силы на ось  $r$

$$F_b > 0. \quad (1.85)$$

На материальную точку в этом случае действует сила, направленная вдоль оси  $r$ , в результате чего тело будет перемещаться вправо. На потенциальной кривой этому процессу соответствует перемещение точки **b** к точке **c**.

Если координата материальной точки равна  $r_c$ , то

$$\operatorname{tg} \alpha = 0 \text{ и } F_c = 0. \quad (1.86)$$

В том случае, когда материальная точка занимает положение, соответствующее минимуму на потенциальной кривой, консервативная сила на нее не действует, и тело сохраняет состояние покоя. Это положение материальной точки соответствует состоянию ее устойчивого равновесия, так как при перемещении тела от положения, определяемого координатой  $r_c$ , возникают силы, стремящиеся вернуть тело в положение, соответствующее на потенциальной кривой точке **c**.

В точке с координатой  $r_d$  выполняются условия, аналогичные (1.86):

$$\operatorname{tg} \alpha = 0 \text{ и } F_d = 0. \quad (1.87)$$

Однако в отличие от точки  $C$  точка  $d$ , соответствующая максимуму на потенциальной кривой, определяет состояние неустойчивого равновесия тела, так как при сколь угодно малых смещениях материальной точки будут возникать силы, стремящиеся удалить тело от положения, соответствующего координате  $r_d$  (см. точки  $e$  и  $f$ ).

В общем случае механическая система находится в состоянии устойчивого равновесия, если ее потенциальная энергия минимальна, а скорости всех тел системы равны нулю:

$$\frac{dW_{\text{п}}}{dr} = 0; \quad \frac{d^2W_{\text{п}}}{dr^2} > 0; \quad v_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (1.88)$$

При выполнении следующих условий механическая система находится в состоянии неустойчивого равновесия:

$$\frac{dW_{\text{п}}}{dr} = 0; \quad \frac{d^2W_{\text{п}}}{dr^2} < 0; \quad v_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (1.89)$$

Если механическая система предоставлена сама себе, то она стремится перейти в такое состояние, при котором ее потенциальная энергия минимальна.

### 1.3.5.6. Кинетическая энергия

Рассчитаем работу, которую совершает произвольная сила  $\vec{F}$  (как консервативная, так и неконсервативная) для того, чтобы изменить скорость материальной точки от значения  $V_1$  до значения  $V_2$ .

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r}. \quad (1.90)$$

Учитывая, что  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$ , а  $m = \text{const}$  имеем:

$$A_{12} = m \int_1^2 \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = m \int_{v_1}^{v_2} \vec{v} d\vec{v} = m \int_{v_1}^{v_2} \frac{1}{2} d(\vec{v})^2 = m \int_{v_1}^{v_2} \frac{1}{2} d(v^2) = \int_{v_1}^{v_2} d\left(\frac{mv^2}{2}\right).$$

Отсюда

$$A_{12} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \quad (1.91)$$

Полученная разность не зависит от формы траектории движения материальной точки. Поэтому эта разность должна определять изменение некоторой функции параметров состояния механической системы.

Введем новую функцию

$$W_K = \frac{mv^2}{2}, \quad (1.92)$$

тогда

$$A_{12} = W_{K2} - W_{K1} = \Delta W_K. \quad (1.93)$$

Эта функция  $W_K$  называется кинетической энергией тела.

*Работа, совершаемая системой под действием произвольной силы равна изменению кинетической энергии системы.*

Кинетическая энергия – функция состояния механической системы, имеющая следующие свойства:

- определяется массой тела и квадратом его скорости;
- кинетическая энергия всегда является положительной величиной;
- $W_K = W_K(m, v_x, v_y, v_z)$  – функция непрерывная, конечная и дифференцируемая;
- $\Delta W_K$  – определяет работу, совершаемую системой под действием всех сил этой системы;
- кинетическая энергия системы тел – величина аддитивная:

$$W_K = \sum_i W_{ki}. \quad (1.94)$$

1.3.5.7. Полная механическая энергия системы. Закон сохранения полной механической энергии

Полная механическая энергия определяется суммой потенциальной и кинетической энергий:

$$W = W_{\Pi} + W_K. \quad (1.95)$$

Так как  $W_{\Pi} = W_{\Pi}(x,y,z)$  , а  $W_{\kappa} = W_{\kappa}(m,v_x,v_y,v_z)$ , то полная механическая энергия

$$W = W(m, x,y,z, v_x,v_y,v_z). \quad (1.96)$$

*Полная механическая энергия – конечная, непрерывная, дифференцируемая функция всех параметров состояния механической системы, являющаяся единой мерой всех форм механического движения этой системы.*

Рассмотрим изолированную консервативную систему. Элементарная работа сил такой системы будет определяться, с одной стороны, элементарной убылью потенциальной энергии системы

$$dA = - d W_{\Pi} , \quad (1.97)$$

а с другой стороны – элементарным изменением кинетической энергии системы:

$$dA = dW_{\kappa} . \quad (1.98)$$

Из соотношений (1.97) и (1.98) следует, что

$$dW_{\Pi} + dW_{\kappa} = 0 \Rightarrow d(W_{\Pi} + W_{\kappa}) = 0 \Rightarrow dW = 0,$$

поэтому

$$W = \text{const}. \quad (1.99)$$

Полученный результат является выражением закона сохранения полной механической энергии системы: *полная механическая энергия изолированной консервативной системы тел с течением времени не изменяется.*

#### **1.4. Вращательное движение абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси**

*Абсолютно твердое тело – абсолютно недеформируемое тело, т.е. такое тело, форма которого не изменяется при воздействии на это тело сил любой величины.*

*Вращательное движение – движение тела, при котором все точки этого тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения.*

Ось вращения может проходить через тело или лежать вне его.

#### 1.4.1. Кинематические характеристики вращательного движения

##### 1.4.1.1. Угловое перемещение тела $\Delta\vec{\varphi}$

Пусть материальная точка, вращаясь вокруг неподвижной оси  $OO'$ , совершила поворот на угол  $\Delta\varphi$  (см. рис. 1.36).

*Угловое перемещение тела – это вектор, откладываемый на оси вращения тела, причем таким образом, что его направление связано с направлением вращения тела правилом правого буравчика.*

Модуль вектора углового перемещения численно равен углу поворота тела

$$|\Delta\vec{\varphi}| = \Delta\varphi. \quad (1.100)$$

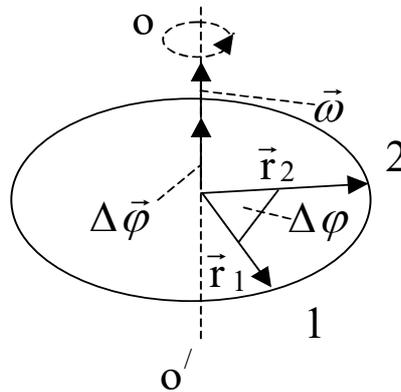


Рис. 1.36

##### 1.4.1.2. Угловая скорость тела $\vec{\omega}$

*Угловая скорость – векторная физическая величина, характеризующая быстроту совершения телом углового перемещения.*

Угловая скорость определяется соотношениями:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \quad (1.101)$$

*Угловая скорость равна первой производной от углового перемещения тела по времени.*

Вектор угловой скорости откладывается на оси вращения и имеет направление, связанное с направлением вращения тела правилом правого буравчика (рис. 1.36).

### 1.4.1.3. Угловое ускорение тела $\vec{\varepsilon}$

Угловое ускорение – векторная физическая величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости тела.

Угловое ускорение определяется соотношениями:

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \Rightarrow \vec{\varepsilon} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}. \quad (1.102)$$

Угловое ускорение равно первой производной от угловой скорости тела по времени или второй производной от углового перемещения тела по времени.

Вектор углового ускорения откладывается на оси вращения и может иметь одно из двух направлений (рис. 1.37):

- $\vec{\varepsilon} \uparrow \uparrow \vec{\omega}$  (если угловая скорость тела возрастает с течением времени, т.е.  $\frac{d\omega}{dt} > 0$ );
- $\vec{\varepsilon} \uparrow \downarrow \vec{\omega}$  (если угловая скорость тела уменьшается с течением времени, т.е.  $\frac{d\omega}{dt} < 0$ ).

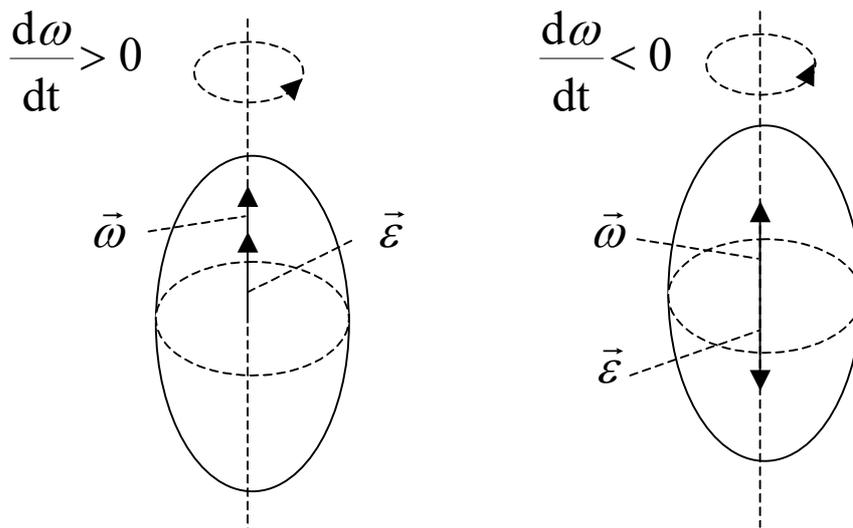


Рис. 1.37

1.4.1.4. Взаимосвязь между угловыми и линейными величинами

Пусть материальная точка, вращаясь вокруг неподвижной оси, за время  $dt$  совершила поворот на угол  $d\varphi$  (рис. 1.38).

Учитывая взаимное направление векторов  $d\vec{r}$ ,  $d\vec{\varphi}$  и  $\vec{r}$ , а также то, что  $r d\varphi = dr$ , имеем:

$$d\vec{r} = [d\vec{\varphi} \times \vec{r}]. \quad (1.103)$$

Если разделить правую и левую части этого соотношения на  $dt$ , то получим:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left[ \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r} \right], \quad (1.104)$$

откуда (с учетом формул (1.16) и (1.101))

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]; \quad v = \omega r. \quad (1.105)$$

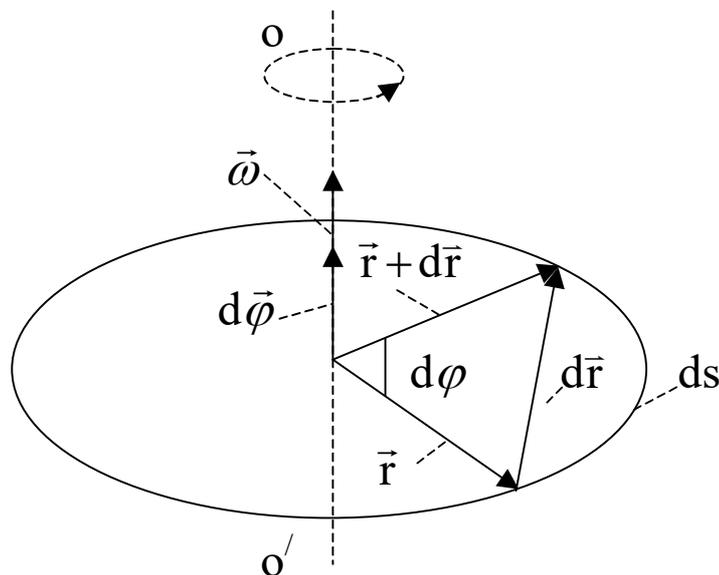


Рис. 1.38

Продифференцируем выражение (1.105) по времени.

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \left[ \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \right] + \left[ \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right]. \quad (1.106)$$

Из формул (1.21), (1.102) и (1.106) следует, что

$$\vec{a} = [\vec{\varepsilon} \times \vec{r}] + [\vec{\omega} \times \vec{v}]. \quad (1.107)$$

Первое слагаемое в формуле (1.107) характеризует изменение скорости тела по величине и определяет тангенциальное ускорение:

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon} \times \vec{r}]; \quad a_\tau = \varepsilon r. \quad (1.108)$$

Второе слагаемое в формуле (1.107) характеризует изменение скорости тела по направлению и поэтому определяет нормальное ускорение:

$$\vec{a}_n = [\vec{\omega} \times \vec{v}]; \quad a_n = \omega v. \quad (1.109)$$

С учетом соотношения (1.105) модуль нормального ускорения

$$a_n = v^2/r. \quad (1.110)$$

Рисунок 1.39 иллюстрирует полученные результаты для направлений рассмотренных векторных величин в случае ускоренного вращательного движения материальной точки.

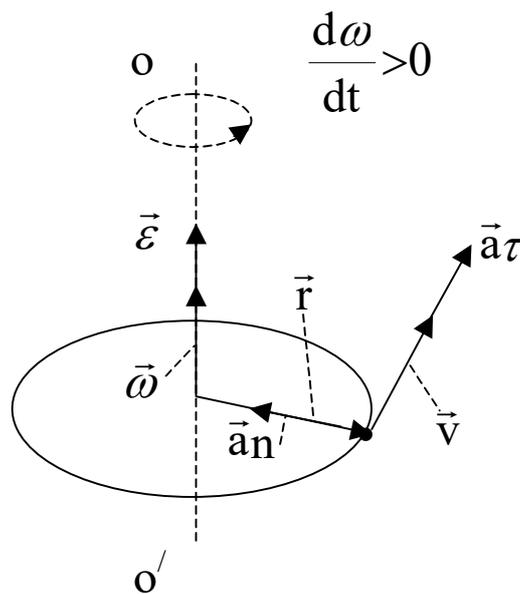


Рис. 1.39

### 1.4.2. Момент силы

*Вращающее действие силы определяется ее направлением, величиной и точкой приложения.*

Все эти особенности учитывает векторная физическая величина  $\vec{M}$ , называемая моментом силы.

Различают момент силы относительно точки и оси вращения.

#### 1.4.2.1. Момент силы относительно точки

Момент силы относительно точки определяется векторным произведением:

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]. \quad (1.111)$$

На рис. 1.40 показано направление момента силы относительно точки  $A$ .

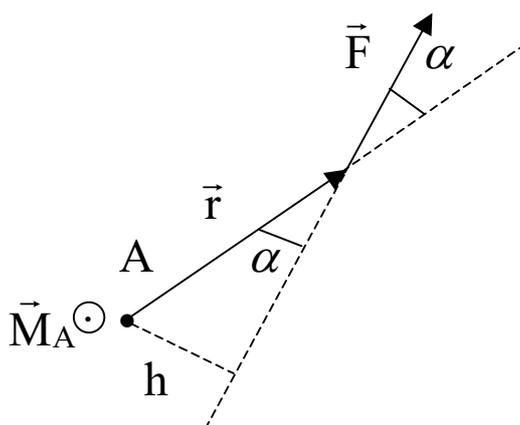


Рис. 1.40

На этом рисунке точка  $A$ , сила  $\vec{F}$ , вектор  $\vec{r}$ , задающий положение точки приложения силы относительно точки  $A$ , лежат в плоскости чертежа.

Модуль момента силы

$$M = F \cdot r \cdot \sin \alpha \Rightarrow M = F \cdot h, \quad (1.112)$$

где отрезок  $h = r \cdot \sin \alpha$  называется плечом силы относительно точки.

Плечо силы определяется длиной перпендикуляра, опущенного из рассматриваемой точки  $A$  на линию действия силы.

#### 1.4.2.2. Момент силы относительно оси вращения

Пусть к телу приложена сила  $\vec{F}$ , создающая вращающий момент  $\vec{M}$  (рис. 1.41).

Разложим силу  $\vec{F}$  на две составляющие:  $\vec{F}_{||}$  (параллельна оси  $OO'$ ) и  $\vec{F}_{\perp}$  (перпендикулярна оси  $OO'$ ).

Составляющая силы  $\vec{F}_{||}$  вращательного момента не создает. Она стремится деформировать тело вдоль оси вращения.

Вращательный момент создает только составляющая силы  $\vec{F}_{\perp}$ . Поэтому в данном случае момент силы относительно оси вращения определяется следующим соотношением:

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}_{\perp}]. \quad (1.113)$$

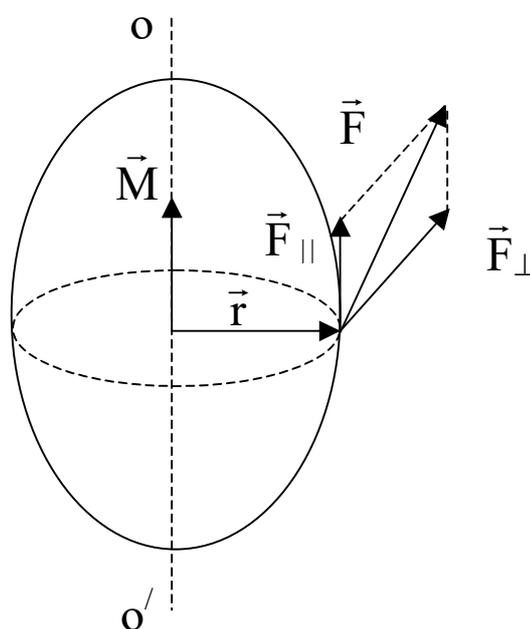


Рис. 1.41

Момент силы относительно оси вращения равен векторному произведению радиус-вектора  $\vec{r}$ , проведенного от оси вращения в точку

приложения силы и лежащего в плоскости, перпендикулярной этой оси, на составляющую силы  $\vec{F}_\perp$ , лежащую в той же плоскости.

Момент силы всегда направлен вдоль оси вращения тела.

### 1.4.3. Момент инерции тела относительно оси вращения

*Момент инерции тела  $I$  – скалярная физическая величина, характеризующая инертность тел при вращательном движении.*

Момент инерции является аналогом массы тела при поступательном движении.

Пусть ось вращения проходит через тело. Разобьем это тело на бесконечно малые объемы массой  $dm$  (рис. 1.42). Фактически эти объемы представляют собой материальные точки.

Момент инерции элемента объема тела с массой  $dm$  относительно оси  $OO'$  равен:

$$dI = r^2 \cdot dm. \quad (1.114)$$

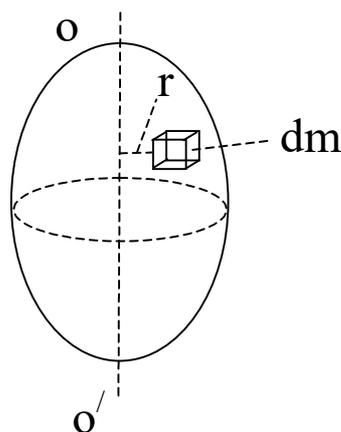


рис. 1.42

Момент инерции всего тела относительно оси

$$I = \int r^2 dm. \quad (1.115)$$

по всему телу

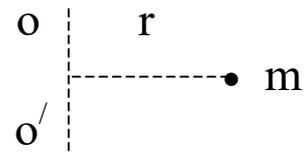
Из формул (1.114) и (1.115) следует, что *момент инерции тела определяется распределением массы тела относительно оси вращения.*

*По этой причине момент инерции зависит не только от массы тела, но и от его формы, а также положения тела относительно оси.*

В качестве примеров на рис. 1.43 приведены значения момента инерции для тел различной формы.

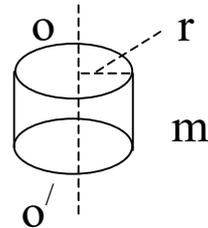
- Материальная точка

$$I = mr^2$$



- Однородный диск  
(цилиндр)

$$I = \frac{mr^2}{2}$$



- Однородный шар

$$I = \frac{2mr^2}{5}$$

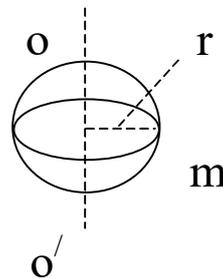


Рис. 1.43

### 1.4.3.1. Центр инерции тела. Теорема Штейнера

Центр инерции тела (или центр масс) обладает следующим важным свойством: *центр инерции движется точно так же, как двигалась бы материальная точка с массой равной массе тела, если бы к этой материальной точке были приложены все те же внешние силы, что и к телу.*

Для абсолютно твердого тела центр инерции совпадает с центром тяжести.

Теорема Штейнера позволяет рассчитать момент инерции тела относительно произвольной оси вращения: *момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции этого тела относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр инерции тела, и произведению массы тела на квадрат расстояния между осями:*

$$I = I_{\text{ц.и.}} + ma^2. \quad (1.116)$$

Рисунок 1.44 иллюстрирует применение теоремы Штейнера для случая нахождения момента инерции тела с массой  $m$  относительно произвольной оси  $OO'$ .

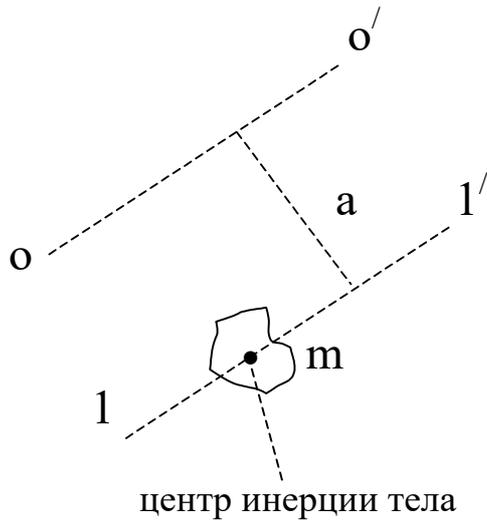


Рис. 1.44

#### 1.4.4. Момент импульса тела относительно оси вращения

Рассмотрим материальную точку массой  $m$ , имеющую импульс  $\vec{p}$ , которая совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси (рис. 1.45).

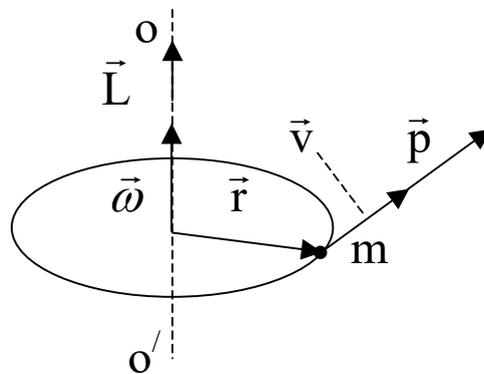


Рис. 1.45

Момент импульса материальной точки  $\vec{L}$  – векторная физическая величина, откладываемая на оси вращения и определяемая следующим векторным произведением:

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]. \quad (1.117)$$

Так как  $\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]$ ,

то

$$\vec{L} = m[\vec{r} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]] \Rightarrow \vec{L} = m\{\vec{\omega}(\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega})\} = mr^2 \vec{\omega}. \quad (1.118)$$

Согласно рис. 1.43,  $mr^2$  определяет момент инерции материальной точки  $I$ . Поэтому момент импульса материальной точки относительно оси вращения может быть определен соотношением:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}. \quad (1.119)$$

Формула (1.119) применима не только для материальной точки, но и для нахождения момента импульса тела, если под  $I$  понимать момент инерции тела относительно оси вращения (рис. 1.46).

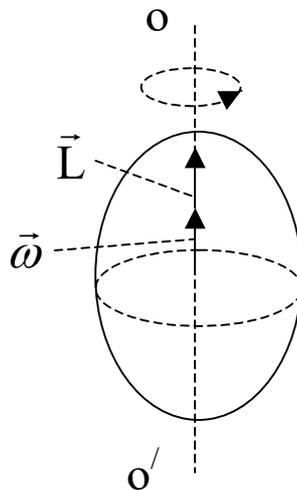


Рис. 1.46

1.4.5. Аналогия между характеристиками поступательного и вращательного движения тела

Между характеристиками поступательного и вращательного движения существует прямая аналогия, которая отражена в табл. 1.2.

Эта аналогия позволяет получать формулы для вращательного движения тела, используя соответствующие формулы для его поступательного движения.

Аналогия между характеристиками поступательного и вращательного движения тела

Поступательное движение	→	Вращательное движение
$m$		$I$
$\Delta \vec{r}$		$\Delta \vec{\varphi}$
$\vec{v}$		$\vec{\omega}$
$\vec{a}$		$\vec{\varepsilon}$
$\vec{p} = m\vec{v}$		$\vec{L} = I\vec{\omega}$
$\vec{F} = m\vec{a}$		$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$

## 1.4.6. Основной закон динамики вращательного движения тела

Этот закон является аналогом второго закона динамики для поступательного движения. Получим различные выражения этого закона, используя соответствующие формулы для второго закона динамики и данные табл. 1.2.

Согласно (1.36),

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{M} = I\vec{\varepsilon}. \quad (1.120)$$

*Результирующий момент сил, действующих на тело относительно данной оси вращения, равен произведению момента инерции тела на его угловое ускорение, взятых относительно этой же оси.*

На основании формулы (1.40)

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \quad (1.121)$$

*Результирующий момент сил, действующих на тело относительно данной оси вращения, равен скорости изменения момента импульса тела относительно этой же оси.*

В соответствии с выражением (1.43)

$$\Delta \vec{p} = \vec{F}\Delta t \Rightarrow \Delta \vec{L} = \vec{M}\Delta t. \quad (1.122)$$

*Изменение момента импульса тела относительно данной оси вращения за время  $\Delta t$  равно импульсу момента сил, действующих на тело относительно этой оси за тот же промежуток времени.*

#### 1.4.7. Закон сохранения момента импульса

Для изолированной системы выполняется закон сохранения момента импульса: *резльтирующий момент импульса изолированной системы тел с течением времени не изменяется*, т.е. если

$$\sum_i \vec{M}_i^{\text{внешн}} = 0, \text{ то } \sum_i \vec{L}_i = \text{const.} \quad (1.123)$$

Докажем этот закон сохранения для частного случая, когда система состоит всего из одного тела.

Пусть тело совершает вращательное движение вокруг некоторой оси. Если система изолирована, то результирующий момент сил, действующих на это тело, равен нулю. Тогда из (1.121) следует что

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const.}$$

#### 1.4.8. Энергия тела при вращательном движении

*Кинетическая энергия, которой обладает тело при вращательном движении, называется энергией вращательного движения этого тела*  $W_{\text{к}}^{\text{вр}}$ .

Пусть тело совершает вращательное движение (рис. 1.47). Разобьем это тело на бесконечно малые объемы с массой  $dm$ .

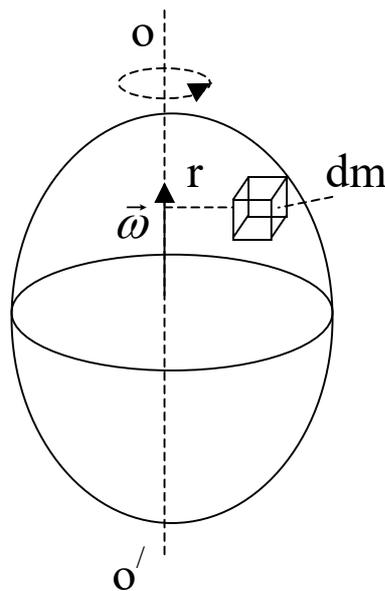


Рис. 1.47

Кинетическая энергия такого элемента тела равна:

$$dW_K = \frac{v^2 dm}{2}. \quad (1.124)$$

Так как  $v = \omega r$ , то, интегрируя по всему телу, получим:

$$W_K^{вр} = \int_{\text{по всему телу}} dW_K = \frac{\omega^2}{2} \int_{\text{по всему телу}} r^2 dm. \quad (1.125)$$

Последний интеграл в формуле (1.125) определяет момент инерции тела  $I$  (формула (1.115)). Поэтому энергия тела при вращательном движении

$$W_K^{вр} = \frac{I\omega^2}{2}. \quad (1.126)$$

К формуле (1.126) приводит и использование аналогии между характеристиками поступательного и вращательного движения тела (табл. 1.2).

Тело одновременно может участвовать как в поступательном, так и во вращательном движении. В этом случае кинетическая энергия тела определяется следующей суммой энергий:

$$W_K = W_K^{пост} + W_K^{вр}. \quad (1.127)$$

#### 1.4.9. Работа при вращательном движении

Выражение для работы при вращательном движении получим из аналогии между характеристиками поступательного и вращательного движения тела.

В соответствии с соотношениями (1.90) и (1.91) работа при поступательном движении тела

$$A_{12}^{пост} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \Delta W_K^{пост} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \quad (1.128)$$

Поэтому работа при вращательном движении

$$A_{12}^{\text{вп}} = \int_1^2 \vec{M} d\vec{\varphi} = \Delta W_{\text{к}}^{\text{вп}} = \frac{I\omega_2^2}{2} - \frac{I\omega_1^2}{2}. \quad (1.129)$$

*Работа, совершаемая при вращательном движении тела, равна изменению кинетической энергии вращательного движения этого тела.*

## **1.5. Классические и современные представления о свойствах пространства и времени**

### 1.5.1. Механический принцип относительности Галилея

Этот принцип позволяет ответить на следующие вопросы.

- Одинаково ли выглядят законы механики в разных инерциальных системах отсчета?
- Равноправны ли в механическом отношении все инерциальные системы отсчета?
- Можно ли с помощью каких-либо механических опытов, проводимых внутри инерциальной системы отсчета, установить, покоится эта система отсчета или движется равномерно и прямолинейно?

Чтобы ответить на поставленные вопросы, необходимо установить, изменяется ли вид законов динамики при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Для этого предварительно необходимо установить законы преобразования координат и времени при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

#### 1.5.1.1. Преобразования Галилея

*Законы преобразования координат и времени при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, в основе которых лежат классические представления о свойствах пространства и времени, называются преобразованиями Галилея.*

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета  $K$  и  $K'$  (рис. 1.48). Систему отсчета  $K$  (лабораторная система) условно будем считать неподвижной. Система  $K'$  движется относительно лабораторной системы вдоль оси  $X$  прямолинейно и равномерно со скоростью  $\vec{V} = \text{const}$ .

Обе системы снабжены синхронизированными часами.

Классическая механика постулирует, что время абсолютно. Поэтому, если двое одинаковых часов были однажды синхронизированы, то их

показания всегда будут одинаковы независимо от того, покоятся эти часы или движутся относительно друг друга с некоторой скоростью  $\vec{V}$ .

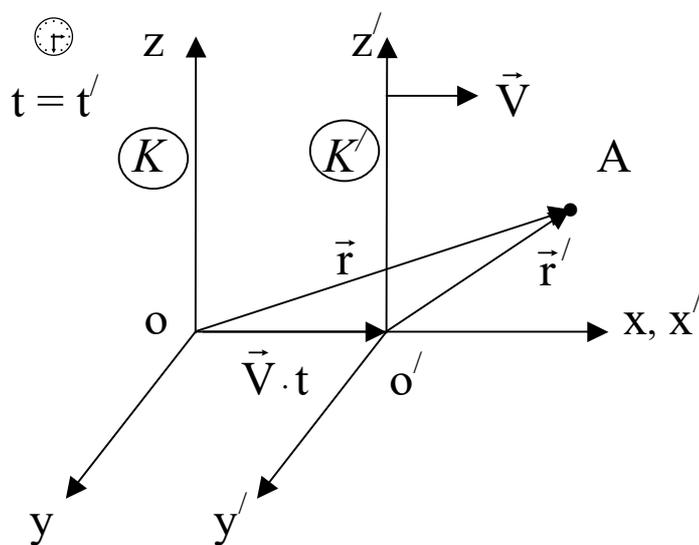


Рис. 1.48

Таким образом, в рассматриваемых системах с точки зрения классической физики время течет одинаково. Поэтому

$$t = t'. \quad (1.130)$$

Установим связь между координатами, задающими положение одной и той же материальной точки A, в системах K и K'. Положение точки в декартовой системе координат удобно задать с помощью радиус-вектора.

Пусть в начальный момент времени начало координат рассматриваемых инерциальных систем отсчета совпадали. За время t перемещение системы K' относительно системы K составит  $\vec{V} \cdot t$  (рис. 1.48).

Согласно правилам действия с векторами из рис. 1.48 следует:

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r} - \vec{V} \cdot t, \\ \vec{r} &= \vec{r}' + \vec{V} \cdot t'. \end{aligned} \quad (1.131)$$

Таким образом, выражения (1.130) и (1.131) позволяют, зная координаты и время материальной точки в одной инерциальной системе отсчета, найти координаты материальной точки в другой системе, движущейся относительно первой равномерно и прямолинейно.

Переход от системы  $K$  к системе  $K'$  осуществляется посредством соотношений:

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{V} \cdot t, \\ t' = t. \end{cases} \quad (1.132)$$

Аналогично, для перехода от системы  $K'$  к системе  $K$  необходимо воспользоваться такими выражениями:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{V} \cdot t', \\ t = t'. \end{cases} \quad (1.133)$$

Соотношения (1.132) и (1.133) и есть преобразования Галилея.

Если спроектировать все векторы в выражениях (1.132) и (1.133) на оси координат, то преобразования Галилея можно записать следующим образом:

- переход от  $K$  к  $K'$

$$\begin{cases} x' = x - V \cdot t, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = t; \end{cases} \quad (1.134)$$

- переход от  $K'$  к  $K$

$$\begin{cases} x = x' + V \cdot t', \\ y = y', \\ z = z', \\ t = t'. \end{cases} \quad (1.135)$$

### 1.5.1.2. Закон сложения скоростей в классической механике

Преобразования Галилея позволяют получить закон сложения скоростей в классической механике. Для этого необходимо выражения (1.131) продифференцировать по времени и учесть, что  $dt = dt'$ :

$$\frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{V},$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt'} + \vec{V}.$$
(1.136)

Так как  $\frac{d\vec{r}'}{dt'} = \vec{v}'$  – скорость материальной точки в системе  $K'$ , а  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$  – скорость материальной точки в системе  $K$ , то закон сложения скоростей в классической механике имеет следующий вид:

- переход от  $K$  к  $K'$   $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V},$  (1.137)

- переход от  $K'$  к  $K$   $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}.$  (1.138)

Как следует из формул (1.137) и (1.138), в классической физике нет никаких ограничений на величину скорости движения тел. Эта скорость может быть любой, даже бесконечно большой.

Из закона сложения скоростей вытекает, что

$$\vec{a} = \vec{a}',$$
(1.139)

т.е. ускорение абсолютно и не зависит от скорости движения инерциальных систем отсчета.

### 1.5.1.3. Законы динамики при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой

Проверим, изменяется ли вид законов динамики при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Выполним это на примере второго закона динамики (см. табл. 1.3).

Таблица 1.3

Система $K$	Система $K'$
$\vec{F} = m\vec{a}$ $m$ $\vec{a}$ $\vec{F}$	$m' = m$ $\vec{a}' = \vec{a}$ $\vec{F}' = \vec{F}$
	$\left. \begin{array}{l} m' = m \\ \vec{a}' = \vec{a} \\ \vec{F}' = \vec{F} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{F}' = m' \vec{a}'$

Одним из постулатов классической физики является независимость массы тела от скорости его движения, поэтому  $m = m'$ .

Выше было показано, что  $\vec{a} = \vec{a}'$ . Сила, действующая между телами, зависит от их взаимного положения, относительной скорости и времени. Все эти характеристики не изменяются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Поэтому  $\vec{F}' = \vec{F}$ .

Согласно этим замечаниям, обобщенным в табл. 1.3., вид второго закона динамики не изменяется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Этот вывод относится и к другим законам динамики.

Выполненный анализ позволяет сформулировать механический принцип относительности Галилея в следующем виде:

- все законы механики имеют одинаковый вид в разных инерциальных системах отсчета;
- все инерциальные системы отсчета равноправны в механическом отношении;
- с помощью любых механических опытов, проводимых внутри инерциальной системы отсчета, нельзя установить, покоится эта система отсчета или движется равномерно и прямолинейно.

Механический принцип относительности и преобразования Галилея лежали в основе физики вплоть до создания теории относительности.

### 1.5.2. Элементы специальной теории относительности

Теория относительности – современная теория о свойствах пространства и времени.

Эта теория была разработана А. Эйнштейном в период с 1905 г. по 1916 г.

Специальная теория относительности (СТО) рассматривает свойства пространства и времени только в инерциальных системах отсчета, в отличие от общей теории относительности (ОТО), которая изучает эти свойства и в неинерциальных системах отсчета.

Критический пересмотр установившихся классических понятий о свойствах пространства и времени на основе глубокого анализа экспериментальных и теоретических исследований, имевшихся к началу XX века, привели Эйнштейна к созданию принципиально новой теории пространства и времени. Работы Эйнштейна знаменовали рождение релятивистской (неклассической) физики).

В основе СТО лежат два постулата, которые носят название принципа относительности Эйнштейна и принципа постоянства скорости света:

- принцип относительности Эйнштейна: *все законы природы не изменяются при переходе от одной инерциальной системы*

*отсчета к другой, т.е. все инерциальные системы отсчета равноправны;*

- принцип постоянства скорости света: *скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчета и не зависит от того, движется или покоится источник света.*

Принцип относительности Эйнштейна является распространением механического принципа относительности Галилея на все без исключения физические явления.

Принцип постоянства скорости света вытекает из большого числа экспериментальных результатов, полученных при определении скорости света в различных условиях.

Скорость света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. Эта скорость является предельной скоростью распространения любых взаимодействий.

С точки зрения теории относительности не существует взаимодействий, которые могли бы распространяться с бесконечно большой скоростью, как это было принято считать в классической механике.

Со скоростью света передаются все известные фундаментальные взаимодействия. Этим самым теория относительности отвергает принцип дальнего действия, существовавший в классической физике (см. раздел 1.3.1.).

Все выводы СТО вытекают из двух ее постулатов. В настоящее время оба постулата Эйнштейна, как и все следствия из них, подтверждаются всей совокупностью накопленного экспериментального материала.

#### 1.5.2.1. Преобразования Лоренца

*Преобразования координат и времени при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, в основе которых лежат постулаты СТО, называются преобразованиями Лоренца.*

Из физического смысла следует, что преобразования Лоренца должны быть однозначными и линейными относительно координат и времени. Такими же свойствами обладают преобразования Галилея (см. выражения (1.134) и (1.135)). Поэтому преобразования Лоренца должны отличаться от преобразований Галилея только некоторыми коэффициентами, не зависящими от координат и времени.

Эти преобразования были впервые получены Х.А. Лоренцем в 1904 г. в предположении неизменности вида основных уравнений электромагнитной теории Д. Максвелла при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Затем эти преобразования были также получены Эйнштейном как следствие постулатов СТО.

Преобразования Лоренца имеют следующий вид:

- переход от  $K'$  к  $K$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x' + V \cdot t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \frac{t' + x' \cdot \frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \end{array} \right. \quad (1.140)$$

- переход от  $K$  к  $K'$

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - V \cdot t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \frac{t - x \cdot \frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \end{array} \right. \quad (1.141)$$

Из соотношений (1.140) и (1.141) можно сделать следующие выводы:

- при  $V \ll c$  преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея (т.е. преобразования Галилея являются частным случаем преобразований Лоренца);
- понятие времени относительно (в разных инерциальных системах отсчета время протекает по-разному);
- пространственные и временные координаты взаимосвязаны (пространство, время и материя образуют единое целое).

Скорости, соизмеримые со скоростью света, а также формулы и соотношения, в которых величина  $V^2/c^2$  играет существенную роль, называются релятивистскими.

При движениях со скоростями  $V \approx c$  возникает ряд явлений, не имеющих аналогов в классической механике.

### 1.5.2.1.1. Следствия из преобразований Лоренца

#### 1.5.2.1.1.1. Релятивистский закон сложения скоростей

Для нахождения закона сложения скоростей при переходе от инерциальной системы  $K'$  к инерциальной системе  $K$  воспользуемся соответствующими преобразованиями Лоренца.

Если продифференцировать соотношения (1.140), то получим:

$$dx = \frac{dx' + V \cdot dt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (1.142)$$

$$dt = \frac{dt' + dx' \cdot \frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (1.143)$$

Разделив  $dx$  на  $dt$ , имеем:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + V \cdot dt'}{dt' + dx' \cdot \frac{V}{c^2}} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + V}{1 + \frac{dx'}{dt'} \cdot \frac{V}{c^2}}. \quad (1.144)$$

Учитывая, что  $dx/dt = v$  – скорость движения тела в системе  $K$ , а  $dx'/dt' = v'$  – скорость тела в системе  $K'$ , получим искомый закон сложения скоростей:

$$v = \frac{v' + V}{1 + v' \frac{V}{c^2}} . \quad (1.145)$$

Чтобы определить закон сложения скоростей при переходе от системы  $K$  к системе  $K'$ , необходимо воспользоваться преобразованиями Лоренца в виде (1.141) и проделать аналогичные вычисления:

$$v' = \frac{v - V}{1 - v \frac{V}{c^2}} . \quad (1.146)$$

Если скорость движения тела  $V$  или ( $v'$ ) много меньше  $c$ , то выражения (1.145) и (1.146) переходят в классические законы сложения скоростей (1.137) и (1.138), вытекающие из преобразований Галилея.

Следствием формул (1.145) и (1.146) является то, что скорость движения тел не может быть больше скорости света в вакууме. Покажем это.

Пусть в инерциальной системе отсчета  $K'$  тело движется со скоростью  $v' = c$ . Из (1.145) следует, что скорость тела в инерциальной системе  $K$ , условно принятой за неподвижную, будет равна:

$$v = \frac{c + V}{1 + c \frac{V}{c^2}} = c \frac{c + V}{c + V} = c . \quad (1.147)$$

Этот пример иллюстрирует также, что во всех инерциальных системах отсчета скорость света в вакууме постоянна и не зависит от скорости движения источника света.

#### 1.5.2.1.1.2. Относительность понятия одновременности событий

С точки зрения СТО события, одновременные в одной инерциальной системе отсчета, не будут одновременными в другой инерциальной системе отсчета. Убедиться в этом можно, рассматривая мысленный эксперимент с вагоном (или ракетой) Эйнштейна (рис. 1.49).

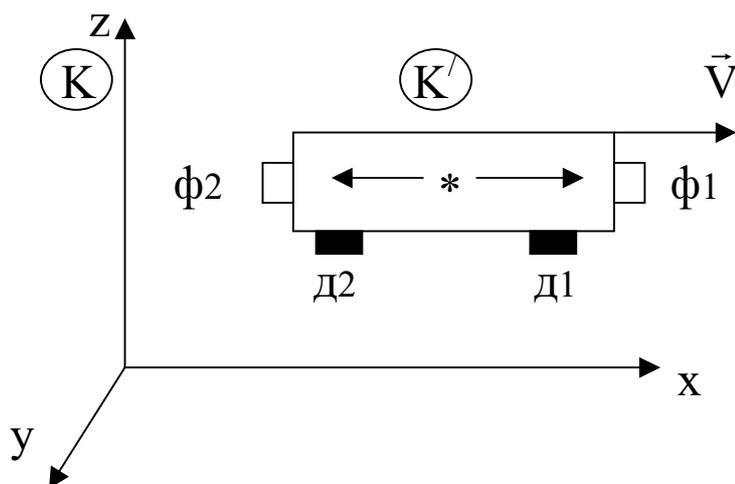


Рис. 1.49

Пусть имеется вагон (система  $K'$ ), движущийся относительно системы  $K$  вдоль оси  $X$  с постоянной скоростью  $\vec{V}$ . Точно посередине вагона находится источник света. В вагоне есть две двери  $D1$  и  $D2$ , а в торцах вагона – фотоприемники  $\phi1$  и  $\phi2$ . По сигналу с фотоприемника открывается соответствующая дверь.

В некоторый момент времени включают источник света. Так как оба фотоприемника одинаково удалены от источника света, а скорость света во всех направлениях одинакова, то световые волны достигнут фотоприемников  $\phi1$  и  $\phi2$  в один и тот же момент времени. Поэтому наблюдатель, находящийся в вагоне (система  $K'$ ), установит, что обе двери откроются одновременно.

В системе  $K$  наблюдатель установит следующее. Скорость света не зависит от скорости движения источника света, однако фотоприемник  $\phi2$  приближается к источнику света, а фотоприемник  $\phi1$  удаляется от него. Поэтому сначала откроется дверь  $D2$ , а только затем – дверь  $D1$ .

Таким образом, утверждая, что события одновременны или не одновременны, необходимо указывать соответствующую систему отсчета.

1.5.2.1.1.3. Изменение размеров движущихся тел (Лоренцево сокращение)

Пусть в лабораторной системе отсчета  $K$  вдоль оси  $X$  расположен стержень длиной  $l_0 = x_2 - x_1$  (рис. 1.50). Необходимо определить его длину  $l' = x_2' - x_1'$  в системе  $K'$ , движущейся относительно системы  $K$  вдоль оси  $X$  равномерно и прямолинейно со скоростью  $\vec{V}$ .

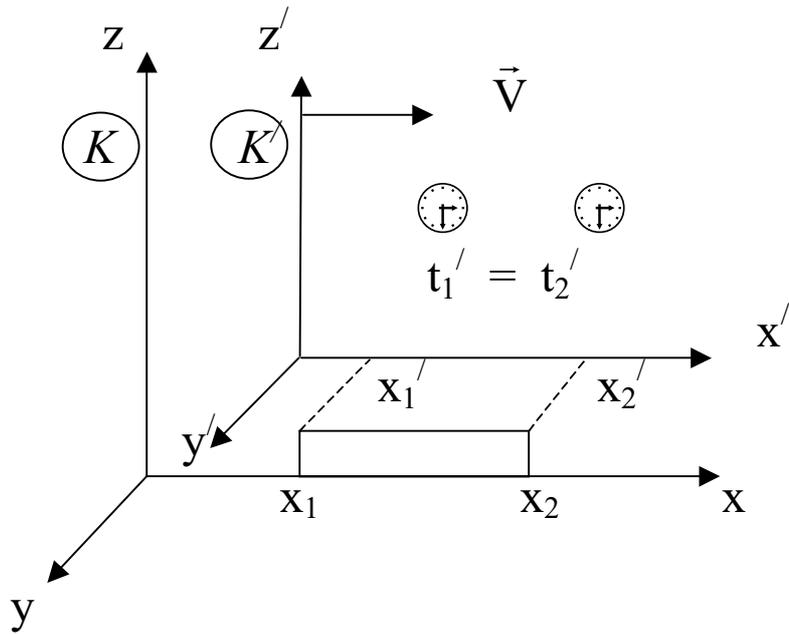


Рис. 1.50

Размеры стержня  $l_0$  в системе отсчета, относительно которой он покоится, называются собственными размерами тела. Измерения координат  $x_1$  и  $x_2$  в этой системе могут быть произведены в различные моменты времени.

Для того чтобы измерить длину стержня  $l'$  в системе отсчета, относительно которой тело движется (координатные размеры), необходимо координаты этого стержня  $x_1'$  и  $x_2'$  определять в один и тот же момент времени  $t_1' = t_2'$ . Для этих целей в системе отсчета  $K'$  должны быть двое синхронизированных часов (см. рис. 1.50).

Используя преобразования Лоренца (1.140), имеем:

$$l_0 = x_2 - x_1 = \frac{x_2' + V t_2' - x_1' - V t_1'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{x_2' - x_1'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

откуда

$$l' = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (1.148)$$

Из этого соотношения следует, что длина стержня в системе отсчета  $K'$  меньше, чем в системе  $K$ , т.е.  $l' < l_0$ . Причем с увеличением скорости  $V$  это различие возрастает.

Следует отметить, что эффект сокращения размеров движущихся тел является чисто кинематическим эффектом и никакими напряжениями внутри тела не сопровождается.

#### 1.5.2.1.1.4. Замедление времени

Рассмотрим два события.

- В системе отсчета  $K$

Первое событие происходит в точке с координатой  $X_1$  в момент времени  $t_1$ .

Второе событие происходит в точке с координатой  $X_2 = X_1$ , в момент времени  $t_2$ .

Так как  $X_2 = X_1$ , то в этой системе отсчета события одноместны.

Между событиями прошел промежуток времени  $\Delta t_0 = t_2 - t_1$ .

- В системе отсчета  $K'$

Первое событие происходит в точке с координатой  $X'_1$  в момент времени  $t'_1$ .

Второе событие происходит в точке с координатой  $X'_2$  в момент времени  $t'_2$ .

Между событиями прошел промежуток времени  $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ .

Используя преобразования Лоренца (1.141), получим:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - X_2 \frac{V^2}{c^2} - t_1 + X_1 \frac{V^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

откуда

$$\Delta t' = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (1.149)$$

Из формулы (1.149) следует, что  $\Delta t' > \Delta t_0$ , т.е. в системе отсчета  $K'$  между событиями прошел больший промежуток времени, чем в системе  $K$ . По этой причине *движущиеся часы идут “медленнее” неподвижных.*

*Наименьший промежуток времени между событиями будет в той системе отсчета, где эти события одноместны.*

#### 1.5.2.2. Динамика СТО

Если применить преобразования Лоренца ко второму закону динамики  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ , то вид этого закона изменяется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. То есть второй закон динамики в указанной форме не инвариантен по отношению к преобразованиям Лоренца.

Можно показать, что в СТО вид второго закона динамики не будет изменяться при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, если его записать в следующей форме:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}_{\text{рел}}}{dt}, \quad (1.150)$$

где  $\vec{p}_{\text{рел}}$  – релятивистский импульс:

$$\vec{p}_{\text{рел}} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (1.151)$$

На рис. 1.51 приведена зависимость величины релятивистского импульса тела от его скорости.

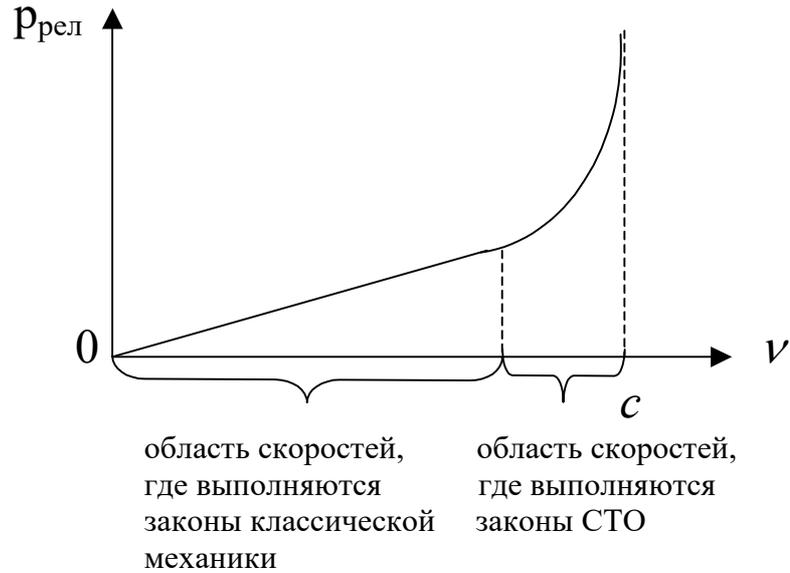


Рис. 1.51

При скоростях тела, соответствующих линейному участку зависимости  $p_{\text{рел}}(v)$ , справедливы законы классической механики. Если  $v \rightarrow c$ , то  $p_{\text{рел}} \rightarrow \infty$ . Поэтому при скоростях, соответствующих нелинейному участку этой зависимости, необходимо использовать только законы СТО и, в частности, второй закон динамики в форме (1.150).

Выражение (1.151) можно представить в виде:

$$\vec{p}_{\text{рел}} = m_{\text{рел}} \vec{v}, \quad (1.152)$$

где

$$m_{\text{рел}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.153)$$

называется релятивистской массой тела, а  $m_0$  — массой покоя.

На рис. 1.52 приведена зависимость релятивистской массы тела от его скорости.

Если  $v \ll c$ , то  $m_{\text{рел}} = m_0$ . В этом случае релятивистская масса равна массе тела в классической механике. Однако при  $v \rightarrow c$  масса тела  $m_{\text{рел}} \rightarrow \infty$ .

По этой причине со скоростью света в вакууме могут перемещаться только тела, имеющие нулевую массу покоя. Такими телами, например, являются фотоны.

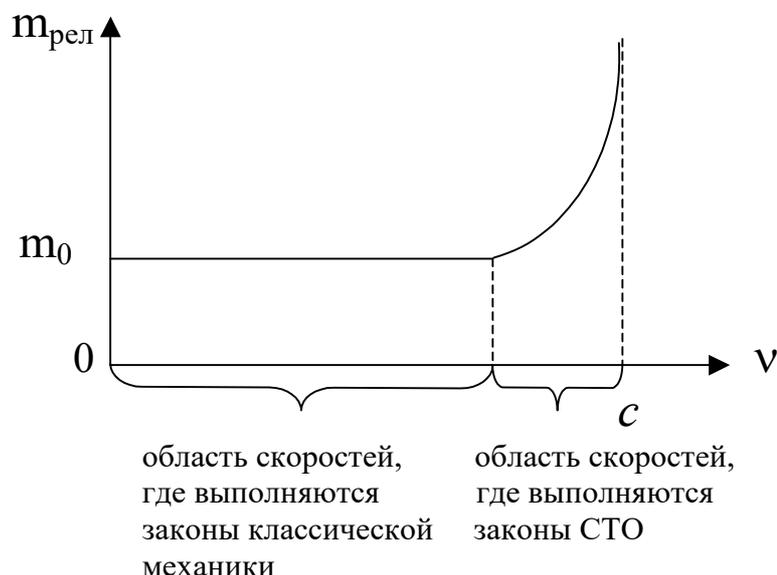


Рис. 1.52

### 1.5.2.3. Энергия тела в СТО. Закон взаимосвязи массы и энергии

Полная энергия тела  $W$  в СТО определяется следующим выражением:

$$W = W_0 + W_k; \quad (1.154)$$

$$W = m_{\text{рел}}c^2, \quad (1.155)$$

где  $W_k$  – кинетическая энергия тела, а  $W_0 = m_0c^2$  – энергия покоя.

В полную энергию тела и его энергию покоя входят все виды энергии за исключением потенциальной энергии тела как целого.

Формулы (1.151) и (1.155) позволяют получить взаимосвязь между полной энергией тела и его релятивистским импульсом:

$$W = \sqrt{m_0^2c^2 + p_{\text{рел}}^2}c^2. \quad (1.156)$$

Из формулы (1.155) вытекает закон взаимосвязи массы тела и его полной энергии:

$$\Delta W = \Delta m_{\text{рел}} c^2. \quad (1.157)$$

*Любое изменение полной энергии тела сопровождается изменением его релятивистской массы. Верно и обратное утверждение, что любое изменение релятивистской массы сопровождается изменением полной энергии тела.*

В классической механике существует как закон сохранения массы, так и закон сохранения энергии. В СТО для массы и энергии существует единый закон сохранения: *в изолированной системе полная энергия тела (релятивистская масса) с течением времени не изменяется.*

Таким образом, *масса тела является не только мерой его инертности и гравитационного взаимодействия, но и мерой полной энергии тела.*

1.5.3. Связь законов сохранения в механике со свойствами пространства и времени

В механике для изолированных (замкнутых) систем справедливы законы сохранения импульса (1.45) и момента импульса (1.23).

Если изолированная система одновременно является и консервативной системой, то будет также выполняться и закон сохранения полной механической энергии (1.99).

Указанные законы сохранения являются точными законами.

Почему так важно знать законы сохранения? Это обусловлено следующим:

- законы сохранения не зависят от вида траектории движения системы и характера действующих на нее сил;
- с помощью законов сохранения можно получить важные выводы о поведении системы даже тогда, когда неизвестны силы;
- законы сохранения остаются справедливыми в тех случаях, когда нарушаются законы динамики Ньютона;
- в ряде случаев их применение позволяет предотвратить попытки создания каких-либо устройств, работа которых связана с нарушением этих законов (не стоит, например, тратить время на разработку конструкций вечного двигателя, представляющего собой какую-нибудь замкнутую систему, состоящую из механических и электрических компонентов или проектировать устройство, приводимое в движение только внутренними силами).

Что является причиной существования законов сохранения и сколько их может быть?

Очень важную роль в физике играет симметрия – независимость физических явлений от определенных пространственно-временных или других преобразований. Существует фундаментальная теорема, доказанная

в 1918 г. немецким ученым-математиком Э. Нетер, устанавливающая связь между свойствами симметрии физической системы и законами сохранения.

В упрощенной формулировке теорема Нетер утверждает, что наличие данного закона сохранения в механике однозначно связано с определенным видом симметрии пространства и времени.

Наше пространство и время обладают следующими тремя видами симметрии: однородность времени, однородность пространства, изотропность пространства. Поэтому в механике возможны только три закона сохранения. Можно показать, что из независимости законов движения системы от выбора начала отсчета времени (однородности времени) следует закон сохранения энергии, а из инвариантности законов движения системы относительно пространственных сдвигов (однородности пространства) вытекает закон сохранения импульса. Инвариантность законов движения системы относительно пространственных вращений (изотропности пространства) приводит к закону сохранения момента импульса.

Таким образом, наличие указанных выше законов сохранения в механике обусловлено свойствами нашего пространства и времени.

По этой причине изучение свойств пространства и времени является одной из важнейших научных задач.

## 2. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

### 2.1. Электростатика

Электростатика – раздел физики, изучающий взаимодействие неподвижных электрических зарядов и свойства постоянных электрических полей.

Если в электростатике рассматривается перемещение электрических зарядов, то считается, что это перемещение происходит с бесконечно малой скоростью, т.е. бесконечно медленно.

#### 2.1.1. Электрический заряд и его свойства

При некоторых условиях тела электризуются, т.е. приобретают электрический заряд.

Существуют электрические заряды двух типов: “положительные”(+) и “отрицательные”(–).

Из опытов известно, что одноименные заряды испытывают взаимное отталкивание, а разноименные – взаимное притяжение.

*Взаимодействие электрических зарядов осуществляется посредством электрического поля. Электрический заряд и поле этого заряда образуют единое целое.*

Существуют элементарный положительный и элементарный отрицательные электрические заряды, модули которых одинаковы:

$$|e^-| = |e^+| = 1,6 \cdot 10^{-18} \text{ Кл.} \quad (2.1)$$

Элементарным электрическим зарядом обладают заряженные элементарные частицы (электроны, протоны, позитроны и т.п.)

Величина любого электрического заряда  $Q$  всегда кратна элементарному заряду:

$$|q| = N \cdot |e|, \quad (2.2)$$

где  $N = 1, 2, 3, \dots$  целое число.

Формула (2.2) выражает собой закон квантования электрического заряда.

Величина электрического заряда не зависит от скорости его движения.

Электрические заряды могут рождаться и исчезать только парами. При этом всегда участвуют заряды противоположного знака и одинакового модуля. Например, при взаимодействии электрона  $e^-$  и позитрона  $e^+$  возникают два фотона, которые являются незаряженными частицами

( $e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma$ ). При взаимодействии фотона с ядром атома наблюдается реакция рождения этой пары электрических зарядов.

Этот опытный факт является следствием закона сохранения электрического заряда, согласно которому *резльтирующий электрический заряд изолированной системы с течением времени не изменяется*:

$$\sum_i q_i = \text{const.} \quad (2.3)$$

*Наэлектризованное тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстояниями до других зарядов, с которыми оно взаимодействует, называется точечным электрическим зарядом.*

### 2.1.2. Закон Кулона

Этот закон был установлен Ш. Кулоном экспериментально в 1785 г. и позволяет определить силу взаимодействия двух неподвижных точечных электрических зарядов (рис. 2.1).

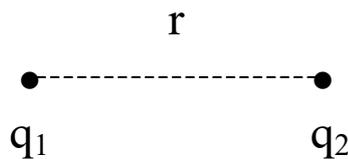


Рис. 2.1

Согласно закону Кулона *сила взаимодействия двух неподвижных точечных электрических зарядов прямо пропорциональна величинам этих зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена вдоль прямой, проходящей через эти заряды*:

$$F = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}, \quad (2.4)$$

где  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м, а  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость окружающей среды, показывающая во сколько раз сила взаимодействия зарядов в вакууме больше, чем в данной среде:

$$\epsilon = \frac{F_{\text{вак}}}{F_{\text{сред}}} \Rightarrow \epsilon \geq 1. \quad (2.5)$$

Определим положение заряда  $Q_2$  относительно заряда  $Q_1$  с помощью радиус-вектора  $\vec{r}_{12}$  (рис. 2.2).

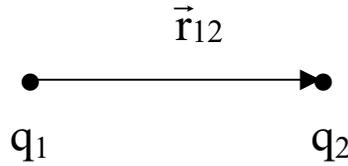


Рис. 2.2

Тогда закон Кулона можно записать и в векторной форме:

$$\vec{F}_{12} = -\frac{Q_1 Q_2 \vec{r}_{12}}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_{12}^2}, \quad \text{а} \quad \vec{F}_{21} = \frac{Q_1 Q_2 \vec{r}_{12}}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_{12}^2}. \quad (2.6)$$

Закон Кулона справедлив только в следующих трех случаях:

- когда оба электрических заряда являются точечными (рис. 2.1);
- когда один заряд точечный, а второй – заряженная сфера (рис. 2.3);

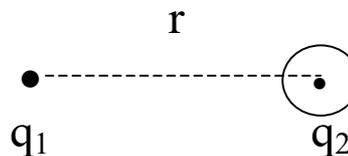


Рис. 2.3

- когда оба заряда – заряженные сферы (рис. 2.4).

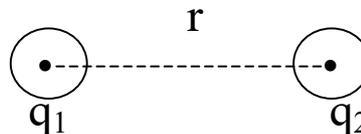


Рис. 2.4

В других случаях закон Кулона не справедлив.

### 2.1.3. Напряженность электростатического поля

Пусть положительный точечный электрический заряд  $+Q$  создает электростатическое поле.

Рассмотрим произвольную точку пространства  $A$ , положение которой относительно заряда  $Q$  определяется радиус-вектором  $\vec{r}$  (рис. 2.5).

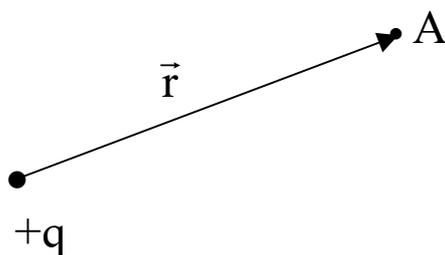


Рис. 2.5

Обнаружить наличие электростатического поля в этой точке можно по наличию силы, действующей на помещенный в эту точку пространства другой точечный заряд  $q'$ .

Будем помещать в точку  $A$  положительные заряды  $q'_1, q'_2, \dots, q'_n$  и определять по закону Кулона силы  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ , действующие на эти заряды в каждом случае.

Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что отношение силы, действующей на вносимый в точку  $A$  электрический заряд  $q'$ , к величине этого заряда не зависит от величины вносимого заряда:

$$\frac{\vec{F}_1}{q'_1} = \frac{\vec{F}_2}{q'_2} = \dots = \frac{\vec{F}_n}{q'_n} = \text{const}. \quad (2.7)$$

Поэтому указанное отношение определяет векторную физическую величину, являющуюся силовой характеристикой электростатического поля, которую называют напряженностью поля  $\vec{E}$  в данной точке:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'_+}. \quad (2.8)$$

Выражение (2.8) позволяет определить физический смысл напряженности: *напряженность электростатического поля в данной точке численно равна силе, действующей на единичный положительный точечный заряд, помещенный в эту точку поля.*

Из закона Кулона и соотношения (2.8) следует, что напряженность электростатического поля, создаваемого точечным электрическим зарядом в произвольной точке пространства, равна:

$$\vec{E} = \frac{q \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^3} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}, \quad (2.9)$$

На рис. 2.6 показано направление вектора напряженности в точке А для данного случая.

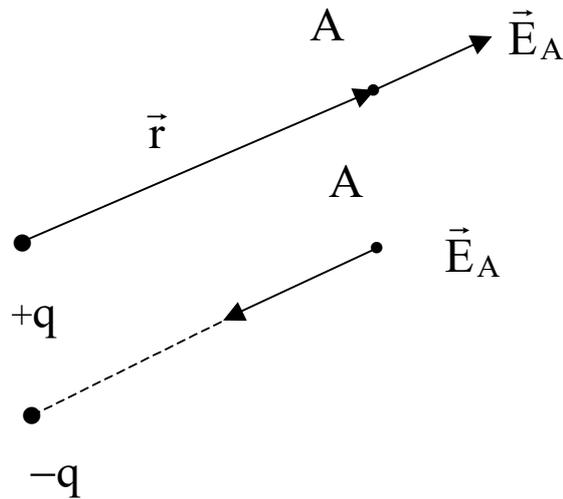


Рис. 2.6

Для напряженности электростатического поля выполняется принцип суперпозиции или принцип наложения полей: *каждый электрический заряд создает в данной точке пространства электрическое поле независимо от наличия других электрических зарядов.*

Математически принцип суперпозиции можно записать в следующем виде:

- дискретное распределение зарядов (рис. 2.7):

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i; \quad (2.10)$$

- непрерывное распределение зарядов:

$$\vec{E} = \int_{\text{по всем зарядам}} d\vec{E} \quad (2.11)$$

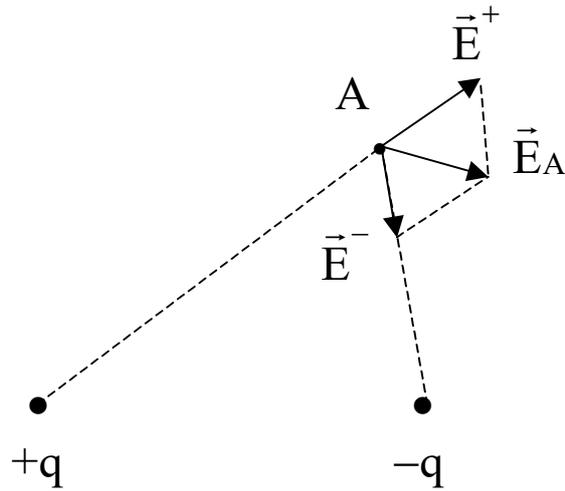


Рис. 2.7

Электростатическое поле можно описывать аналитически, задавая зависимость  $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ , или графически с помощью линий вектора напряженности.

Линии вектора напряженности проводятся так, чтобы касательные к этим линиям совпадали по направлению с направлением вектора напряженности электростатического поля в соответствующей точке (рис. 2.8).

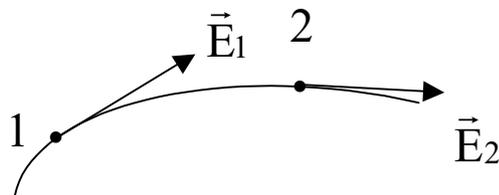


Рис. 2.8

Линии вектора  $\vec{E}$  обладают следующими свойствами:

- они никогда не пересекаются, что является следствием однозначности напряженности электрического поля в данной точке пространства;
- линии начинаются на положительных зарядах (или в бесконечности), а заканчиваются на отрицательных зарядах (или в бесконечности) (рис. 2.9);

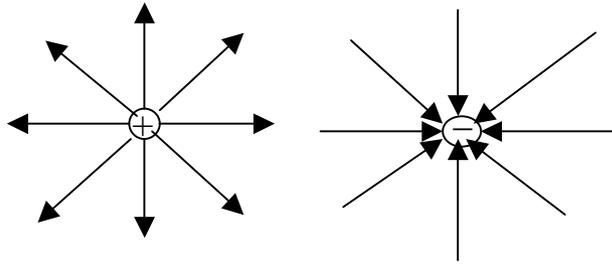


Рис. 2.9

- линии проводятся таким образом, чтобы их число, пронизывающее единичную площадку, расположенную в данной точке пространства перпендикулярно направлению электрического поля, было равно модулю вектора  $\vec{E}$  в этой точке.

#### 2.1.4. Индукция электростатического поля

Кроме вектора напряженности для электростатического поля, рассматривается также и вектор индукции электростатического поля  $\vec{D}$ .

В случае однородной изотропной диэлектрической среды между этими векторами существует следующая взаимосвязь:

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}. \quad (2.12)$$

Для вектора  $\vec{D}$  также можно ввести понятие линий вектора индукции электростатического поля.

Свойства линий векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  во многом аналогичны. Исключение составляет то, что на границах раздела сред линии вектора  $\vec{E}$  терпят разрыв, а линии вектора  $\vec{D}$  – излом.

#### 2.1.5. Поток вектора напряженности и вектора индукции электростатического поля

Пусть имеется произвольная поверхность  $S$ , которую пронизывают линии вектора  $\vec{E}$  (рис. 2.10).

Рассмотрим бесконечно малую часть поверхности  $dS$  и введем единичный вектор нормали  $\vec{n}$  к этому элементу поверхности.

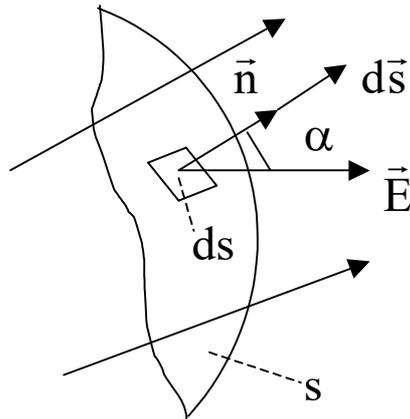


Рис. 2.10

Введем вектор  $d\vec{s} = \vec{n}ds$ , модуль которого  $|d\vec{s}| = ds$ .

Поток вектора напряженности электростатического поля через элементарную площадку  $ds$  определяется скалярным произведением:

$$d\phi_E = \vec{E}d\vec{s} \Rightarrow d\phi_E = Eds\cos\alpha. \quad (2.13)$$

Из выражения (2.13) следует:

- поток – величина алгебраическая, т.е. имеющая знак:  
если  $\angle\alpha$  – острый, то  $d\phi_E > 0$ , а если  $\angle\alpha$  – тупой, то  $d\phi_E < 0$ ;
- если  $\angle\alpha = \pi/2$ , то  $d\phi_E = 0$ .

Результирующий поток вектора напряженности электростатического поля через всю поверхность  $S$  равен:

$$\phi_E = \int_S d\phi_E = \int_S \vec{E}d\vec{s}. \quad (2.14)$$

Поток  $\phi_E$  определяет число линий вектора напряженности электростатического поля, пронизывающее поверхность  $S$ .

Аналогично понятие потока можно ввести также и для вектора индукции электростатического поля:

$$\phi_D = \int_S d\phi_D = \int_S \vec{D}d\vec{s}. \quad (2.15)$$

Интеграл (2.15) определяет число линий вектора  $\vec{D}$ , пронизывающих поверхность  $S$ .

### 2.1.6. Теорема Гаусса

Эту теорему можно сформулировать как для вектора  $\vec{E}$ , так и для вектора  $\vec{D}$ :

- *поток вектора напряженности электростатического поля через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме электрических зарядов, охватываемых этой поверхностью, деленной на  $\epsilon\epsilon_0$ :*

$$\oint_s \vec{E} d\vec{s} = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon\epsilon_0}; \quad (2.16)$$

- *поток вектора индукции электростатического поля через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме электрических зарядов, охватываемых этой поверхностью:*

$$\oint_s \vec{D} d\vec{s} = \sum_i q_i. \quad (2.17)$$

Теорема Гаусса в данном случае является математическим доказательством существования в природе электрических зарядов.

Докажем теорему Гаусса для частного случая, когда произвольная замкнутая поверхность  $S$  охватывает всего один положительный точечный заряд  $+q$  (рис. 2.11).

Опишем вокруг точечного заряда  $+q$  вспомогательную замкнутую поверхность  $S'$  в виде сферы радиусом  $r$  так, чтобы эта поверхность  $S'$  лежала внутри нашей замкнутой поверхности  $S$ .

Поток вектора напряженности электростатического поля через вспомогательную поверхность  $S'$  равен:

$$\phi'_E = \oint_{s'} \vec{E} d\vec{s} = \oint_{s'} E ds \cos \alpha. \quad (2.18)$$

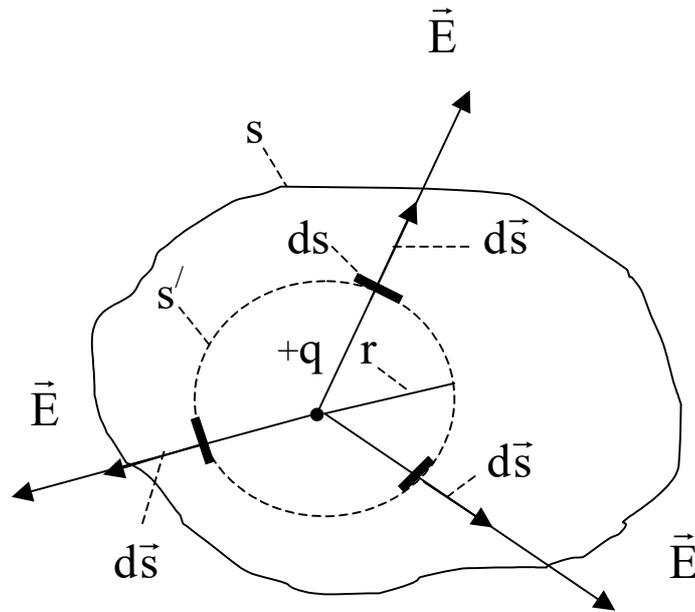


Рис. 2.11

Учитывая, что для любой точки вспомогательной поверхности  $S'$  вектор  $\vec{E}$  всегда параллелен вектору  $d\vec{s}$  ( $\angle \alpha = 0$ ), а модуль напряженности электростатического поля, создаваемого точечным зарядом в каждой точке поверхности  $S'$ , одинаков и определяется формулой (2.9) имеем:

$$\phi'_E = E \int_{S'} ds = \frac{q4\pi r^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0}. \quad (2.19)$$

Так как число линий вектора  $\vec{E}$ , пронизывающее поверхности  $S$  и  $S'$  одинаково (см. рис. 2.11), то потоки вектора напряженности электростатического поля через замкнутые поверхности  $S'$  и  $S$  равны друг другу. Поэтому поток вектора напряженности электростатического поля через нашу произвольную замкнутую поверхность

$$\phi_E = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0}, \quad (2.20)$$

что и требовалось доказать.

Следствия из теоремы Гаусса:

- если  $|+q| = |-q|$  (рис. 2.12), то  $\phi_E = 0$ ;

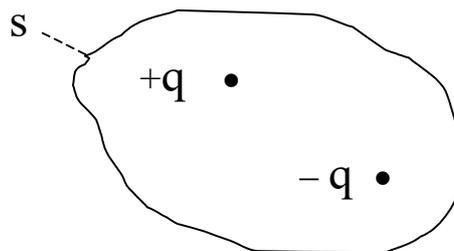


Рис. 2.12

- если замкнутая поверхность не охватывает заряды (рис. 2.13), то  $\phi_E = 0$ .

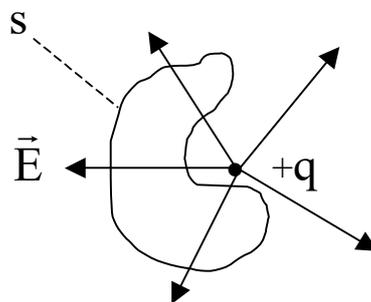


Рис. 2.13

### 2.1.6.1. Применение теоремы Гаусса для расчета электростатических полей

Для того чтобы рассчитать электростатическое поле в данной точке пространства, необходимо определить в этой точке направление и модуль вектора напряженности электростатического поля.

Эту задачу можно решить с помощью принципа суперпозиции.

Однако в тех случаях, когда электростатическое поле обладает каким-либо видом симметрии, задача по расчету поля существенно упрощается, если использовать теорему Гаусса.

Путь расчета:

- выбираем произвольную точку пространства в той области, которая нас интересует;
- используя вид симметрии электростатического поля, выбираем вид замкнутой гауссовой поверхности и проводим ее так, чтобы она охватывала электрические заряды, создающие поле, а наша точка лежала на этой поверхности (поверхность должна быть такой, чтобы в каждой ее точке линии напряженности были либо параллельны ей, либо перпендикулярны, а модуль напряженности был бы одинаков в каждой точке гауссовой поверхности);

- рассчитываем поток вектора напряженности электрического поля через выбранную гауссову поверхность;
- применяем теорему Гаусса и определяем напряженность электростатического поля.

### 2.1.6.1.1. Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости

Пусть имеется бесконечная равномерно заряженная плоскость с поверхностной плотностью электрического заряда  $+\sigma$  (рис. 2.14).

Выбираем произвольную точку пространства  $A$ .

Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что электрическое поле, создаваемое бесконечной, равномерно заряженной плоскостью однородно, т.е. в каждой точке пространства  $\vec{E} = \text{const}$ .

Учитывая этот вид симметрии поля, выбираем замкнутую гауссову поверхность в форме цилиндра с закрытыми торцами и проводим ее так, чтобы точка  $A$  лежала на этой поверхности (см. рис. 2.14).

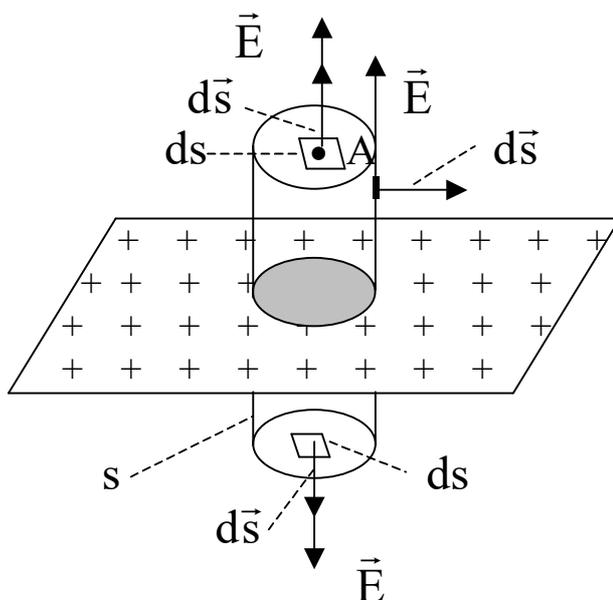


Рис. 2.14

Поток вектора напряженности электростатического поля через выбранную гауссову поверхность равен:

$$\phi_E = \int_S \vec{E} d\vec{s} = \int_{s_{\text{бок}}} \vec{E} d\vec{s} + 2 \int_{s_{\text{тор}}} \vec{E} d\vec{s} = \int_{s_{\text{бок}}} E ds \cos \alpha + 2 \int_{s_{\text{тор}}} E ds \cos \alpha,$$

$0 \quad (\angle \alpha = \pi/2)$ 
 $1 \quad (\angle \alpha = 0)$

откуда

$$\phi_E = 2E \int_{S_{\text{top}}} ds = 2E S_{\text{top}}. \quad (2.21)$$

С другой стороны, согласно теореме Гаусса, этот поток

$$\phi_E = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon \varepsilon_0} = \frac{\sigma S_{\text{top}}}{\varepsilon \varepsilon_0}. \quad (2.22)$$

Приравнивая соотношения (2.21) и (2.22), окончательно получаем, что напряженность электростатического поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной плоскостью, равна:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon \varepsilon_0}. \quad (2.23)$$

В качестве частного случая рассмотрим электростатическое поле, создаваемое двумя параллельными бесконечными равномерно заряженными плоскостями, когда заряды плоскостей имеют разный знак, а для поверхностных плотностей зарядов выполняется условие:  $|+\sigma| = |-\sigma|$  (рис. 2.15).

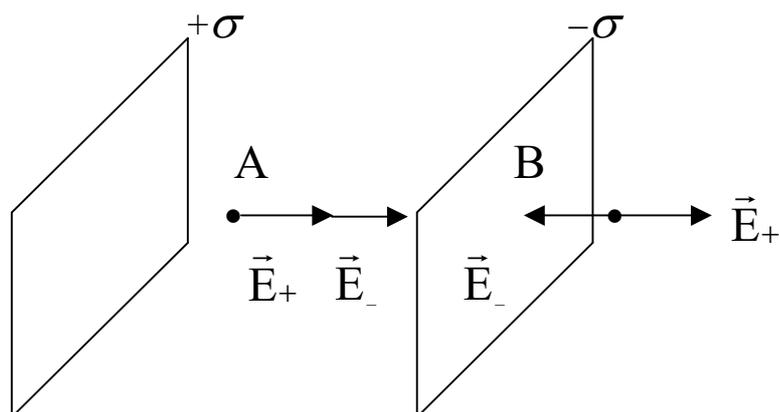


Рис. 2.15

Так как поверхностные плотности электрических зарядов одинаковы, то напряженности электростатических полей, создаваемые каждой плоскостью, равны по величине:  $E_+ = E_-$ .

Напряженность электростатического поля в пространстве между плоскостями

$$E_A = E_+ + E_- = \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0}, \quad (2.24)$$

а напряженность электростатического поля снаружи

$$E_B = 0. \quad (2.25)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае электростатическое поле существует только в пространстве между плоскостями.

#### 2.1.6.1.2. Поле равномерно заряженной сферической поверхности

Рассмотрим равномерно заряженную сферическую поверхность радиуса  $R$ , заряд которой равен  $+q$  (рис. 2.16).

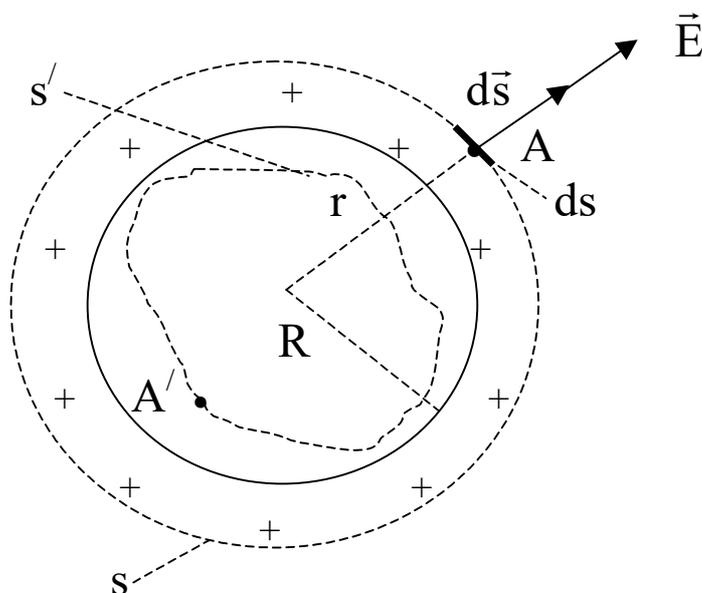


Рис. 2.16

В данном случае следует рассматривать две области пространства: пространство вне сферы и пространство внутри сферы.

##### 1) Поле вне сферы

Опыт показывает, что поле равномерно заряженной сферической поверхности обладает центральной симметрией, т.е. в точках, равноудаленных от центра сферы, модуль напряженности электростатического поля одинаков ( $E = \text{const}$ ).

Учитывая это, выбираем замкнутую гауссову поверхность  $S$  в форме сферы радиуса  $r \geq R$ , центр которой совпадает с центром заряженной сферы,

и проводим ее так, чтобы выбранная нами произвольная точка пространства  $A$  лежала на поверхности  $S$  (см. рис. 2.16).

В каждой точке поверхности  $S$  модуль напряженности электростатического поля одинаков, а  $\vec{E} \uparrow \uparrow d\vec{s}$ .

Поток вектора  $\vec{E}$  через поверхность  $S$  равен:

$$\phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{s} = \oint_S E ds \underbrace{\cos \alpha}_1 = E \oint_S ds = E 4\pi r^2. \quad (2.26)$$

С другой стороны, согласно теореме Гаусса этот поток равен:

$$\phi_E = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon \epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon \epsilon_0}. \quad (2.27)$$

Из (2.26) и (2.27) следует, что напряженность электростатического поля в точках пространства, лежащих вне сферы, равна:

$$E = \frac{q}{4\pi \epsilon \epsilon_0 r^2}, \text{ если } r \geq R. \quad (2.28)$$

Из сравнения формул (2.9) и (2.28) следует, что *равномерно заряженная сфера в точках, лежащих вне сферы, создает такое же электростатическое поле, как и точечный электрический заряд, помещенный в центр сферы.*

2) Поле внутри сферы

Выберем внутри нашей сферы произвольную точку  $A'$  и проведем через нее произвольную замкнутую поверхность  $S'$  так, чтобы эта поверхность целиком лежала внутри сферы (рис. 2.16). Так как внутри этой поверхности  $S'$  нет электрических зарядов, то, согласно теореме Гаусса,

$$\oint_{S'} \vec{E}_{\text{внутри}} d\vec{s} = 0 \Rightarrow \vec{E}_{\text{внутри}} = 0. \quad (2.29)$$

Таким образом, равномерно заряженная сферическая поверхность создает электрическое поле только в пространстве, лежащем вне этой сферы (рис. 2.17).

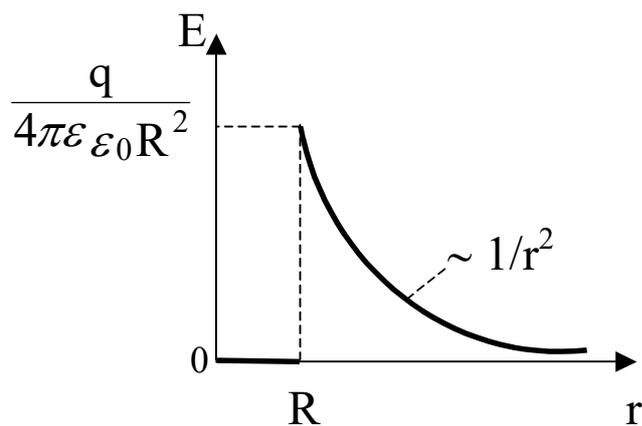


Рис. 2.17

### 2.1.6.1.3. Поле равномерно заряженной бесконечной нити (цилиндра)

Рассмотрим равномерно заряженную бесконечно длинную нить (рис. 2.18).

Будем считать, что нить имеет положительный заряд, а линейная плотность электрических зарядов равна  $\gamma$ .

Согласно экспериментальным данным, электрическое поле такой нити обладает осевой симметрией, т.е. в точках, равноудаленных от нити, модуль вектора напряженности электростатического поля одинаков.

Поэтому замкнутую гауссову поверхность удобно выбрать в форме цилиндра с замкнутыми торцевыми поверхностями, ось которого совпадает с нитью. Проводим эту гауссову поверхность так, чтобы выбранная произвольная точка пространства  $A$  лежала на этой поверхности (рис. 2.18).

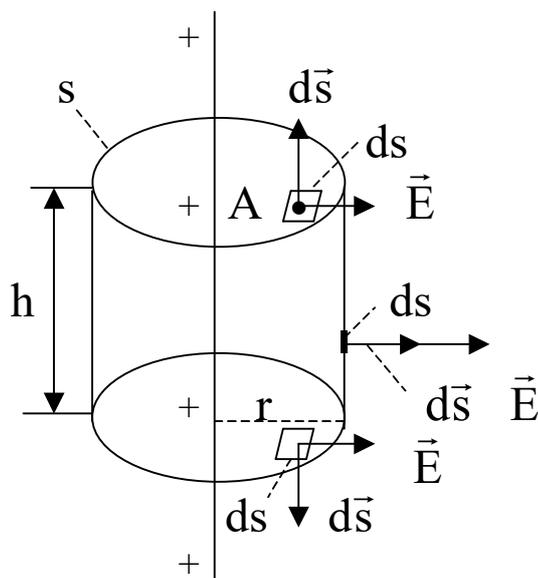


Рис. 2.18

Так как все точки боковой поверхности цилиндра равноудалены от нити, то в этих точках модуль напряженности электростатического поля  $\vec{E} = \text{const}$ .

Поток вектора напряженности электростатического поля через выбранную гауссову поверхность равен:

$$\phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{s} = \int_{s_{\text{бок}}} \vec{E} d\vec{s} + 2 \int_{s_{\text{тор}}} \vec{E} d\vec{s} = \int_{s_{\text{бок}}} E d s \cos \alpha + 2 \int_{s_{\text{тор}}} E d s \cos \alpha,$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{1 (\angle \alpha = 0)} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{0 (\angle \alpha = \pi/2)}$

откуда

$$\phi_E = E \int_{s_{\text{бок}}} ds = E \cdot S_{\text{бок}} = E \cdot 2\pi r h. \quad (2.30)$$

С другой стороны, согласно теореме Гаусса этот поток равен:

$$\phi_E = \frac{\sum q_i}{\epsilon \epsilon_0} = \frac{\gamma h}{\epsilon \epsilon_0}. \quad (2.31)$$

Приравнивая соотношения (2.30) и (2.31), получаем, что напряженность электростатического поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной нитью в любой точке пространства,

$$E = \frac{\gamma}{2\pi \epsilon \epsilon_0 r}. \quad (2.32)$$

Формулу (2.32) можно применять и для расчета электростатического поля равномерно заряженного бесконечного цилиндра радиуса  $R$  для точек пространства, лежащих вне этого цилиндра ( $r \geq R$ ).

Как и в случае заряженной сферической поверхности, напряженность электрического поля внутри такого цилиндра равна нулю (см. рис. 2.19).

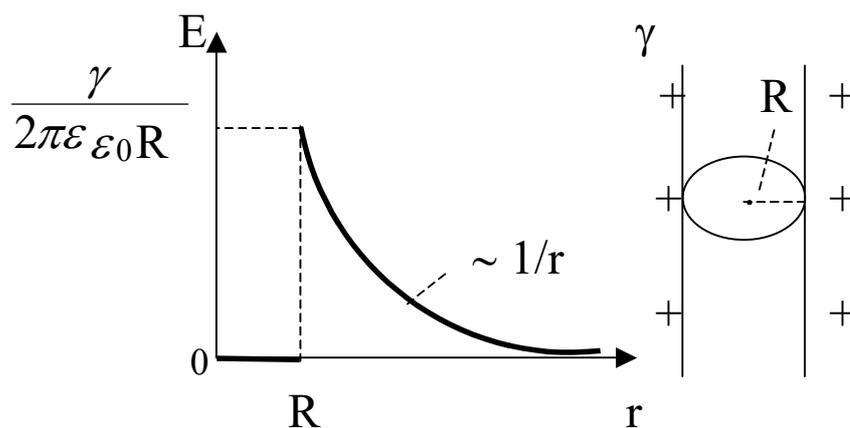


Рис. 2.19

### 2.1.7. Потенциал электростатического поля

Рассчитаем работу, которую совершают силы электростатического поля по переносу положительного точечного заряда  $+q$  из точки 1 в точку 2, если это поле создается точечным зарядом  $+q$  (рис. 2.20).

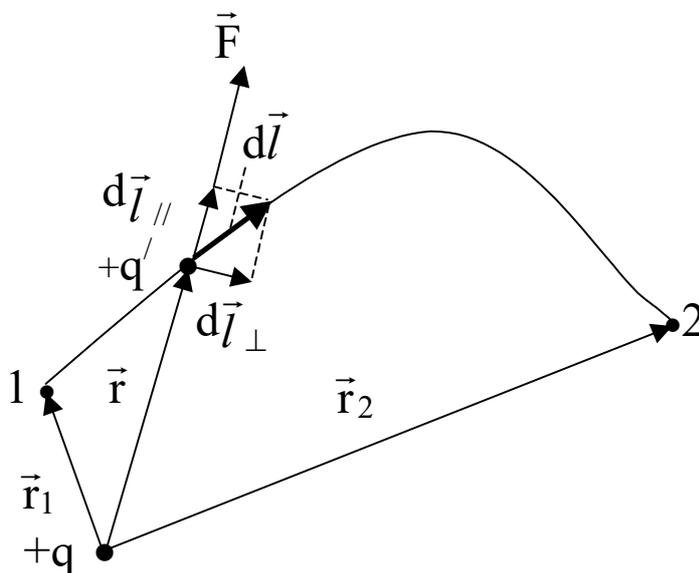


Рис. 2.20

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = \int_1^2 \vec{F} (d\vec{l}_{//} + d\vec{l}_{\perp}) = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l}_{//} + \underbrace{\int_1^2 \vec{F} d\vec{l}_{\perp}}_{0 (\vec{F} \perp d\vec{l}_{\perp})}. \quad (2.33)$$

Учитывая, что  $d\vec{l}_{//} = d\vec{r}$ , имеем:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 F dr \underbrace{\cos \alpha}_{1 (\vec{F} \uparrow \uparrow d\vec{r})}. \quad (2.34)$$

Используя формулу (2.9) для напряженности электрического поля точечного электрического заряда, имеем:

$$A_{12} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{qq'}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_1} - \frac{qq'}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_2}. \quad (2.35)$$

Из (2.35) следует, что работа, совершаемая силами электростатического поля по переносу заряда  $q'$  из одной точки пространства в другую, не зависит от формы траектории движения переносимого заряда. Поэтому *силы электростатического поля являются консервативными силами*.

Работу консервативной силы всегда можно представить как убыль потенциальной энергии системы. Для этого введем новую функцию

$$W = \frac{qq'}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} + \text{const}. \quad (2.36)$$

Тогда

$$A_{12} = W_1 - W_2 = -(W_2 - W_1) = -\Delta W. \quad (2.27)$$

Функция  $W$  называется взаимной потенциальной энергией двух точечных электрических зарядов.

Начало отсчета потенциальной энергии будем выбирать следующим образом: если  $r = \infty$ , то  $W = 0$ . При таком выборе начала отсчета взаимной

потенциальной энергии двух точечных электрических зарядов константа в выражении (2.26) равна нулю и

$$W = \frac{qq'}{4\pi\epsilon\epsilon_0r}. \quad (2.38)$$

Соотношение (2.38) удобно представить в следующем виде:

$$W = q'\varphi, \quad (2.39)$$

где  $\varphi$  – потенциал электростатического поля в данной точке, равный

$$\varphi = \frac{W}{q'}. \quad (2.40)$$

*Потенциал электростатического поля – это скалярная физическая величина, являющаяся энергетической характеристикой электростатического поля.*

*Потенциал электростатического поля в данной точке пространства численно равен потенциальной энергии, которой обладает единичный положительный точечный заряд, помещенный в эту точку пространства.*

Так же как и потенциальная энергия, потенциал электростатического поля в данной точке пространства всегда определен с точностью до некоторой произвольной постоянной.

Будем выбирать начало отсчета следующим образом:

если  $r = \infty$ , то  $\varphi_\infty = 0$ . (2.41)

С учетом такого выбора начала отсчета потенциала из (2.36) и (2.38) следует, что потенциал электростатического поля, создаваемого точечным электрическим зарядом в любой точке пространства, равен:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0r}. \quad (2.42)$$

Сопоставление выражений (2.35) и (2.42) позволяет сделать вывод о том, что работа сил электростатического поля по переносу заряда  $q'$  из одной точки пространства в другую равна:

$$A_{12} = q'(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (2.43)$$

Это соотношение позволяет дать еще одно определение физического смысла потенциала электростатического поля.

Пусть заряд  $q'$  перемещается в электростатическом поле из данной точки пространства, потенциал в которой равен  $\varphi$ , в бесконечность, тогда силами электростатического поля совершается работа

$$A_\infty = q'(\varphi - \underbrace{\varphi_\infty}_0),$$

откуда

$$\varphi = \frac{A_\infty}{q'}. \quad (2.44)$$

*Потенциал электростатического поля в данной точке пространства численно равен работе, которую совершают силы электростатического поля по переносу единичного положительного точечного заряда из данной точки в бесконечность.*

Для потенциала электростатического поля, как и для напряженности, выполняется принцип суперпозиции:

- дискретное распределение зарядов

$$\varphi = \sum_i \varphi_i; \quad (2.45)$$

- непрерывное распределение зарядов

$$\varphi = \int d\varphi. \quad (2.46)$$

по всем зарядам

#### 2.1.7.1. Эквипотенциальные поверхности и их свойства

*Эквипотенциальные поверхности, это такие поверхности, во всех точках которых потенциал имеет одно и то же значение.*

Эти поверхности имеют следующие свойства:

- эквипотенциальные поверхности не пересекаются (следствие однозначности потенциала в данной точке);
- работа сил электростатического поля по переносу зарядов по эквипотенциальной поверхности равна нулю;
- эквипотенциальные поверхности всегда перпендикулярны линиям напряженности.

Докажем последнее свойство.

Элементарная работа по переносу заряда  $q'$  по эквипотенциальной поверхности

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = q' \vec{E} d\vec{r} = q' E dr \cos \alpha = 0.$$

Так как  $q'$ ,  $E$  и  $d\vec{r}$  не равны нулю, то  $\cos \alpha = 0$ . Поэтому угол  $\alpha = \pi/2$ , т.е.  $\vec{E} \perp d\vec{r}$ .

На рис. 2.21 в качестве примера пунктиром изображены две эквипотенциальные поверхности в том случае, когда электрическое поле создается бесконечно длинной равномерно заряженной нитью (нить перпендикулярна плоскости чертежа).

Эквипотенциальные поверхности (пунктирные линии) представляют собой цилиндрические поверхности радиусами  $r_1$  и  $r_2$ , ось которых совпадает с нитью.

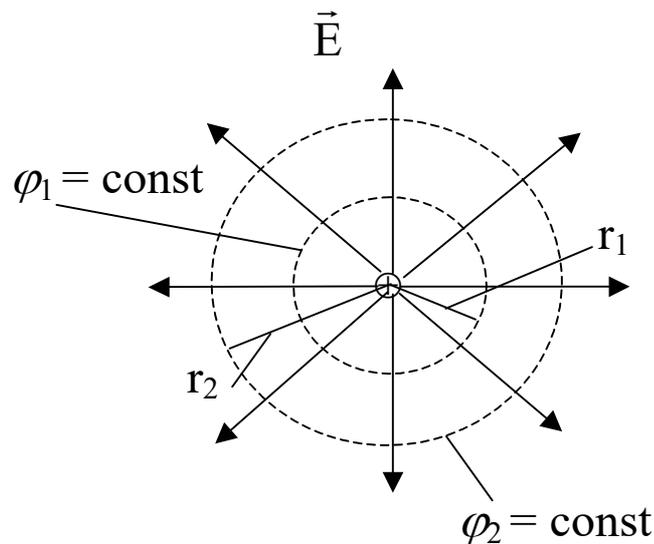


Рис. 2.21

#### 2.1.7.2. Связь напряженности и потенциала

Элементарная работа сил электростатического поля по переносу точечного заряда  $q'$  равна:

$$dA = \vec{F} d\vec{r}. \quad (2.47)$$

Однако из формулы (2.33) следует, что эта работа может быть рассчитана по следующему соотношению:

$$dA = -q' d\varphi. \quad (2.48)$$

Приравнивая (2.47) и (2.48), получаем:

$$\vec{F}d\vec{r} = -q' d\varphi \Rightarrow \vec{E}q' d\vec{r} = -q' d\varphi \Rightarrow Edr\cos\alpha = -d\varphi. \quad (2.49)$$

В соответствии с рис. 2.22  $E \cdot \cos\alpha = E_r$ , где  $E_r$  – проекция вектора напряженности электростатического поля на направление  $\vec{r}$ .

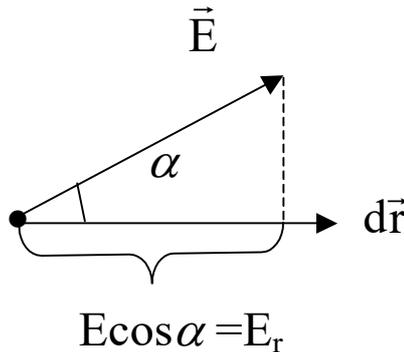


Рис. 2.22

Из (2.49) следует, что эта проекция вектора напряженности электростатического поля равна:

$$E_r = -\frac{d\varphi}{dr}. \quad (2.50)$$

Формулу (2.50) можно использовать и для нахождения проекций вектора напряженности электростатического поля на координатные оси:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (2.51)$$

Если известны проекции вектора на координатные оси, то

$$\vec{E} = -\left( \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right). \quad (2.52)$$

Вектор, стоящий в скобках этого соотношения, определяет градиент потенциала электростатического поля  $\text{grad}\varphi$ .

Градиент потенциала – это вектор, указывающий направление быстрого возрастания потенциала и численно равный приращению потенциала на единицу длины этого направления.

Таким образом,

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi. \quad (2.53)$$

Напряженность электростатического поля в данной точке пространства равна по величине и противоположно направлена градиенту потенциала электростатического поля в этой же точке.

2.1.7.3. Формула для расчета разности потенциалов между двумя точками поля

Согласно (2.49)

$$\vec{E}d\vec{r} = -d\varphi. \quad (2.54)$$

Если проинтегрировать обе части этого дифференциального уравнения от точки 1 до точки 2

$$\int_1^2 \vec{E}d\vec{r} = - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi, \quad (2.55)$$

то получим, что

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}d\vec{r}. \quad (2.56)$$

Формула (2.56) позволяет рассчитать разность потенциалов между двумя любыми точками электростатического поля.

В качестве примеров рассчитаем разность потенциалов между двумя произвольными точками пространства для однородного поля и поля, созданного равномерно заряженной бесконечной нитью.

2.1.7.3.1. Однородное поле ( $\vec{E} = \text{const}$ )

Пусть имеются две произвольные точки пространства 1 и 2, которые находятся в однородном электростатическом поле (рис. 2.23).

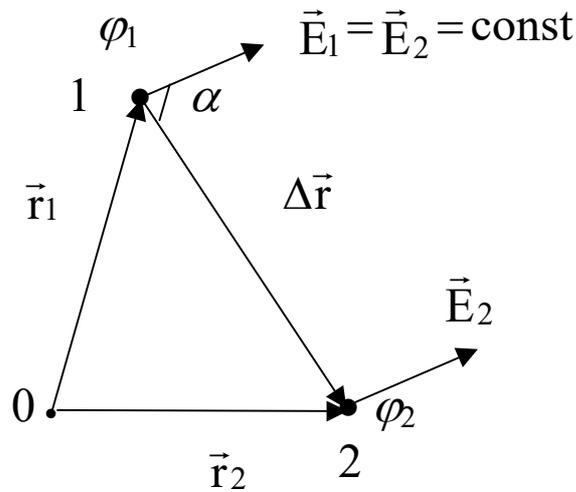


Рис. 2.23

Разность потенциалов между точками 1 и 2 равна:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{r} = \vec{E} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} = \vec{E}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{E} \Delta \vec{r} = E \Delta r \cos \alpha. \quad (2.57)$$

Если рассматриваемые точки лежат на одной линии напряженности ( $\Delta \vec{r} \uparrow \uparrow \vec{E}$ ), то

$$\varphi_1 - \varphi_2 = E \Delta r. \quad (2.58)$$

### 2.1.7.3.2. Поле равномерно заряженной бесконечной нити

Рассмотрим две точки пространства, которые находятся в электростатическом поле, созданном равномерно заряженной бесконечной нитью.

Пусть для простоты эти точки лежат на одном перпендикуляре к этой нити (рис. 2.24).

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{r} = \int_1^2 E dr \underbrace{\cos \alpha}_{1 (\vec{E} \uparrow \uparrow d\vec{r})}. \quad (2.59)$$

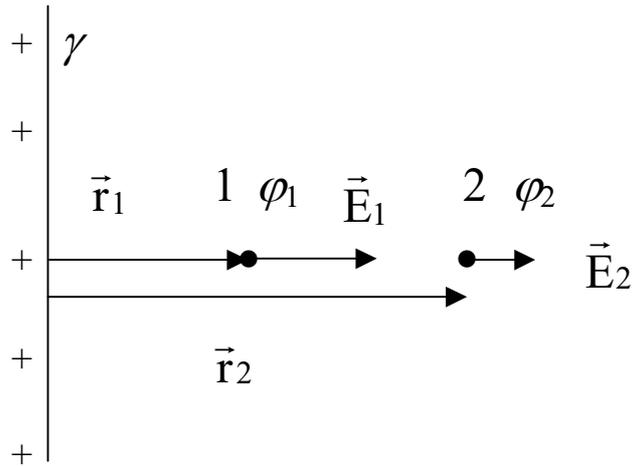


Рис. 2.24

Учитывая формулу (2.32) для модуля напряженности электростатического поля нити, имеем:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\gamma}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\gamma}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \left| \ln \frac{r_2}{r_1} \right|. \quad (2.60)$$

Формула (2.60) справедлива и в том случае, когда рассматриваемые точки не лежат на одном перпендикуляре к нити.

Это является следствием того, что поле равномерно заряженной бесконечной нити обладает осевой симметрией, вследствие чего эквипотенциальные поверхности представляют собой цилиндрические поверхности, ось которых совпадает с нитью (см. рис. 2.21).

2.1.7.4. Теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля. Потенциальный характер электростатического поля

Пусть в электростатическом поле расположен некоторый замкнутый контур  $l$ . Выберем направление обхода контура и рассмотрим бесконечно малый участок этого контура  $d\vec{l}$ . Введем вектор  $d\vec{l}$ , направление которого совпадает с направлением обхода контура, а его модуль  $|d\vec{l}| = dl$  (рис. 2.25).

Интеграл  $\oint_l \vec{E} d\vec{l}$  называется циркуляцией вектора напряженности электростатического поля по замкнутому контуру  $l$ .

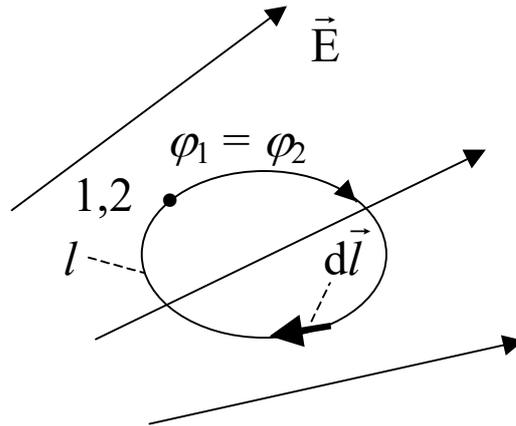


Рис. 2.25

Для электростатического поля справедлива следующая теорема.

*Циркуляция вектора напряженности электростатического поля по замкнутому контуру равна нулю:*

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = 0. \quad (2.61)$$

Докажем эту теорему, вычисляя интеграл (2.61) с учетом того, что при интегрировании по замкнутому контуру  $l$  потенциалы электростатического поля в начальной и конечных точках совпадают (см. рис. 2.25).

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = \frac{1}{q_l} \oint_l q \vec{E} d\vec{l} = \frac{1}{q_l} \oint_l \vec{F} d\vec{l} = \frac{1}{q_l} \oint dA = -\frac{1}{q_l} \oint q d\varphi = -\int_{\varphi_1}^{\varphi_2 = \varphi_1} d\varphi = 0. \quad (2.62)$$

Данная теорема является математическим доказательством потенциального характера электростатического поля.

Она утверждает, что для данной точки электростатического поля можно ввести только одно значение потенциала. Именно поэтому работа сил электростатического поля по переносу заряда по замкнутому контуру равна нулю.

### 2.1.8. Проводники в электростатическом поле

*Проводник – это тело, внутри которого имеются свободные электрические заряды, способные перемещаться в этом теле при наличии сколь угодно слабого электрического поля.*

В дальнейшем будут рассматриваться только металлические проводники.

### 2.1.8.1 Потенциал проводника

Потенциалом проводника называется скалярная физическая величина, численно равная работе, которую совершают силы электростатического поля по переносу единичного положительного точечного заряда с поверхности проводника в бесконечность:

$$\varphi = \frac{A_\infty}{q'}. \quad (2.63)$$

В качестве примера рассчитаем потенциал уединенной сферы радиуса  $R$ , имеющей заряд  $+q$ . Расчет будем производить, определяя работу сил электростатического поля по переносу положительного точечного заряда  $+q'$  с поверхности этой сферы в бесконечность (рис. 2.26).

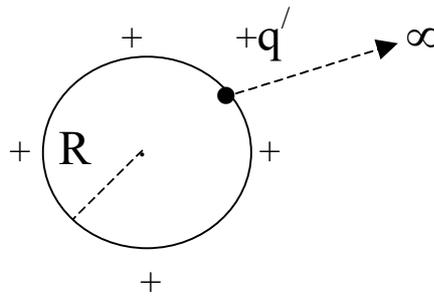


Рис. 2.26

$$A_\infty = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 q' \vec{E} d\vec{r} = \int_1^2 q' E dr \cos \alpha. \quad (2.64)$$

Так как работа сил электростатического поля не зависит от формы траектории движения заряда  $q'$ , то будем перемещать заряд вдоль линии напряженности. Поэтому  $\cos \alpha = 1$  и, с учетом формулы (2.28) для напряженности электростатического поля равномерно заряженной сферы, получаем:

$$A_\infty = \frac{qq'}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \Rightarrow A_\infty = \frac{qq'}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R},$$

откуда потенциал уединенной сферы равен:

$$\varphi_c = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}. \quad (2.65)$$

Ранее было показано, что равномерно заряженная сфера в точках, лежащих вне сферы, создает такое же электростатическое поле, что и точечный заряд, помещенный в центр сферы. Это дает основание для расчета потенциала электростатического поля равномерно заряженной сферы в точках пространства, лежащих вне сферы, по той же самой формуле, что и в случае потенциала, создаваемого точечным зарядом:

$$\varphi_c = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}, \text{ если } r \geq R. \quad (2.66)$$

На рис. 2.27 показана зависимость  $\varphi_c = \phi_c(r)$  для равномерно заряженной сферической поверхности.

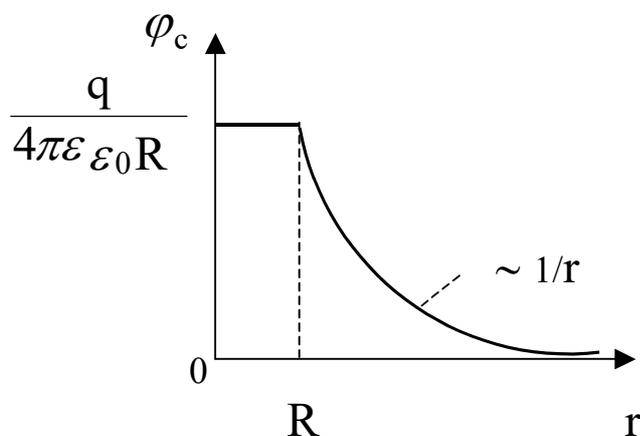


Рис. 2.27

2.1.8.2. Распределение избыточных электрических зарядов в металлических проводниках

1) Незаряженный проводник

Если проводник не заряжен, то результирующий отрицательный электрический заряд электронов проводимости полностью компенсируется положительным зарядом ионов кристаллической решетки. Проводник в целом электронейтрален и никакого электрического поля в окружающем пространстве не создает.

## 2) Заряженный проводник

Зарядим проводник. Избыточные электрические заряды будут распределяться в проводнике таким образом, что напряженность электрического поля, создаваемого этими избыточными зарядами, внутри проводника будет равна нулю, а сам проводник (его поверхность и объем) образует эквипотенциальную поверхность (см. рис. 2.28).

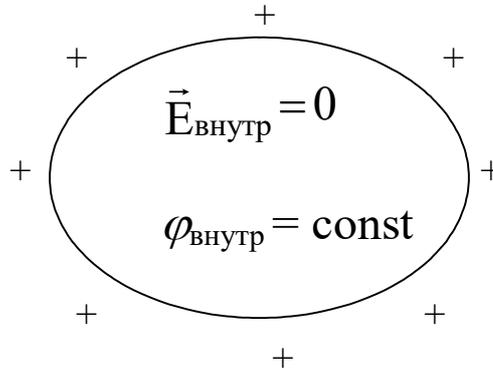


Рис. 2.28

Докажем это от противного.

Пусть  $\vec{E}_{\text{внутр}} \neq 0$ . Так как  $\vec{E}_{\text{внутр}} = -\text{grad} \varphi_{\text{внутр}}$ , то  $\text{grad} \varphi_{\text{внутр}} \neq 0$ .

По этой причине  $\varphi_{\text{внутр}} \neq \text{const}$ . Если бы это было так, то наличие в проводниках свободных электрических зарядов приводило бы к тому, что внутри заряженных проводников циркулировали бы электрические токи. Опыт показывает, что внутри заряженных проводников никакие электрические токи не протекают. Поэтому  $\varphi_{\text{внутр}} = \text{const} \Rightarrow \text{grad} \varphi_{\text{внутр}} = 0 \Rightarrow \vec{E}_{\text{внутр}} = 0$ .

Установим, где в металлическом проводнике находятся избыточные электрические заряды.

Выясним, могут ли они находиться внутри проводника. Проведем внутри проводника замкнутую поверхность  $S$ . Тогда на основании теоремы Гаусса следует, что

$$\oint_S \vec{E}_{\text{внутр}} \cdot d\vec{s} = \frac{\sum_i q_i^{\text{внутр}}}{\epsilon \epsilon_0} \Rightarrow \sum_i q_i^{\text{внутр}} = 0.$$

Избыточные электрические заряды не могут находиться внутри заряженных проводников.

Таким образом, избыточные электрические заряды могут находиться только на поверхности заряженных проводников.

В общем случае избыточные электрические заряды на поверхности заряженных проводников распределяются неравномерно.

Покажем, что *поверхностная плотность электрических зарядов  $\sigma$  обратно пропорциональна радиусу кривизны поверхности  $r$  в данной точке.*

Рассмотрим две заряженные сферические поверхности разного радиуса. Соединим их тонким проводником (рис. 2.29).

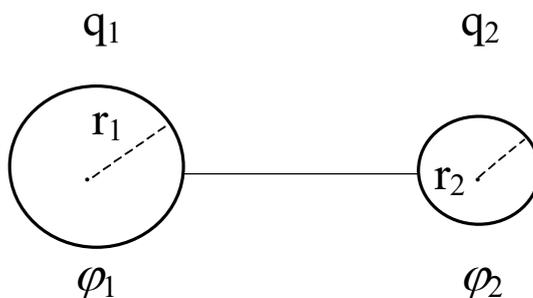


Рис. 2.29

Первоначально потенциалы сфер различны. После их соединения за счет разности потенциалов начнется процесс перераспределения электрических зарядов между сферическими поверхностями. Это перераспределение электрических зарядов будет продолжаться до тех пор, пока потенциалы сфер не сравняются и весь составной проводник не станет эквипотенциальной поверхностью ( $\varphi_1 = \varphi_2 = \text{const}$ ).

После перераспределения заряды сфер соответственно равны  $q_1 = 4\pi r_1^2 \sigma_1$  и  $q_2 = 4\pi r_2^2 \sigma_2$ , из равенства потенциалов сфер и формулы (2.65) следует:

$$\frac{q_1}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_1} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_2} \Rightarrow \frac{4\pi r_1^2 \sigma_1}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_1} = \frac{4\pi r_2^2 \sigma_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_2}$$

и

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (2.67)$$

Таким образом, поверхностная плотность электрических зарядов больше там, где меньше радиус кривизны металлической поверхности.

Напряженность электрического поля вблизи заряженной поверхности пропорциональна поверхностной плотности электрических зарядов (см. формулу (2.23)). Поэтому вблизи участков поверхности, имеющих малый радиус кривизны, напряженность электростатического поля может быть

очень высока. Это используется, например, в молниеотводах, которые представляют собой тонкий остро заточенный заземленный штырь.

В электрических машинах с целью исключения пробоя изоляции, наоборот, острые элементы конструкций сглаживают, увеличивая радиус их кривизны.

### 2.1.8.3. Емкость проводников

*Емкость  $C$  – скалярная физическая величина, характеризующая способность тел накапливать электрические заряды.*

*Емкость проводника численно равна заряду, который необходимо сообщить проводнику для того, чтобы изменить его потенциал на один вольт:*

$$C = \frac{q}{\varphi}. \quad (2.68)$$

Рассмотрим составной заряженный проводник, изображенный на рис. 2.29. После перераспределения электрических зарядов между отдельными проводниками этот составной проводник будет представлять собой эквипотенциальную поверхность. Из равенства потенциалов сфер в этом случае следует:

$$\varphi_1 = \varphi_2 \Rightarrow \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2},$$

откуда

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{C_1}{C_2}, \quad (2.69)$$

т.е. электрические заряды распределяются между проводниками прямо пропорционально их емкостям.

*Емкость проводника зависит от его формы, размеров и диэлектрической проницаемости окружающей среды.*

В качестве примера рассчитаем емкость уединенной металлической сферы (рис. 2.30).

Мысленно зарядим сферу, сообщив ей электрический заряд  $q$ . Тогда ее потенциал равен:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R}.$$

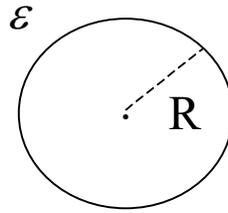


Рис. 2.30

Учитывая взаимосвязь между  $q$ ,  $\varphi$  и  $C$  (2.68), получаем:

$$C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R. \quad (2.70)$$

#### 2.1.8.4. Конденсаторы. Электроёмкость плоского конденсатора

*Конденсатор – устройство, состоящее из двух проводников, разделенных слоем диэлектрика.*

Эти проводники называются обкладками конденсатора.

По форме обкладок различают конденсаторы плоские, цилиндрические и сферические. Конденсаторы другой формы, как правило, практически не используются.

*Электроёмкость конденсатора – скалярная физическая величина, численно равная заряду, который необходимо сообщить конденсатору, для того чтобы изменить разность потенциалов между его обкладками на один вольт:*

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}. \quad (2.71)$$

Зарядом конденсатора называют заряд одной из его обкладок (рис. 2.31).

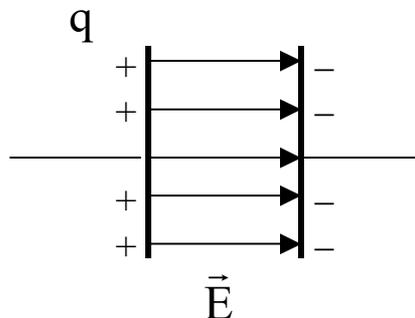


Рис. 2.31

*Электроёмкость конденсатора зависит от его формы, размеров и диэлектрической проницаемости окружающей среды.*

В качестве примера рассчитаем емкость плоского конденсатора, у которого площадь обкладки равна  $S$  (рис. 2.32).

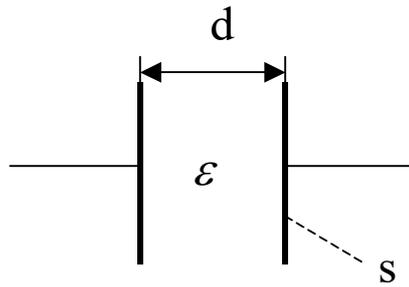


Рис. 2.32

Мысленно сообщим конденсатору заряд  $Q$ . Тогда в пространстве между обкладками конденсатора возникнет электрическое поле. Если расстояние между обкладками много меньше размера обкладки (тонкий конденсатор), то можно считать, что обкладки представляют собой бесконечные равномерно заряженные плоскости. Поэтому для расчета напряженности  $E$  однородного электростатического поля внутри заряженного конденсатора используем выражение (2.24), а для расчета разности потенциалов между обкладками – выражение (2.58). Тогда

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Ed = \frac{\sigma d}{\varepsilon \varepsilon_0} = \frac{q d}{\varepsilon \varepsilon_0 S},$$

откуда (с учетом (2.71)) емкость плоского конденсатора равна:

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}. \quad (2.72)$$

#### 2.1.8.4.1. Соединение конденсаторов

1) Последовательное соединение (рис. 2.33).

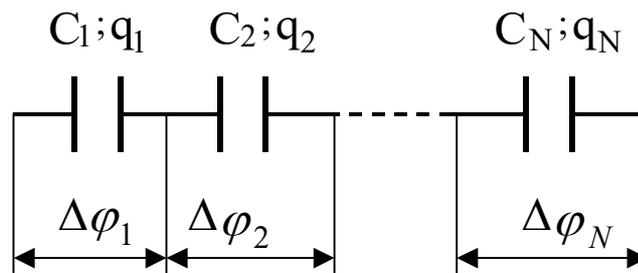


Рис. 2.33

Такое соединение конденсаторов обладает следующими свойствами:

- результирующая емкость  $C$  определяется из соотношения

$$\frac{1}{C} = \sum_i^N \frac{1}{C_i}; \quad (2.73)$$

- результирующий заряд

$$q = q_1 = q_2 = \dots = q_N; \quad (2.74)$$

- результирующая разность потенциалов

$$\Delta\varphi = \sum_i^N \Delta\varphi_i. \quad (2.75)$$

2) Параллельное соединение (рис. 2.34).

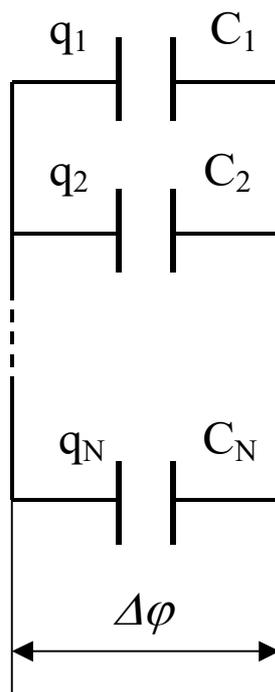


Рис. 2.34

Свойства параллельного соединения конденсаторов:

- результирующая емкость

$$C = \sum_i^N C_i; \quad (2.76)$$

- результирующий заряд

$$q = \sum_i^N q_i; \quad (2.77)$$

- результирующая разность потенциалов

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 = \dots = \Delta\varphi_N. \quad (2.78)$$

2.1.8.5. Энергия заряженного проводника и энергия заряженного конденсатора

Рассмотрим уединенный проводник (рис. 2.35).

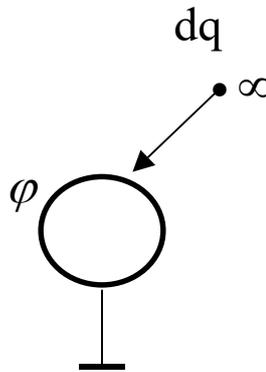


Рис. 2.35

Определим работу по заряду проводника, совершаемую последовательным переносом порций заряда  $dq$  из бесконечности на этот проводник.

Работу по заряду проводника указанным способом силы электростатического поля совершить не могут. Эту работу могут совершить только силы неэлектрической природы. Элементарная работа  $dA'$  этих сил равна:

$$dA' = -dA = dq(\varphi - \varphi_0) = \varphi dq. \quad (2.79)$$

Так как электростатическое поле является потенциальным, а силы, действующие в этом поле на электрические заряды, консервативны, то эта работа идет на повышение потенциальной энергии проводника:

$$dA' = dW. \quad (2.80)$$

Из этого дифференциального уравнения следует:

$$W = \int dA' = \int \varphi dq = \int \frac{q}{C} dq,$$

откуда энергия заряженного проводника

$$W = \frac{q^2}{2C} + \text{const}. \quad (2.81)$$

Будем считать, что если заряд проводника  $q = 0$ , то его энергия  $W = 0$ . При таком выборе начала отсчета энергии константа в выражении (2.81) равна нулю. В этом случае энергия заряженного проводника равна:

$$W = \frac{q^2}{2C}. \quad (2.82)$$

Формулу (2.82) можно применять и для расчета энергии заряженного конденсатора, если под  $q$  понимать заряд конденсатора (т.е. заряд одной из его обкладок).

#### 2.1.8.6. Энергия электростатического поля

Рассмотрим однородное электростатическое поле, которое существует внутри заряженного плоского конденсатора (см. рис. 2.31).

Энергию электростатического поля  $W$ , сосредоточенную внутри заряженного конденсатора, можно рассчитать по формуле (2.82).

Выразим энергию  $W$  через параметры электростатического поля.

Так как заряд конденсатора  $q = \sigma S$ , а его емкость определяется выражением (2.72), то

$$W = \frac{\sigma^2 s d}{2 \epsilon \epsilon_0}. \quad (2.83)$$

Напряженность электростатического поля внутри плоского заряженного конденсатора  $E = \sigma / \epsilon \epsilon_0$  (см. формулу (2.24)), а произведение  $s d$  определяет

объем пространства  $V$ , в котором сосредоточено поле. Поэтому энергия однородного электростатического поля, заключенная в объеме  $V$ , равна:

$$W = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2 V}{2}. \quad (2.84)$$

Если учесть взаимосвязь между напряженностью и индукцией электростатического поля (2.12), то

$$W = \frac{D^2 V}{2\varepsilon \varepsilon_0}. \quad (2.85)$$

Для однородного электростатического поля можно ввести понятие объемной плотности энергии  $\omega$ , или энергии в единице объема пространства:

$$\omega = \frac{W}{V}. \quad (2.86)$$

Тогда из (2.84) и (2.85) следует, что объемная плотность энергии электростатического поля равна:

$$\omega = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon \varepsilon_0}. \quad (2.87)$$

В общем случае электростатическое поле не является однородным. Энергия такого поля, заключенная в объеме  $V$ , определяется следующим образом:

$$W = \int_V \omega dV. \quad (2.88)$$

## 2.2. Законы постоянного тока

*Электрический ток – упорядоченное движение электрических зарядов.*

Для возникновения электрического тока необходимо:

- наличие свободных электрических зарядов;
- наличие электрического поля.

### 2.2.1. Сила тока. Плотность тока

Электрический ток принято характеризовать скалярной физической величиной  $i$ , называемой силой тока.

*Сила тока численно равна заряду, переносимому через поперечное сечение проводника в единицу времени:*

$$i = \frac{dq}{dt}. \quad (2.89)$$

*За направление электрического тока принимается направление движения положительных зарядов.*

В общем случае в создании электрического тока могут принимать два типа носителей зарядов (например, жидкие проводники). В этом случае

$$i = \frac{dq_+}{dt} + \frac{dq_-}{dt}. \quad (2.90)$$

Сила тока не полностью характеризует электрический ток, так как этот ток может быть неравномерно распределен по поверхности, через которую протекает.

*Более полно электрический ток характеризует векторная физическая величина  $\vec{j}$ , которая называется плотностью тока.*

Направление вектора плотности тока совпадает с направлением скорости движения положительных зарядов ( $\vec{j} \uparrow \uparrow \vec{v}_+$ ).

Рассмотрим некоторую произвольную поверхность  $S$ , через которую протекает электрический ток (рис. 2.36). Выберем на этой поверхности бесконечно малый участок  $ds$ , проведем к этому участку вектор единичной нормали  $\vec{n}$  и введем вектор  $d\vec{s} = \vec{n}ds$ .

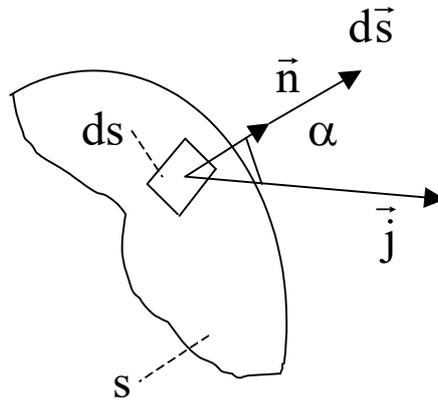


Рис. 2.36

Сила тока  $di$ , протекающего через элементарный участок поверхности  $ds$ , равна:

$$di = \vec{j} d\vec{s}, \quad (2.91)$$

или

$$di = j ds \cos \alpha. \quad (2.92)$$

Если угол  $\alpha = 0$ , то из (2.92) следует, что

$$j = \frac{di}{ds_{\perp}}. \quad (2.93)$$

*Плотность тока в данной точке проводника численно равна силе тока, протекающего через единичную площадку, расположенную в этой точке перпендикулярно направлению скорости движения положительных зарядов.*

Сила тока, протекающего через всю поверхность S, равна:

$$i = \int_S \vec{j} d\vec{s}. \quad (2.94)$$

Для вектора  $\vec{j}$  можно ввести понятие линий тока (рис. 2.37). Эти линии проводятся таким образом, чтобы касательная в каждой ее точке совпадала с направлением вектора плотности тока в этой точке.

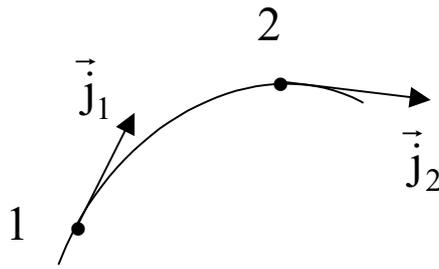


Рис. 2.37

Линии тока обладают следующими свойствами:

- не пересекаются (следствие однозначности плотности тока в данной точке проводника);
- интеграл (2.94) определяет число линий тока, пронизывающих поверхность  $S$ .

*Если сила тока неизменна во времени, то такой электрический ток называется постоянным током.*

В случае постоянного тока силу тока будем обозначать буквой  $I$ , тогда выражение (2.79) приобретает следующий вид:

$$I = \frac{q}{\Delta t}. \quad (2.95)$$

В дальнейшем будем изучать свойства постоянного тока.

### 2.2.2. Закон Ома для однородного участка цепи в интегральной форме

*Однородный участок цепи – это такой участок, где на свободные электрические заряды действуют только силы электрического поля (рис. 2.38).*

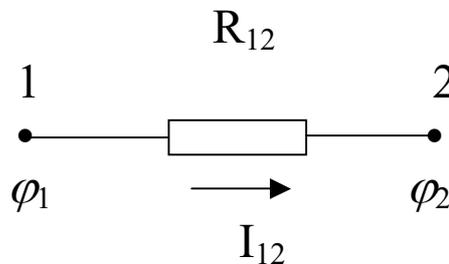


Рис. 2.38

Г. Ом в 1826 г. экспериментально установил закон, согласно которому *сила тока, протекающего в однородном участке цепи, прямо пропорциональна разности потенциалов на концах этого участка:*

$$I_{12} = \sigma_{12} (\varphi_1 - \varphi_2), \quad (2.96)$$

где  $\sigma_{12}$  – электропроводность однородного участка цепи.

Если учесть, что электропроводность участка цепи связана с электросопротивлением  $R_{12}$  этого участка соотношением:

$$\sigma_{12} = \frac{1}{R_{12}}, \quad (2.97)$$

то закон Ома для однородного участка цепи (2.96) имеет следующий вид:

$$I_{12} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_{12}}. \quad (2.98)$$

Так как в выражениях (2.96) и (2.98) присутствуют характеристики разных точек участка цепи, то рассматриваемый закон носит название закона Ома для однородного участка цепи в интегральной форме.

### 2.2.3. Электросопротивление проводников

*Электросопротивление проводников зависит от их формы, размеров, материала, из которого они изготовлены, и внешних условий (температуры).*

Электросопротивление проводника постоянного поперечного сечения, изготовленного из однородного материала, равно:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (2.99)$$

где  $\rho$  – удельное электросопротивление проводника;  $l$  – длина проводника;  $S$  – площадь поперечного сечения проводника.

Согласно (2.99), *удельное электросопротивление численно равно электросопротивлению проводника единичной длины и единичного поперечного сечения.*

Удельное электросопротивление является одной из важнейших физических характеристик материала. Оно зависит от физических свойств

материала, из которого изготовлен проводник, и температуры. Поэтому для проводников, изготовленных из разных материалов, оно разное.

При температурах, превышающих  $0^{\circ}\text{C}$ , удельное электросопротивление большинства металлических проводников, находящихся в твердом состоянии, возрастает с повышением температуры по линейному закону:

$$\rho_t = \rho_0(1 + \alpha t), \quad (2.100)$$

где  $\rho_t$  – удельное электросопротивление при  $t^{\circ}\text{C}$ ;  $\rho_0$  – удельное электросопротивление при  $0^{\circ}\text{C}$ ;  $\alpha$  – температурный коэффициент удельного электросопротивления.

Из выражения (2.100) следует, что

$$\alpha = \frac{\rho_t - \rho_0}{\rho_0 t}, \quad (2.101)$$

т.е.  $\alpha$  численно равно изменению относительного удельного электросопротивления проводника при изменении его температуры на один градус.

Проводники бывают двух типов: обычные проводники и сверхпроводники.

Явление сверхпроводимости было открыто в 1911 году Х. Камерлинг-Оннесом. Он обнаружил, что при температуре  $T_k \approx 4,15\text{K}$  удельное электросопротивление ртути скачком уменьшается до нуля.

В настоящее время известны материалы, для которых переход в сверхпроводящее состояние наблюдается при значительно более высоких температурах (явление высокотемпературной сверхпроводимости).

Температурная зависимость удельного электросопротивления для обычных проводников и сверхпроводников изображена на рис. 2.39.

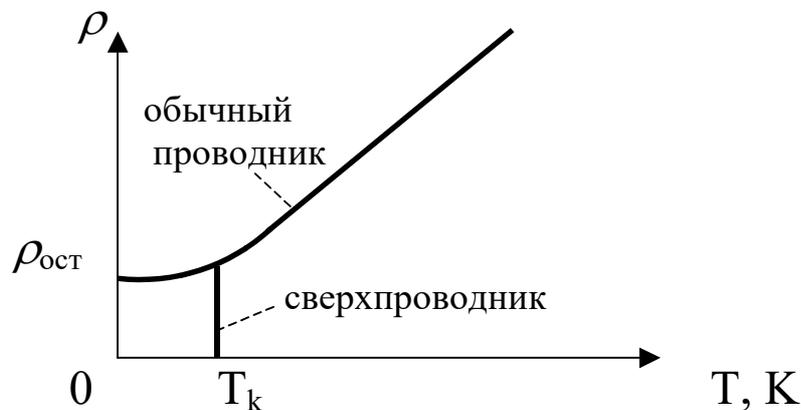


Рис. 2.39

Величина удельного электросопротивления вблизи температуры абсолютного нуля ( $\rho_{\text{ост}}$ ) характеризует качество материала, из которого изготовлен проводник. Чем больше в этом материале различного рода дефектов и примесей, тем выше  $\rho_{\text{ост}}$ .

### 2.2.3.1. Соединение проводников

Существуют два способа соединения проводников: последовательное и параллельное.

1) Последовательное (рис. 2.40).

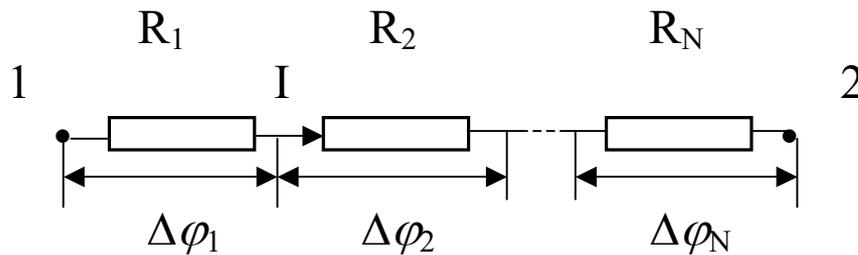


Рис. 2.40

Последовательное соединение проводников обладает следующими свойствами:

- результирующее электросопротивление

$$R_{12} = \sum_{i=1}^N R_i; \quad (2.102)$$

- результирующая разность потенциалов

$$\Delta\varphi_{12} = \sum_{i=1}^N \Delta\varphi_i; \quad (2.103)$$

- результирующая сила тока

$$I = I_1 = I_2 = \dots = I_N. \quad (2.104)$$

2) Параллельное (рис. 2.41).

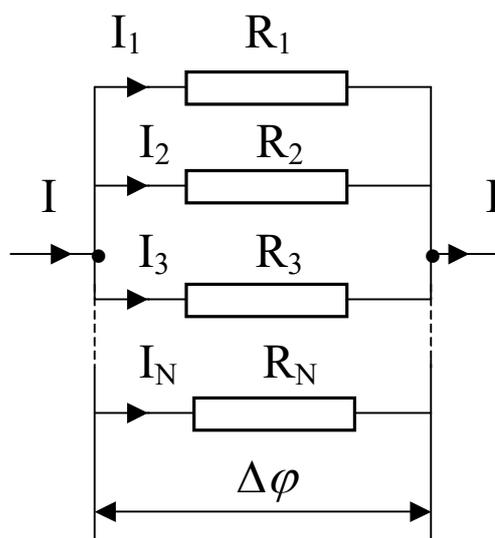


Рис. 2.41

Свойства параллельного соединения проводников:

- результирующее электросопротивление

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}; \quad (2.105)$$

- результирующая разность потенциалов

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 = \dots = \Delta\varphi_N; \quad (2.106)$$

- результирующая сила тока

$$I = \sum_{i=1}^N I_i. \quad (2.107)$$

Последовательное соединение проводников можно использовать в качестве делителя напряжения, а параллельное – делителя тока.

2.2.4. Закон Ома для однородного участка цепи в дифференциальной форме

Рассмотрим бесконечно малый участок проводника в форме цилиндра (рис. 2.42).

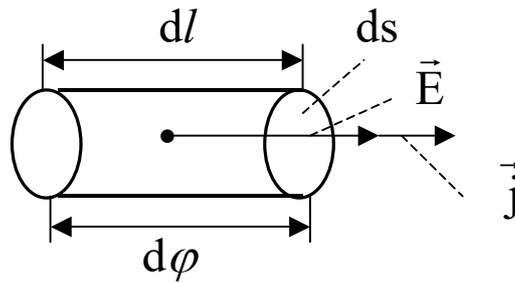


Рис. 2.42

Электрическое поле, напряженность которого равна  $\vec{E}$ , создает на концах проводника длиной  $dl$  разность потенциалов

$$d\varphi = E \cdot dl. \quad (2.108)$$

В проводнике протекает электрический ток

$$dI = j \cdot ds. \quad (2.109)$$

Электрическое сопротивление проводника равно:

$$R = \frac{\rho dl}{ds}. \quad (2.110)$$

Закон Ома для однородного участка цепи (2. 88) для нашего проводника имеет следующий вид:

$$dI = \frac{d\varphi}{R}. \quad (2.111)$$

С учетом соотношений (2.108) – (2.110), из (2.111) следует, что

$$j = \frac{E}{\rho}.$$

Так как векторы  $\vec{j}$  и  $\vec{E}$  параллельны, то

$$\vec{j} = \frac{\vec{E}}{\rho}. \quad (2.112)$$

Формула (2.112) выражает закон Ома для однородного участка цепи в дифференциальной форме: *плотность тока в данной точке проводника прямо пропорциональна напряженности электрического поля в этой же точке.*

Величина  $1/\rho$  определяет удельную электропроводность проводника  $\sigma_{уд}$ .

2.2.5. Закон Джоуля - Ленца в интегральной и дифференциальной формах. Работа и мощность тока

Если по проводнику протекает электрический ток, то энергия этого тока может расходоваться на нагрев проводника, движение проводника (при наличии магнитного поля) и на химические реакции, которые могут происходить в проводнике под действием тока.

*Если проводник неподвижен и под действием электрического тока химические реакции не происходят, то единственным результатом протекания тока в проводнике будет его нагрев.*

Дж.П. Джоуль и Э.Х. Ленц независимо друг от друга установили закон, позволяющий определить количество теплоты, которое выделяется в проводнике под действием электрического тока за время  $\Delta t$  в этом случае (рис. 2.43):

$$Q_{12} = I_{12}^2 \cdot R_{12} \cdot \Delta t. \quad (2.113)$$

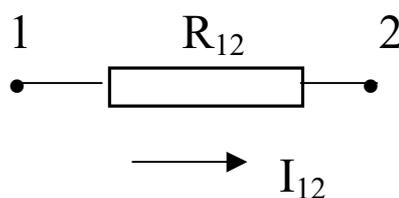


Рис. 2.43

Формула (2.113) является законом Джоуля – Ленца в интегральной форме: *количество теплоты, выделяющееся в проводнике под действием электрического тока, прямо пропорционально квадрату силы тока, сопротивлению проводника и времени, в течение которого протекал электрический ток.*

Выделение в проводнике теплоты в данном случае происходит за счет работы тока. Поэтому из закона сохранения энергии следует, что работу,

совершаемую электрическим током, можно определить по выражению (2.113), т.е.

$$A_{12} = I_{12}^2 \cdot R_{12} \cdot \Delta t. \quad (2.114)$$

Мощность постоянного тока равна:

$$N = \frac{A_{12}}{\Delta t} = I_{12}^2 \cdot R_{12}. \quad (2.115)$$

Если по проводнику протекает переменный электрический ток, то

$$A_{12} = \int_{t_1}^{t_2} i^2 R dt. \quad (2.116)$$

Получим закон Джоуля - Ленца в дифференциальной форме.

Рассмотрим бесконечно малый участок проводника в форме цилиндра (рис. 2.42).

Пусть по проводнику протекает постоянный ток. За бесконечно малый промежуток времени  $dt$  в этом проводнике выделится следующее количество теплоты:

$$dQ = (dI)^2 \cdot R \cdot dt. \quad (2.117)$$

Если подставить в это выражение соотношения (2.109), (2.110), (2.112) и учесть, что объем проводника  $dV = ds \cdot dl$ , то

$$dQ = \frac{E^2}{\rho} dv dt. \quad (2.118)$$

Обозначим

$$\frac{dQ}{dv dt} = \omega, \quad (2.119)$$

где  $\omega$  – плотность тепловой мощности, или количество теплоты, выделяемое в единице объема проводника в единицу времени.

Таким образом,

$$\omega = \frac{E^2}{\rho} . \quad (2.120)$$

Формула (2.120) описывает закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме: *плотность тепловой мощности в данной точке проводника прямо пропорциональна квадрату напряженности электрического поля в этой же точке.*

### 2.2.6. ЭДС источника тока, разность потенциалов и напряжение

Чтобы в проводнике протекал электрический ток необходимо наличие электрического поля.

Создать электрическое поле внутри проводника можно за счет разделения в этом проводнике электрических зарядов противоположного знака.

Эту работу силы электрического поля совершить не могут.

*Силы, разделяющие электрические заряды внутри проводников и создающие в них электрическое поле, называются сторонними силами.*

Природа сторонних сил может быть любой, но только не электрической.

*Устройства, в которых действуют сторонние силы, называются источниками тока.*

В любой замкнутой цепи можно выделить не только однородные, но и неоднородные участки цепи.

*Неоднородный участок цепи – это такой участок, где на свободные электрические заряды действуют как силы электрического поля, так и сторонние силы.*

Неоднородный участок цепи, в отличие от однородного, содержит источник тока.

Рассмотрим неоднородный участок цепи 1 – 2 (рис. 2.44).

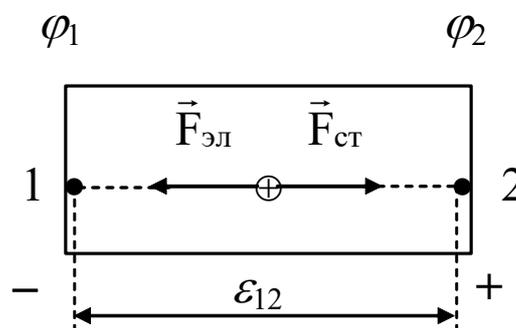


Рис. 2.44

Работу сторонних сил по разделению электрических зарядов на участке цепи 1 – 2 принято характеризовать эдс  $\mathcal{E}_{12}$ , действующей на этом участке.

ЭДС, действующая на участке цепи 1 – 2, численно равна работе, которую совершают сторонние силы по переносу единичного положительного точечного заряда из точки 1 в точку 2:

$$\mathcal{E}_{12} = \frac{A_{\text{ст}12}}{q_+}. \quad (2.121)$$

Разность потенциалов на участке цепи  $\varphi_1 - \varphi_2$  определяется работой сил электрического поля по переносу электрических зарядов на этом участке.

Разность потенциалов на участке цепи 1 – 2 численно равна работе, которую совершают силы электростатического поля по переносу единичного положительного точечного заряда из точки 1 в точку 2:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{\text{эл}12}}{q_+}. \quad (2.122)$$

Совместную работу сил электрического поля и сторонних сил по переносу электрических зарядов на участке цепи 1 – 2 характеризует напряжение  $U_{12}$  на этом участке:

$$U_{12} = \frac{A_{\text{ст}12}}{q_+} + \frac{A_{\text{эл}12}}{q_+}, \quad (2.123)$$

откуда

$$U_{12} = \mathcal{E}_{12} + \varphi_1 - \varphi_2. \quad (2.124)$$

Таким образом, несмотря на то, что напряжение, разность потенциалов и эдс измеряются в вольтах, физический смысл этих величин различен.

В частном случае, если участок цепи является однородным ( $\mathcal{E}_{12} = 0$ ), то

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2.$$

2.2.7. Закон Ома для неоднородного участка цепи  
Рассмотрим неоднородный участок цепи (рис. 2.45).

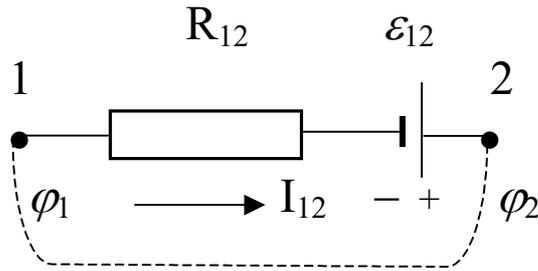


Рис. 2.45

Элементарная работа  $dA$ , которая совершается силами электрического поля и сторонними силами при переносе электрического заряда  $dq$  из точки 1 в точку 2, равна:

$$dA = dq(\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12}dq. \quad (2.125)$$

С другой стороны, согласно закону Джоуля-Ленца эта работа

$$dA = I_{12}^2 \cdot R_{12} \cdot dt = \underbrace{I_{12} \cdot dt}_{dq} \cdot I_{12} \cdot R_{12}. \quad (2.126)$$

Приравнивая формулы (2.125) и (2.126), имеем:

$$I_{12} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}}{R_{12}}. \quad (2.127)$$

Соотношение (2.127) является законом Ома для неоднородного участка цепи.

Если учесть, что  $\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12} = U_{12}$ , то этот закон можно записать и в следующей форме:

$$I_{12} = \frac{U_{12}}{R_{12}}. \quad (2.128)$$

Для практического использования формулы (2.127), необходимо предварительно произвольно выбрать направление обхода неоднородного

участка цепи (т.е. положение точек 1 и 2) и после этого соблюдать следующее правило знаков:

- сила тока  $I_{12}$  берется со знаком (+), если ток протекает от точки 1 к точке 2 (как изображено на рис. 2.45);
- эдс  $\mathcal{E}_{12}$  берется со знаком (+), если при перемещении от точки 1 к точке 2 эдс проходят в сторону повышения потенциала, т.е. от (-) к (+) (как изображено на рис. 2.45).

2.2.7. 1. Следствия из закона Ома для неоднородного участка цепи

2.2.7.1.1. Непотенциальный характер поля сторонних сил

Рассмотрим замкнутую электрическую цепь. Для этого соединим точки 1 и 2 (см. рис. 2.45).

Для замкнутой цепи вводят понятие об эдс  $\mathcal{E}$ , действующей в замкнутой цепи.

*ЭДС, действующая в замкнутой цепи, численно равна работе сторонних сил по переносу единичного положительного точечного заряда по этой замкнутой цепи:*

$$\mathcal{E} = \frac{A_{\text{ост}}}{q_+}. \quad (2.129)$$

Работа сторонних сил по переносу электрического заряда по замкнутой цепи равна:

$$A_{\text{ост}} = \oint_l \vec{F}_{\text{ст}} d\vec{l}. \quad (2.130)$$

Для поля сторонних сил, по аналогии с электростатическим полем, можно ввести понятие напряженности поля сторонних сил:

$$\vec{E}_{\text{ст}} = \frac{\vec{F}_{\text{ст}}}{q_+}, \quad (2.131)$$

тогда

$$\mathcal{E} = \oint_l \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l}. \quad (2.132)$$

*ЭДС, действующая в замкнутой цепи, равна циркуляции вектора напряженности поля сторонних сил.*

Если цепь замкнута, то работа по переносу электрических зарядов в цепи определяется только работой сторонних сил. Для такой цепи (см. рис. 2.45)  $\varphi_1 = \varphi_2$ , и работа сил электрического поля по переносу зарядов равна нулю. По этой причине

$$\oint_l \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l} \neq 0. \quad (2.133)$$

*Так как циркуляция вектора напряженности поля сторонних сил не равна нулю, то поле сторонних сил не является потенциальным полем.*

#### 2.2.7.1.2. Закон Ома для замкнутой цепи

Так как для замкнутой цепи  $\varphi_1 = \varphi_2$ , то формула (2.127) может быть записана следующим образом:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}, \quad (2.134)$$

где  $R$  – полное электрическое сопротивление замкнутой цепи, равное сумме электрических сопротивлений внутреннего ( $R_{\text{внутр}}$ ) и внешнего ( $R_{\text{внеш}}$ ) участков цепи.

Формула (2.134) является законом Ома для полной или замкнутой цепи.

#### 2.2.7.1.3. Разность потенциалов на концах разомкнутого источника

Если цепь разомкнута, то  $I_{12} = 0$ . В этом случае из закона Ома для неоднородного участка цепи следует, что

$$\mathcal{E} = |\varphi_1 - \varphi_2|, \quad (2.135)$$

*т.е. эдс равна по модулю разности потенциалов на концах разомкнутого источника.*

#### 2.2.8. Расчет электрических цепей. Правила Кирхгофа

Для того чтобы рассчитать электрическую цепь необходимо найти величину и направление токов в каждой ветви этой цепи.

Расчет электрических цепей удобно вести с помощью правил Кирхгофа.

Существуют два правила Кирхгофа: одно для узлов цепи, а второе – для замкнутых контуров цепи.

- Для узлов

Узел – это точка, в которой сходятся три и более проводников (рис. 2.46).

При использовании первого правила Кирхгофа предполагается, что если ток втекает в узел, то  $I > 0$ , а если вытекает из узла, то  $I < 0$  (см. рис. 2.46).

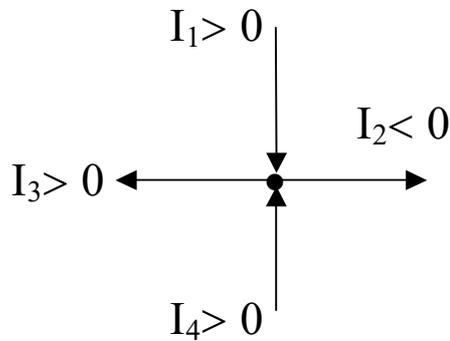


Рис. 2.46

Первое правило Кирхгофа заключается в следующем: *алгебраическая сумма токов в узле равна нулю*:

$$\sum_i I_i = 0. \quad (2.136)$$

Это правило является следствием того, что при протекании по цепи электрического тока в узлах цепи не происходит накопления электрических зарядов. Поэтому разность потенциалов между любыми узлами цепи с течением времени не изменяется.

Если цепь содержит  $N$  узлов, то по первому правилу Кирхгофа можно составить  $N - 1$  независимое уравнение.

- Для замкнутых контуров

Рассмотрим произвольный замкнутый контур цепи (рис. 2.47).

Произвольно выберем направление обхода этого замкнутого контура и запишем закон Ома для неоднородного участка цепи для каждой ветви контура:

$$\begin{aligned} U_1 &= I_1 R_1 = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_1 \\ + U_2 &= I_2 R_2 = \varphi_2 - \varphi_3 + \varepsilon_2 \\ U_3 &= I_3 R_3 = \varphi_3 - \varphi_4 + \varepsilon_3 \\ U_4 &= I_4 R_4 = \varphi_4 - \varphi_1 + \varepsilon_4 \end{aligned}$$

$$\sum_i U_i = \sum_k \varepsilon_k. \quad (2.137)$$

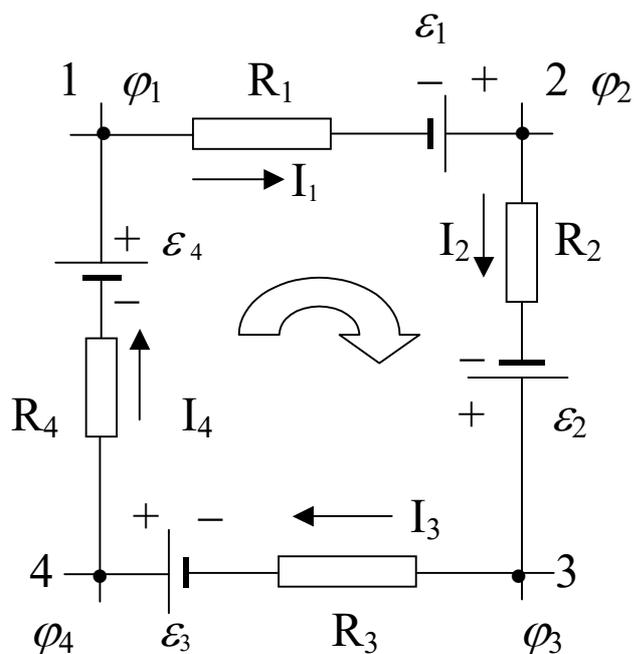


Рис. 2.47

Формула (2.137) выражает собой второе правило Кирхгофа: *алгебраическая сумма напряжений на всех участках замкнутого контура равна алгебраической сумме эдс, действующих в этом замкнутом контуре.*

Расчет электрических цепей удобно выполнять в следующей последовательности:

- определяем число узлов в цепи и выбираем произвольным образом направление токов в ветвях, однако так, чтобы не нарушить первое правило Кирхгофа (должны быть токи как втекающие в узел, так и вытекающие из него);
- составляем соответствующее число уравнений по первому правилу Кирхгофа;
- определяем число замкнутых контуров цепи и произвольным образом выбираем направление их обхода;
- составляем необходимое число уравнений по второму правилу Кирхгофа;
- решаем полученную систему уравнений относительно токов.

Если при решении этой системы уравнений какой-либо ток оказался со знаком (–), то это указывает на то, что в самом начале направление этого тока было выбрано неверно.

## 2.3. Магнетизм

### 2.3.1. Характер электрического и магнитного взаимодействий электрических зарядов

Взаимодействие неподвижных электрических зарядов является электростатическим взаимодействием.

Движущиеся электрические заряды (или токи) испытывают магнитное взаимодействие.

Характер взаимодействия неподвижных и движущихся электрических зарядов различен.

Если взять два неподвижных положительных точечных электрических заряда, то между этими зарядами действуют силы взаимного отталкивания (см. рис. 2.48).

Однако если по двум параллельным проводникам протекает электрический ток одного направления, то проводники испытывают взаимное притяжение. Это является следствием взаимного притяжения одноименных электрических зарядов, движущихся в одном направлении.

Данное несоответствие сил взаимодействия неподвижных и движущихся электрических зарядов нельзя объяснить с позиции классической механики.

Согласно законам динамики, характер взаимодействия между неподвижными зарядами должен быть аналогичен характеру взаимодействия зарядов, движущихся равномерно и прямолинейно.

Указанное противоречие в характере взаимодействия неподвижных и движущихся электрических зарядов можно объяснить, используя закон Кулона и релятивистские поправки к этому закону.

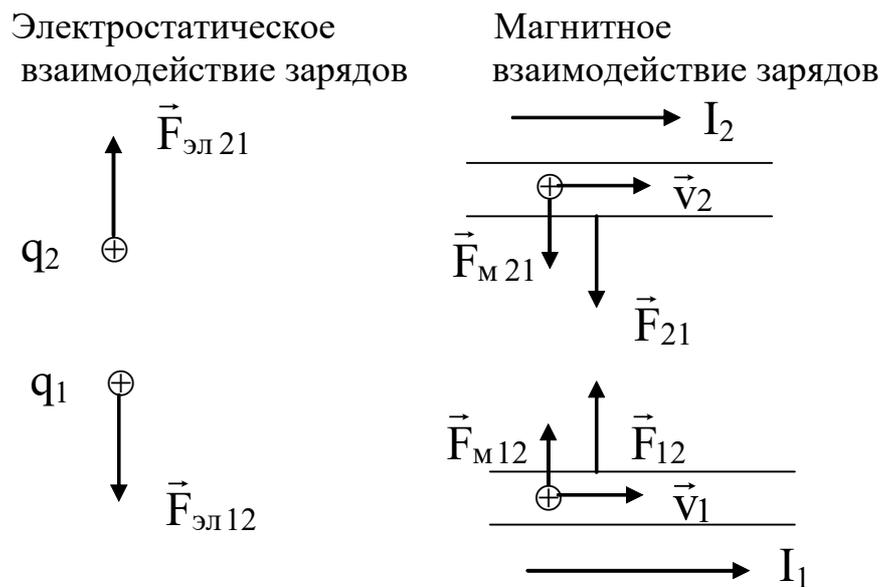


Рис. 2.48

### 2.3.2. Электромагнитное взаимодействие двух движущихся электрических зарядов

Рассмотрим инерциальную систему отсчета  $K$ .

Пусть в этой системе отсчета имеются два одноименных точечных заряда  $q_1$  и  $q_2$ , которые движутся в вакууме вдоль оси  $X$  с одинаковой скоростью  $\vec{V}$  (см. рис. 2.49).

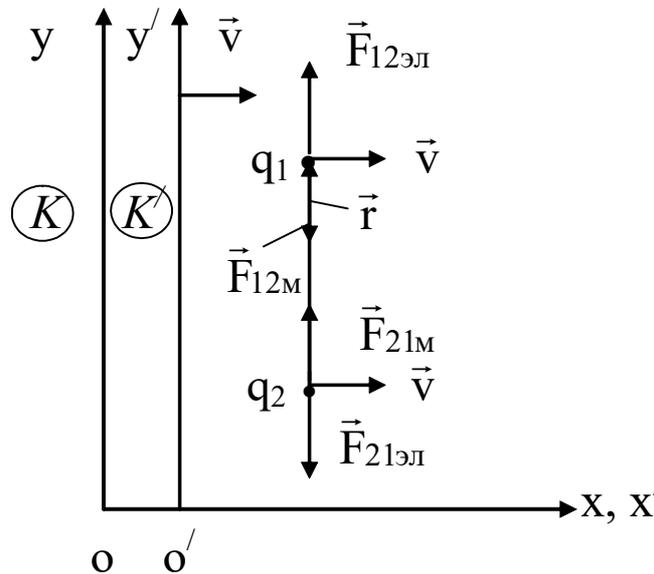


Рис. 2.49

Введем инерциальную систему отсчета  $K'$ , которая движется относительно системы отсчета  $K$  вдоль оси  $X$  с той же скоростью  $\vec{V}$ , что и заряды  $q_1$  и  $q_2$  (рис. 2.49).

В системе отсчета  $K'$  заряды неподвижны. Поэтому силу их взаимодействия можно определить по закону Кулона:

$$\vec{F}'_{21} = \frac{q_1 q_2 \vec{r}'}{4\pi \epsilon_0 r'^3}. \quad (2.138)$$

В теории относительности показано, что поперечная составляющая силы при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой преобразуется по следующему закону:

$$F_y = F'_y \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (2.139)$$

Учитывая, что сила Кулона (2.138) в рассматриваемом случае является поперечной силой (она перпендикулярна направлению движения системы

отсчета  $K$ ), а вектор  $\vec{r}' = \vec{r}$  (поперечные размеры тел не изменяются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой), то из формул (2.138) и (2.139) следует, что в системе отсчета  $K$  сила, действующая на заряд  $Q_2$  со стороны заряда  $Q_1$ , равна:

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2 \vec{r}}{4\pi \varepsilon_0 r^3} \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (2.140)$$

Если умножить и разделить выражение (2.140) на  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ , то силу  $\vec{F}_{21}$  можно представить в виде следующих двух слагаемых:

$$\vec{F}_{21} = \underbrace{\frac{q_1 q_2 \vec{r}}{4\pi \varepsilon_0 r^3 \sqrt{1 - v^2/c^2}}}_{\vec{F}_{21\text{эл}}} + \underbrace{\left(-\frac{v^2}{c^2}\right) \frac{q_1 q_2 \vec{r}}{4\pi \varepsilon_0 r^3 \sqrt{1 - v^2/c^2}}}_{\vec{F}_{21\text{м}}}. \quad (2.141)$$

Проанализируем выражение (2.141).

Первое слагаемое описывает силу электрического взаимодействия зарядов  $\vec{F}_{21\text{эл}}$  и при  $v = 0$  выражает собой закон Кулона.

Второе слагаемое вносит вклад в силу взаимодействия зарядов только в том случае, если скорость их движения не равна нулю. По этой причине это слагаемое описывает силу магнитного взаимодействия электрических зарядов  $\vec{F}_{21\text{м}}$ .

Таким образом, сила  $\vec{F}_{21}$  в соотношении (2.141) характеризует силу электромагнитного взаимодействия двух точечных электрических зарядов:

$$\vec{F}_{21\text{эм}} = \vec{F}_{21\text{эл}} + \vec{F}_{21\text{м}}. \quad (2.142)$$

Из формул (2.141) и (2.142) следуют важные выводы:

- электрическое и магнитное взаимодействия нельзя противопоставлять друг другу, так как они являются проявлением единого электромагнитного взаимодействия (представление электромагнитного взаимодействия в виде электрического или магнитного носит условный характер и зависит от выбора системы отсчета);
- $\vec{F}_{\text{эл}} \updownarrow \vec{F}_{\text{м}}$  (см. рис. 2.49);

$$\bullet \quad \left| \frac{F_{\text{эл}}}{F_{\text{м}}} \right| = \frac{c^2}{v^2}.$$

Следствием последнего вывода является то, что если  $v \ll c$ , то  $F_{\text{эл}} \gg F_{\text{м}}$ . В этом случае магнитным взаимодействием электрических зарядов можно пренебречь по сравнению с их электрическим взаимодействием. Однако, если электрическое взаимодействие зарядов полностью скомпенсировано, то их электромагнитное взаимодействие определяется только магнитной составляющей. Подобная ситуация имеет место при взаимодействии проводников с током (см. рис. 2.48).

В общем случае электрические заряды движутся с разными скоростями ( $\vec{v}_1 \neq \vec{v}_2$ ). Однако в любом случае магнитная сила, действующая на заряд, всегда перпендикулярна скорости его движения ( $\vec{F}_{\text{м}} \perp \vec{v}$ ).

### 2.3.3. Магнитное взаимодействие двух движущихся электрических зарядов

Согласно соотношению (2.141), магнитная сила, действующая на заряд  $q_2$  со стороны заряда  $q_1$ , равна:

$$\vec{F}_{21\text{м}} = \left( -\frac{v^2}{c^2} \right) \frac{q_1 q_2 \vec{r}}{4\pi \epsilon_0 r^3 \sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (2.143)$$

Обозначим

$$\frac{1}{c^2 \epsilon_0} = \mu_0. \quad (2.144)$$

После подстановки в это соотношение численных значений констант получим, что постоянная величина  $\mu_0$ , называемая магнитной постоянной, равна:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}. \quad (2.145)$$

Если скорость движения электрических зарядов  $v \ll c$ , то из выражения (2.143) следует, что:

$$\vec{F}_{21\text{м}} = -\frac{\mu_0 v^2 q_1 q_2 \vec{r}}{4\pi r^3}. \quad (2.146)$$

Соотношение  $(-\mathbf{v}^2 \vec{r})$  можно представить в виде двойного векторного произведения:

$$-\mathbf{v}^2 \vec{r} = [\vec{v} \times [\vec{v} \times \vec{r}]] = \vec{v} \underbrace{(\vec{v} / r)}_{0 \text{ } (\vec{v} \perp \vec{r})} - \vec{r} \underbrace{(\vec{v} \cdot \vec{v})}_{v^2} = -\mathbf{v}^2 \vec{r}. \quad (2.147)$$

С учетом сделанных замечаний магнитная сила, действующая на второй электрический заряд со стороны первого при движении зарядов  $Q_1$  и  $Q_2$  в вакууме, имеет следующий вид:

$$\vec{F}_{21m} = \frac{\mu_0 Q_1 Q_2}{4\pi r^3} [\vec{v} \times [\vec{v} \times \vec{r}]]. \quad (2.148)$$

Если выполнить расчеты для случая движения электрических зарядов  $Q_1$  и  $Q_2$  с разными скоростями, то получим, что магнитные силы, действующие на эти заряды, определяются формулами:

$$\vec{F}_{21m} = \frac{\mu_0 Q_1 Q_2}{4\pi r^3} [\vec{v}_2 \times [\vec{v}_1 \times \vec{r}]]; \quad (2.149)$$

$$\vec{F}_{12m} = \frac{\mu_0 Q_1 Q_2}{4\pi r^3} [\vec{v}_1 \times [\vec{v}_2 \times \vec{r}]]. \quad (2.150)$$

2.3.4. Магнитное поле. Индукция магнитного поля движущегося электрического заряда

Движущийся электрический заряд (или ток) создает в окружающем пространстве магнитное поле.

*Магнитное поле в данной области пространства можно обнаружить по наличию силы, действующей на другой движущийся электрический заряд (или ток), помещенный в эту область пространства.*

Для характеристики магнитного поля вводится векторная физическая величина  $\vec{B}$ , которая называется индукцией магнитного поля. Индукция является силовой характеристикой магнитного поля.

*Индукция магнитного поля в данной точке пространства численно равна силе, действующей на единичный положительный точечный заряд, помещенный в данную точку пространства и движущийся в этой точке с единичной скоростью перпендикулярно направлению магнитного поля:*

$$B = \frac{|F_i|}{q v_{\perp}}. \quad (2.151)$$

Из экспериментальных данных и формул (2.149) – (2.151) следует, что индукция магнитного поля, создаваемого в вакууме движущимся точечным электрическим зарядом  $Q$  в любой точке пространства, равна:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 Q}{4\pi r^3} [\vec{v} \times \vec{r}]. \quad (2.152)$$

В качестве примера на рис. 2.50 показано направление магнитного поля движущихся точечных электрических зарядов  $+q$  и  $-q$  в точке  $A$ .

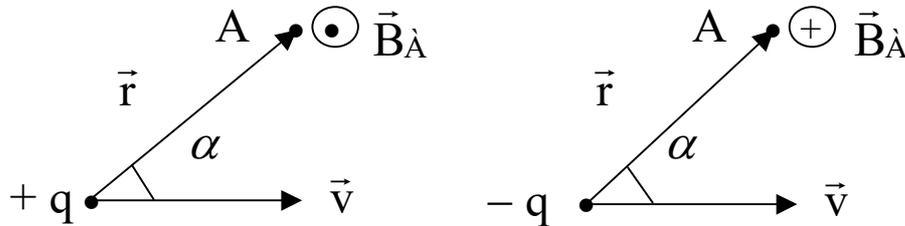


Рис. 2.50

Согласно формуле (2.152), модуль индукции магнитного поля движущегося электрического заряда равен:

$$B = \frac{\mu_0 Q v}{4\pi r^2} \sin \alpha. \quad (2.153)$$

На основании соотношений (2.148) и (2.152) можно сделать вывод о том, что если в магнитном поле  $\vec{B}_1$  электрического заряда  $Q_1$  движется электрический заряд  $Q_2$ , то на этот заряд действует сила

$$\vec{F}_{21M} = q_2 [\vec{v}_2 \times \vec{B}_1]. \quad (2.154)$$

*Сила, действующая в магнитном поле на движущийся электрический заряд, называется силой Лоренца.*

Согласно (2.154), в общем случае сила Лоренца  $\vec{F}_L$  равна:

$$\vec{F}_L = q [\vec{v} \times \vec{B}]. \quad (2.155)$$

### 2.3.5. Магнитное поле тока. Закон Био–Савара–Лапласа (БСЛ)

С практической точки зрения больший интерес представляет не индукция магнитного поля, создаваемого движущимся электрическим зарядом, а индукция магнитного поля тока.

Рассмотрим прямой проводник с током (рис. 2.51).

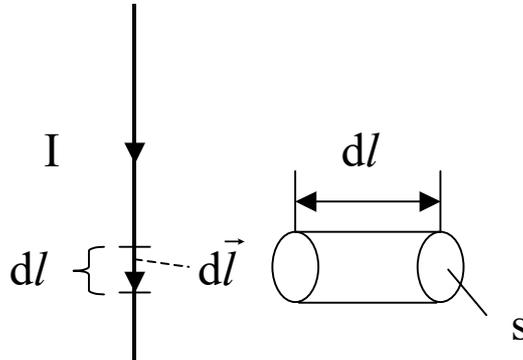


Рис. 2.51

Разобьем проводник на бесконечно малые участки длиной  $dl$  и введем вектор  $d\vec{l}$ , направление которого совпадает с направлением электрического тока в проводнике, а  $|d\vec{l}| = dl$ .

Вектор  $d\vec{l}$  называется элементом тока.

Так как размеры элемента тока очень малы, то результирующий электрический заряд  $dq$ , сосредоточенный на участке  $dl$ , можно считать точечным и применить для расчета индукции магнитного поля  $d\vec{B}$  этого движущегося электрического заряда формулу (2.152):

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 dq}{4\pi r^3} [\vec{v} \times \vec{r}] = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [dq \vec{v} \times \vec{r}]. \quad (2.156)$$

Произведение  $dq \vec{v} = s \cdot dl \cdot n \cdot e \cdot \vec{v}$ , где  $n$  – концентрация электрических зарядов в материале проводника;  $e$  – величина точечного электрического заряда, движущегося на участке  $dl$ ;  $s$  – площадь поперечного сечения проводника.

Модуль вектора плотности тока  $|\vec{j}| = v \cdot n \cdot e$ . Его направление совпадает с направлением тока в проводнике, т.е. с направлением скорости

движения положительных электрических зарядов и направлением вектора  $d\vec{l}$ . Так как  $I = jS$ , то произведение

$$dq\vec{v} = Id\vec{l}. \quad (2.157)$$

С учетом соотношения (2.157) из формулы (2.156) следует, что

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [Id\vec{l} \times \vec{r}]. \quad (2.158)$$

Выражение (2.158) представляет собой закон Био – Савара – Лапласа.

*Закон БСЛ позволяет определить индукцию магнитного поля, создаваемого элементом тока в любой точке пространства (рис. 2.52).*

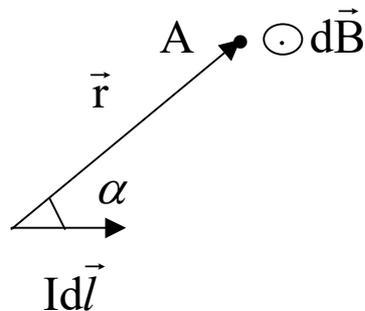


Рис. 2.52

Формула (2.158) применима только для вакуума.

В вакууме модуль индукции магнитного поля элемента тока равен:

$$dB = \frac{\mu_0 Idl}{4\pi r^2} \sin \alpha. \quad (2.159)$$

2.3.6. Принцип суперпозиции. Линии вектора магнитной индукции

Для магнитного поля выполняется принцип суперпозиции (или принцип наложения полей): *каждый электрический ток создает в данной точке пространства магнитное поле независимо от наличия других токов.*

Математически принцип суперпозиции в случае магнитного поля можно записать в следующем виде:

- дискретное распределение токов:

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i; \quad (2.160)$$

- непрерывное распределение токов:

$$\vec{B} = \int_{\text{по всем токам}} d\vec{B} . \quad (2.161)$$

Для магнитного поля можно ввести понятие линий вектора  $\vec{B}$ .  
Эти линии обладают следующими свойствами:

- линии проводятся так, чтобы касательные к ним в каждой точке совпадали по направлению с вектором индукции магнитного поля (рис. 2.53);

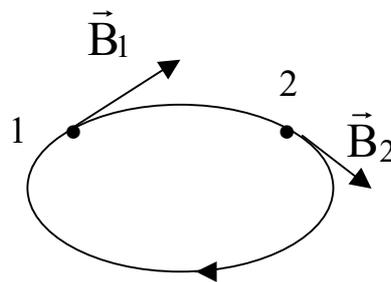


Рис. 2.53

- линии вектора магнитной индукции всегда замкнуты (следствие вихревого характера магнитного поля и отсутствия в природе магнитных зарядов);
- линии вектора магнитной индукции никогда не пересекаются (следствие однозначности индукции магнитного поля в данной точке пространства);
- линии проводятся таким образом, чтобы их число, пронизывающее единичную площадку, расположенную в данной точке пространства перпендикулярно направлению магнитного поля, было равно модулю вектора  $\vec{B}$  в этой точке.

### 2.3.7. Напряженность магнитного поля

Кроме индукции магнитного поля  $\vec{B}$  принято рассматривать также и напряженность магнитного поля  $\vec{H}$ .

Если  $\vec{B}$  характеризует результирующее магнитное поле в веществе, то  $\vec{H}$  характеризует магнитное поле, созданное источниками, являющимися внешними по отношению к рассматриваемому объекту.

Для однородной изотропной среды между напряженностью и индукцией магнитного поля существует следующая взаимосвязь:

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}, \quad (2.162)$$

где  $\mu$  – магнитная проницаемость среды, показывающая во сколько раз индукция магнитного поля в веществе больше, чем в вакууме:

$$\mu = \frac{B^{\text{сред}}}{B^{\text{вак}}} \geq 1. \quad (2.163)$$

С учетом среды закон Био-Савара-Лапласа имеет следующий вид:

$$d\vec{B} = \frac{\mu \mu_0}{4\pi r^3} [I d\vec{l} \times \vec{r}]. \quad (2.164)$$

2.3.8. Применение принципа суперпозиции и закона БСЛ для расчета магнитных полей

*Чтобы рассчитать магнитное поле в данной точке пространства, необходимо определить в этой точке направление и модуль вектора  $\vec{B}$ .*

Расчет магнитного поля можно выполнить, используя принцип суперпозиции и закон БСЛ.

В качестве примера рассчитаем магнитное поле прямого тока.

2.3.8.1. Проводник конечной длины

Рассмотрим прямой проводник конечной длины, по которому протекает постоянный ток  $I$  (рис. 2.54).

Рассчитаем магнитное поле, создаваемое в произвольной точке пространства  $A$ .

Для простоты будем считать, что проводник с током и точка  $A$  лежат в плоскости чертежа.

Разобьем проводник на элементы тока и рассчитаем магнитное поле  $d\vec{B}$ , создаваемое одним элементом тока  $d\vec{l}$  в точке  $A$ .

Положение точки  $A$  относительно элемента тока определяется радиус-вектором  $\vec{r}$ . Кратчайшее расстояние от указанной точки до проводника равно  $r_0$ .

Индукцию магнитного поля  $d\vec{B}$  в точке  $A$  можно определить по закону БСЛ.

Из формулы (2.164) следует, что все элементы тока рассматриваемого проводника в точке  $A$  создают магнитное поле одного

направления (см. рис. 2.54). По этой причине индукция магнитного поля  $\vec{B}$  в точке  $A$  от всего проводника будет направлена так же, как и вектор  $d\vec{B}$ .

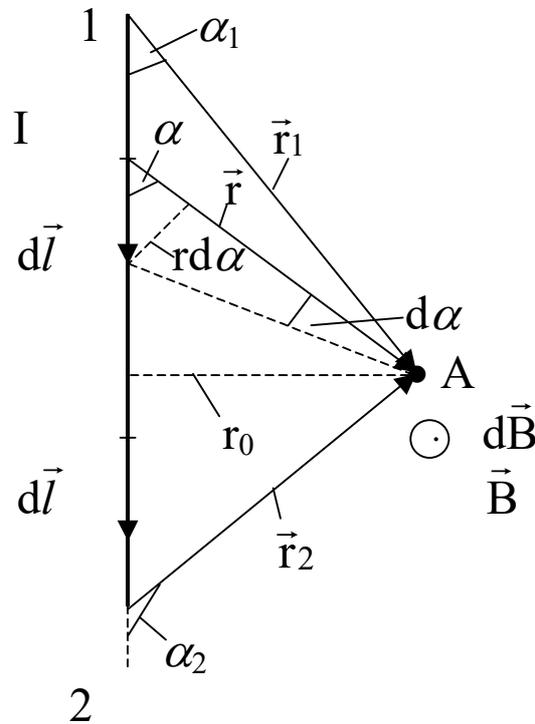


Рис. 2.54

Для того чтобы решить поставленную задачу по расчету магнитного поля, необходимо теперь определить модуль вектора магнитной индукции.

Так как в точке  $A$  векторы  $d\vec{B}$  от всех элементов тока проводника параллельны, то

$$B = \int_1^2 dB = \frac{\mu\mu_0 I^2}{4\pi} \int_1^2 \frac{dl}{r^2} \sin\alpha. \quad (2.165)$$

Чтобы произвести интегрирование, выразим  $dl$  и  $r$  через угол  $\alpha$  (см. рис. 2.54):

$$\sin\alpha = \frac{r_0}{r} \Rightarrow r = \frac{r_0}{\sin\alpha};$$

$$\sin\alpha = \frac{rd\alpha}{dl} \Rightarrow dl = \frac{r_0}{\sin^2\alpha} d\alpha.$$

Если подставить эти значения для  $r$  и  $dl$ , то из (2.165) получим:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha d\alpha,$$

откуда окончательно имеем:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2). \quad (2.166)$$

### 2.3.8.2. Бесконечно длинный проводник

Если длина проводника  $l \rightarrow \infty$ , то из рис. 2.54 следует, что  $\angle\alpha_1 \rightarrow 0$ , а  $\angle\alpha_2 \rightarrow \pi$ . Подставляя эти значения углов в формулу (2.166), получаем, что индукция магнитного поля бесконечно длинного проводника определяется соотношением:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r_0}. \quad (2.167)$$

Из этой формулы следует, что в плоскости, перпендикулярной бесконечно длинному проводнику с током, линии индукции магнитного поля представляют собой концентрические окружности, направление которых можно определить, используя правило правого буравчика (рис. 2.55а).

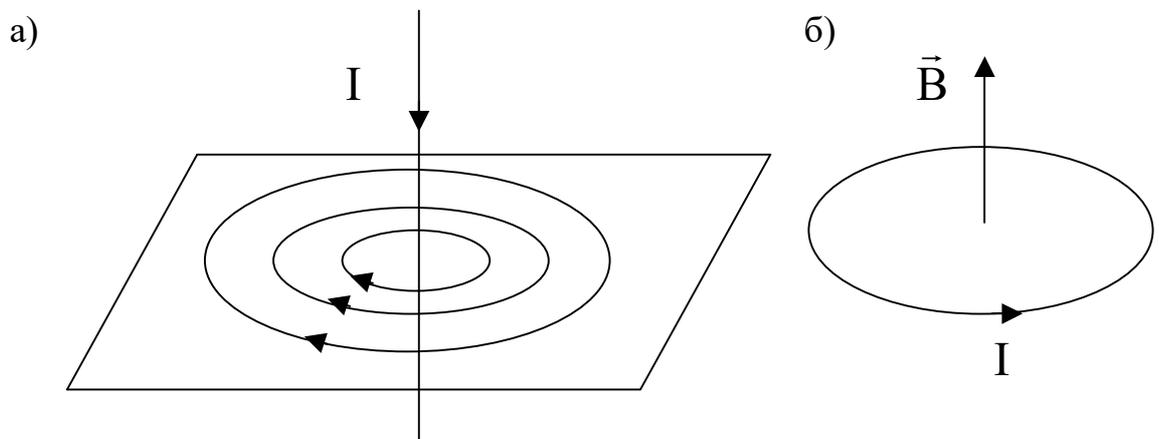


Рис. 2.55

Правило буравчика можно применять и для определения направления магнитного поля на оси кругового тока (рис. 2.55.б).

2.3.9. Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля. Вихревой характер магнитного поля

*Циркуляция вектора индукции магнитного поля, создаваемого системой стационарных токов, равна произведению  $\mu\mu_0$  на алгебраическую сумму токов, охватываемых контуром интегрирования:*

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \mu\mu_0 \sum_i I_i . \quad (2.168)$$

Докажем эту теорему для частного случая, когда замкнутый контур  $l$ , лежащий в плоскости чертежа, охватывает всего один бесконечно длинный прямой проводник с током (рис. 2.56).

Рассчитаем циркуляцию вектора индукции магнитного поля, учитывая формулу (2.167) для индукции магнитного поля бесконечно длинного прямого проводника с током:

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \oint_l B dl \cos \alpha = \oint_l B r d\varphi = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi. \quad (2.169)$$

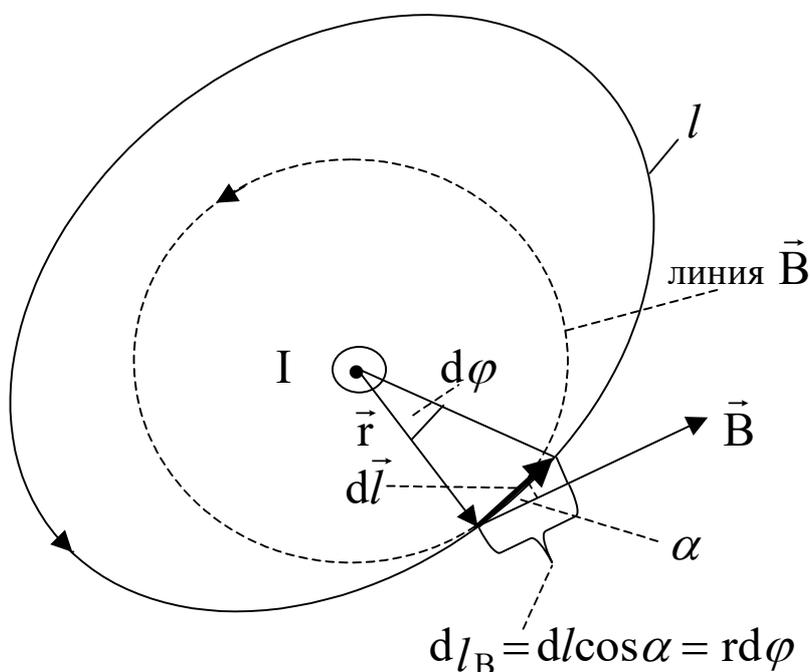


Рис. 2.56

После интегрирования из выражения (2.169) получаем, что в нашем случае  $\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \mu \mu_0 I$ .

Замечания к теореме:

- сила тока берется со знаком (+), если направление тока связано с направлением обхода контура правилом правого буравчика (см. рис. 2.57);

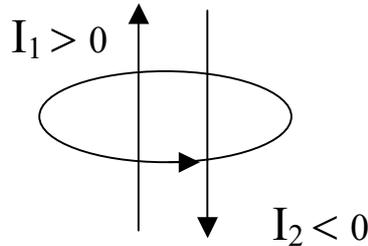


Рис. 2.57

- если замкнутый контур не охватывает тока, то:

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = 0;$$

- если замкнутый контур охватывает контур  $N$  раз, то:

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = N \mu \mu_0 \sum_i I_i. \quad (2.170)$$

*Так как циркуляция вектора индукции магнитного поля в общем случае не равна нулю, то магнитное поле не является потенциальным полем (для магнитного поля нельзя ввести понятие потенциала).*

Теорема о циркуляции – математическое доказательство вихревого характера магнитного поля.

*Следствием вихревого характера магнитного поля является замкнутость линий вектора индукции магнитного поля и отсутствие в природе магнитных зарядов.*

Источниками вихревых магнитных полей являются движущиеся электрические заряды или токи.

### 2.3.9.1. Применение теоремы о циркуляции вектора индукции магнитного поля для расчета магнитных полей

В том случае, когда магнитное поле обладает каким либо видом симметрии, применение теоремы о циркуляции вектора  $\vec{B}$  для расчета магнитного поля существенно упрощает расчет по сравнению с использованием для этих целей закона Био-Савара-Лапласа и принципа суперпозиции.

В качестве примера рассчитаем индукцию магнитного поля, создаваемого бесконечно длинным соленоидом.

Рассмотрим часть сечения такого соленоида (рис. 2.58).

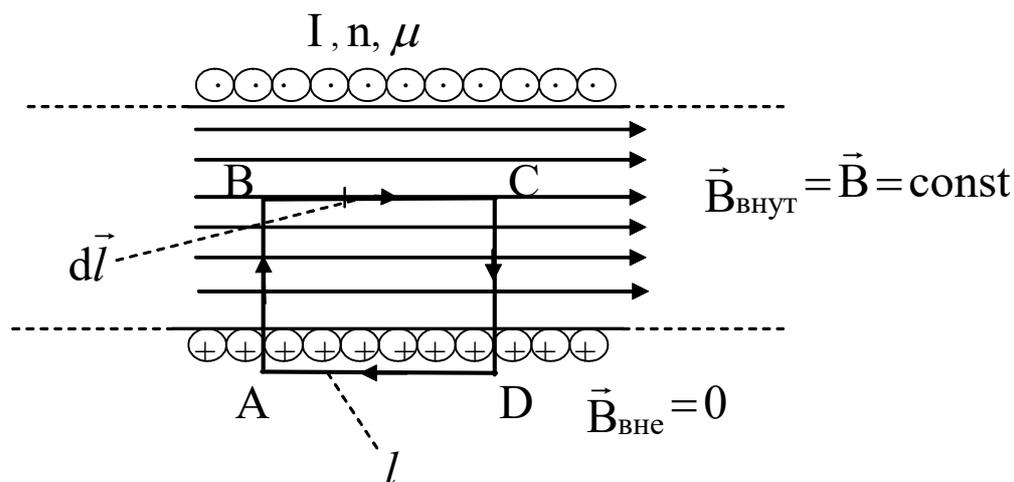


Рис. 2.58

Пусть по виткам соленоида протекает постоянный ток  $I$ . Число витков провода на единице длины соленоида (концентрация витков) равно  $n$ , а магнитная проницаемость окружающей среды  $\mu$ .

Можно показать, что магнитное поле такого соленоида однородно и существует только внутри соленоида. Учитывая этот вид симметрии магнитного поля, выберем замкнутый контур интегрирования в виде прямоугольника  $ABCD$ .

Рассчитаем циркуляцию вектора магнитной индукции для замкнутого контура  $l$ :

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \int_{BC} \vec{B} d\vec{l} + \int_{CD} \vec{B} d\vec{l} + \int_{DA} \vec{B} d\vec{l} + \int_{AB} \vec{B} d\vec{l} = \int_{AB} B dl \cos \alpha = B l_{BC}. \quad (2.171)$$

$0 (\vec{B} \perp d\vec{l})$      $0 (\vec{B}_{\text{вне}} = 0)$      $0 (\vec{B} \perp d\vec{l})$      $1 (\vec{B} \uparrow \uparrow d\vec{l})$

С другой стороны, согласно теореме о циркуляции

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \mu \mu_0 \sum_i I_i = \mu \mu_0 I n l_{BC}. \quad (2.172)$$

Приравнивая соотношения (2.171) и (2.172), окончательно имеем, что индукция магнитного поля внутри бесконечно длинного соленоида равна:

$$B = \mu \mu_0 I n. \quad (2.173)$$

Формулу (2.173) можно использовать для расчета магнитного поля в центральной части реального соленоида, если его длина  $L \geq 10d$ , где  $d$  – диаметр поперечного сечения соленоида, и для расчета модуля индукции магнитного поля внутри тонкого тороида, если под  $n$  понимать число витков на единицу средней линии такого тороида.

### 2.3.10. Закон Ампера

Рассмотрим элемент тока  $d\vec{l}$ , который находится в магнитном поле. Из формулы (2.245) следует, что сила, действующая в магнитном поле на все движущиеся электрические заряды  $dq$ , создающие электрический ток  $I$  в этом элементе тока, равна:

$$d\vec{F} = dq [\vec{v} \times \vec{B}]. \quad (2.174)$$

С учетом соотношения (2.157) эту силу, называемую силой Ампера, можно рассчитать по формуле:

$$d\vec{F}_A = [I d\vec{l} \times \vec{B}]. \quad (2.175)$$

Формула (2.175) выражает собой закон Ампера в дифференциальной форме.

*Закон Ампера (2.175) позволяет определить силу, действующую в магнитном поле на элемент тока (рис. 2.59).*

Модуль силы Ампера равен:

$$dF_A = I dl B \sin \alpha. \quad (2.176)$$

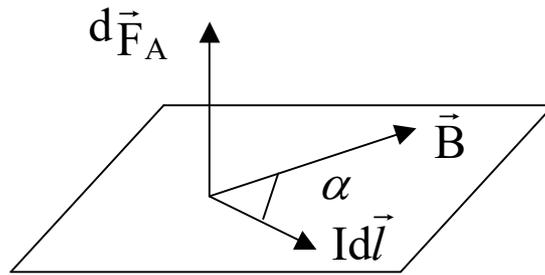


Рис. 2.59

Из (2.176) следует:

- $dF_A = dF_A^{\max} = IdlB$ , если  $\angle \alpha = \pi/2$  ( $d\vec{l} \perp \vec{B}$ )
- $dF_A = 0$ , если  $\angle \alpha = 0$  ( $d\vec{l} \uparrow\uparrow \vec{B}$ ) или  $\angle \alpha = \pi$  ( $d\vec{l} \uparrow\downarrow \vec{B}$ ).
- $$B = \frac{dF_A}{Idl_{\perp}}. \quad (2.177)$$

Соотношение (2.177) позволяет дать еще одно определение физического смысла индукции магнитного поля: *индукция магнитного поля в данной точке пространства численно равна силе, действующей на единичный элемент тока, расположенный в этой точке перпендикулярно направлению магнитного поля.*

### 2.3.10.1. Применение закона Ампера для решения некоторых задач

2.3.10.1.1. Сила, действующая в однородном магнитном поле на прямой проводник с током

Рассмотрим прямой проводник с током, помещенный в однородное магнитное поле так, как это показано на рис. 2.60.

Разобьем весь проводник на элементы тока  $d\vec{l}$  и найдем направление сил Ампера  $d\vec{F}_A$ , действующих на эти элементы тока (см. рис. 2.60).

Для всех элементов тока эти силы сонаправлены. Поэтому результирующая сила  $\vec{F}_A$ , действующая на весь проводник с током в однородном магнитном поле, будет иметь то же направление, что и силы  $d\vec{F}_A$ .

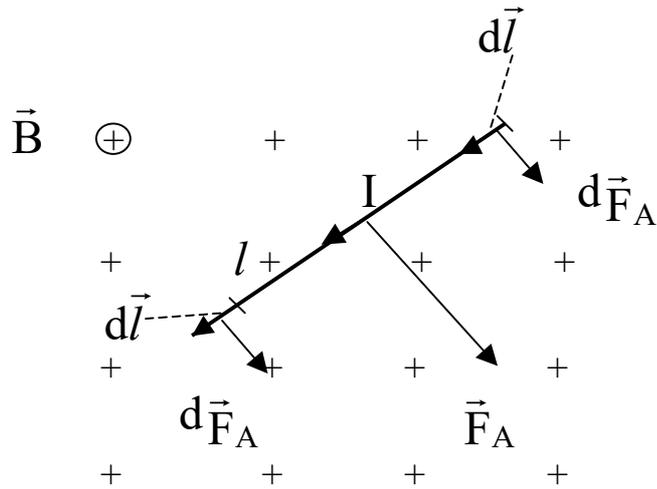


Рис. 2.60

Направление силы  $\vec{F}_A$  можно определить по правилу “левой руки”: *если пальцы левой руки расположить по направлению тока в проводнике так, чтобы линии индукции магнитного поля входили в ладонь, то большой палец покажет направление силы Ампера, действующей на весь проводник.*

Так как  $\vec{B} = \text{const}$  и  $I = \text{const}$ , то модуль результирующей силы Ампера равен:

$$F_A = \int_l dF_A = IB \sin \alpha \int_l dl = IB l \sin \alpha, \quad (2.178)$$

где  $\angle \alpha$  – угол между направлением тока в проводнике и направлением индукции магнитного поля.

#### 2.3.10.1.2. Взаимодействие параллельных токов

Рассмотрим два бесконечно длинных прямых проводника, которые расположены параллельно друг другу на расстоянии  $r_0$ . По проводникам протекают токи  $I_1$  и  $I_2$  в одном направлении (рис. 2.61).

Так как каждый ток создает в окружающем пространстве свое магнитное поле, то первый проводник находится в магнитном поле  $\vec{B}_2$  второго проводника, а второй – в магнитном поле первого проводника  $\vec{B}_1$ .

Используя правило правого буравчика для соответствующих проводников, можно установить направление векторов  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_2$ .

Применяя правило левой руки, найдем направление сил  $\vec{F}_{12}$  и  $\vec{F}_{21}$ , действующих на проводники. Из рис. 2.61 следует, что проводники испытывают взаимное притяжение.

Если токи в проводниках протекают в противоположных направлениях, то они будут испытывать взаимное отталкивание.

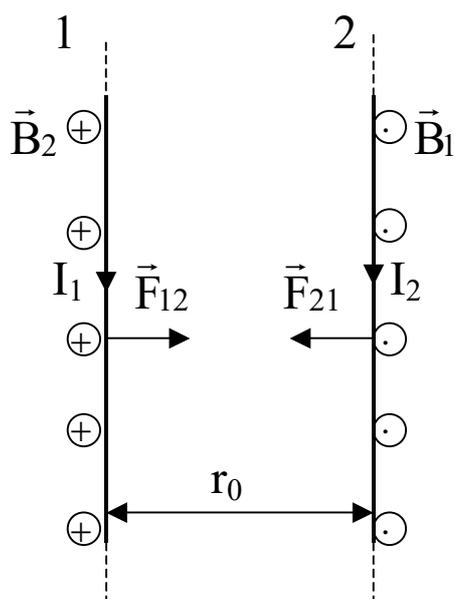


Рис. 2.61

Модуль силы, действующей на участок длиной  $l$  первого проводника

$$F_{12} = I_1 B_2 l. \quad (2.179)$$

Согласно формуле (2.167)

$$B_2 = \frac{\mu \mu_0 I_2}{2\pi r_0}. \quad (2.180)$$

Поэтому сила, действующая на единицу длины первого проводника

$$\frac{F_{12}}{l} = \frac{\mu \mu_0 I_1 I_2}{2\pi r_0}. \quad (2.181)$$

Выполнив аналогичные расчеты, установим, что сила, действующая на единицу длины второго проводника, вычисляется по этой же формуле.

Таким образом, модуль силы, действующей на единицу длины любого из проводников

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu \mu_0 I_1 I_2}{2\pi r_0}. \quad (2.182)$$

2.3.11. Поведение контура с током в однородном магнитном поле  
Рассмотрим плоский контур с током (см. рис. 2.62).

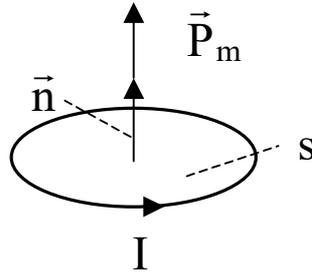


Рис. 2.62

Вектор

$$\vec{p}_m = \vec{n} \cdot I \cdot s, \quad (2.183)$$

где  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали к контуру, а  $S$  – площадь, охватываемая контуром, называется вектором магнитного момента контура с током.

Направление вектора  $\vec{p}_m$  и направление тока в контуре связаны правилом правого буравчика.

Формула (2.183) справедлива для плоского контура любой формы.

Пусть имеется плоский прямоугольный контур с током, который помещен в однородное магнитное поле (рис. 2.63).

На каждую сторону такого контура будет действовать сила Ампера.

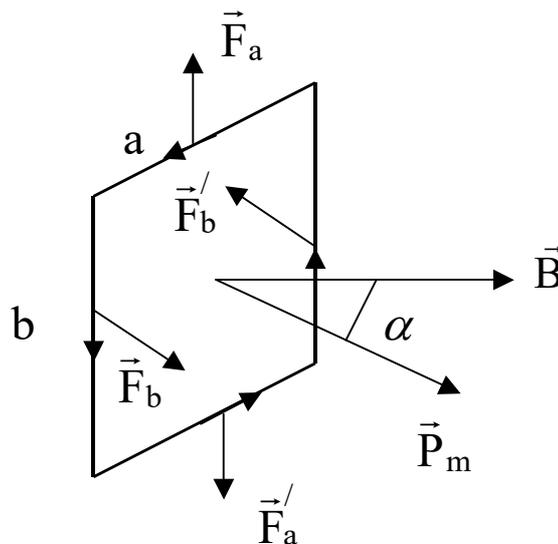


Рис. 2.63

Силы  $\vec{F}_a$  и  $\vec{F}_a'$  стремятся деформировать контур. Силы  $\vec{F}_b$  и  $\vec{F}_b'$  создают вращающий момент, под действием которого контур начнет совершать вращательное движение так, чтобы угол  $\alpha$  уменьшался.

В дальнейшем будем считать, что контур с током, помещенный в магнитное поле, является абсолютно недеформируемым.

Расположим ось вращения так, чтобы она проходила через правую сторону  $b$  нашего контура (см. рис. 2.64).

Величина вращающего момента, действующего на контур,

$$M_{\text{вр}} = F_b \cdot h. \quad (2.184)$$

Так как  $h = a \cdot \sin \alpha$ , а  $F_b = b \cdot I \cdot B$ , то из (2.184) следует, что

$$M_{\text{вр}} = P_m B \sin \alpha. \quad (2.185)$$

Если учесть взаимное направление векторов  $\vec{M}_{\text{вр}}$ ,  $\vec{P}_m$ ,  $\vec{B}$  и выражение (2.185), то вращающий момент, действующий на плоский контур с током в однородном магнитном поле, равен:

$$\vec{M}_{\text{вр}} = [\vec{P}_m \times \vec{B}], \quad (2.186)$$

а его модуль определяется соотношением:

$$M_{\text{вр}} = P_m B \sin \alpha. \quad (2.187)$$

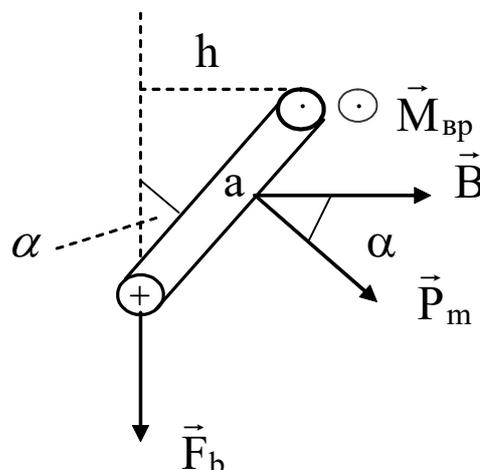


Рис. 2.64

Контур с током в магнитном поле обладает механической энергией. Рассчитаем эту энергию.

Повернем контур с током, находящийся в однородном магнитном поле, на угол  $d\alpha$ . При этом будет совершаться элементарная работа  $dA' = M_{вр}d\alpha$ . За счет этой работы повышается механическая энергия контура:

$$dA' = dW_M \Rightarrow dW_M = M_{вр}d\alpha. \quad (2.188)$$

Решая это дифференциальное уравнение, получаем:

$$W_M = \int M_{вр}d\alpha = \int P_m B \sin\alpha d\alpha = P_m B \int \sin\alpha d\alpha,$$

откуда

$$W_M = -P_m B \cos\alpha + \text{const}. \quad (2.189)$$

Будем считать, что если  $\angle\alpha = \pi/2$  ( $\vec{p}_m \perp \vec{B}$ ), то энергия контура  $W_M = 0$ .

При таком выборе начала отсчета энергии константа в формуле (2.189) равна нулю и энергия плоского контура с током, находящегося в однородном магнитном поле, равна:

$$W_M = -P_m B \cos\alpha. \quad (2.190)$$

Проанализируем соотношения (2.187) и (2.190).

- Состояние устойчивого равновесия контура с током в магнитном поле ( $\angle\alpha = 0$  ( $\vec{p}_m \uparrow\uparrow \vec{B}$ )).

В этом положении  $\vec{M}_{вр} = 0$ , контур неподвижен и испытывает растяжение (см. рис. 2.65), а его механическая энергия  $W_M = W_M^{\min} = -P_m B$ .

Рассматриваемое положение контура с током в однородном магнитном поле соответствует состоянию его устойчивого равновесия, так как при отклонениях контура от указанного на рис. 2.65 положения возникает вращающий момент, стремящийся вернуть контур в первоначальное положение.

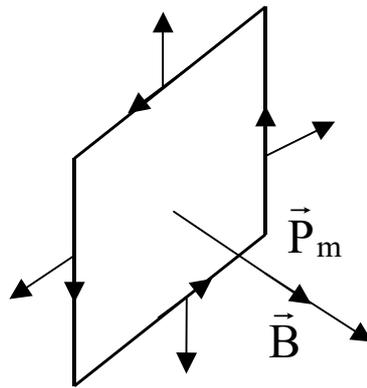


Рис. 2.65

- Состояние неустойчивого равновесия контура с током в магнитном поле ( $\angle \alpha = \pi$  ( $\vec{P}_m \uparrow \downarrow \vec{B}$ )).

В этом положении  $\vec{M}_{\text{вд}} = 0$ , контур неподвижен и испытывает сжатие (см. рис. 2.66). Его механическая энергия  $W_M = W_M^{\text{max}} = + P_m B$ .

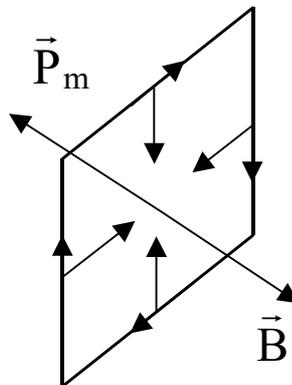


Рис. 2.66

Это положение контура соответствует состоянию его неустойчивого равновесия, так как при малейших отклонениях контура от указанного на рис. 2.66 положения возникает вращающий момент, под действием которого контур начнет поворачиваться в магнитном поле до тех пор, пока не займет положение, соответствующее состоянию его устойчивого равновесия (рис. 2.65).

### 2.3.12. Поведение контура с током в неоднородном магнитном поле

Рассмотрим контур с током, помещенный в неоднородное магнитное поле так, как показано на рис. 2.67 и 2.68.

Вектор  $\vec{r}$  указывает направление быстрейшего возрастания индукции магнитного поля.

На каждый бесконечно малый участок контура действует сила  $d\vec{F}$ , которую можно разложить на две составляющие: перпендикулярную ( $d\vec{F}_\perp$ ) и параллельную ( $d\vec{F}_\parallel$ ) относительно вектора  $\vec{r}$ .

В первом случае, когда вектор  $\vec{P}_m \uparrow \vec{r}$  (рис. 2.67), под действием сил  $d\vec{F}_\perp$  контур с током будет испытывать растяжение, а под действием сил  $d\vec{F}_\parallel$  контур будет втягиваться в область более сильного магнитного поля.

Во втором случае, когда вектор  $\vec{P}_m \updownarrow \vec{r}$  (рис. 2.68), контур с током испытывает сжатие (за счет действия сил  $d\vec{F}_\perp$ ) и выталкивается в область более слабого магнитного поля (за счет сил  $d\vec{F}_\parallel$ ).

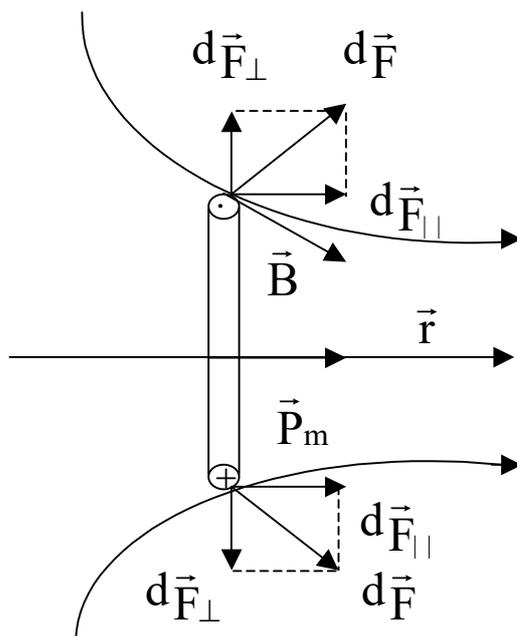


Рис. 2.67

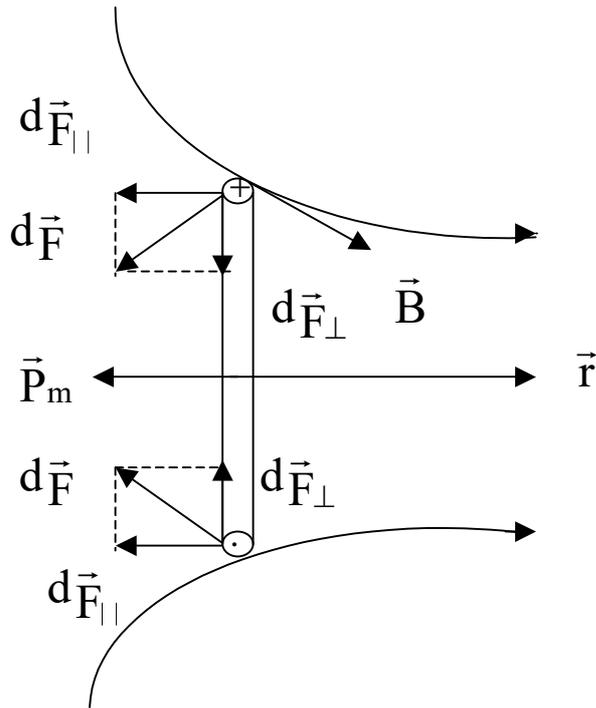


Рис. 2.68

### 2.3.13. Сила Лоренца

*Сила, действующая в магнитном поле на движущиеся электрические заряды, называется силой Лоренца.*

Ранее (см. выражение (2.155)) было показано, что сила Лоренца

$$\vec{F}_L = q[\vec{v} \times \vec{B}]. \quad (2.191)$$

Модуль силы Лоренца равен:

$$F_L = qvB \sin \alpha. \quad (2.192)$$

*Направление силы Лоренца для положительных электрических зарядов можно найти по правилу левой руки.*

*Для отрицательных электрических зарядов направление, найденное по правилу левой руки, необходимо изменить на противоположное (см. рис. 2.69).*

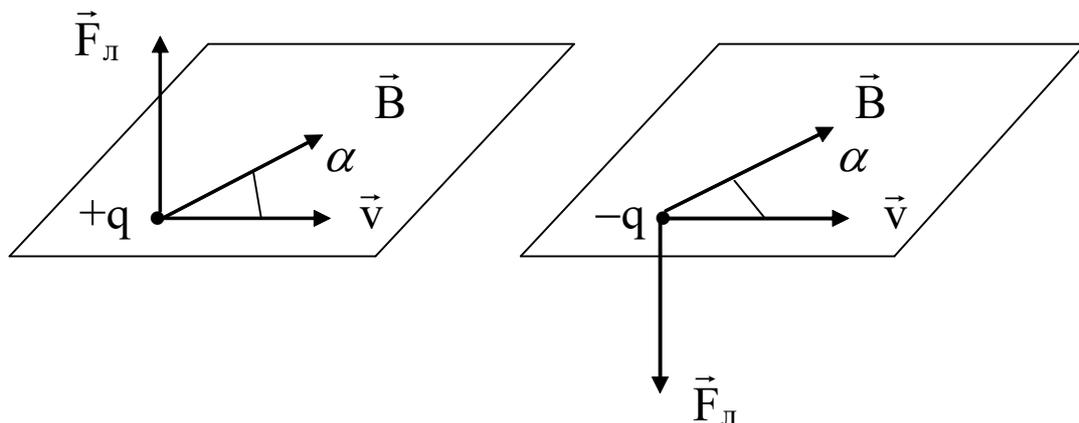


Рис. 2.69

Из анализа выражений (2.191) и (2.192) следует:

- сила Лоренца действует только на движущиеся электрические заряды;
- сила Лоренца всегда перпендикулярна направлению скорости движения электрических зарядов; по этой причине эта сила является центростремительной силой и не может изменить модуля скорости движения заряда, а значит и его кинетическую энергию;
- $F_L = F_L^{\max}$ , если  $\angle \alpha = \pi/2$  ( $\vec{v} \perp \vec{B}$ );
- $F_L = 0$ , если  $\angle \alpha = 0$  ( $\vec{v} \uparrow \uparrow \vec{B}$ ) или  $\angle \alpha = \pi$  ( $\vec{v} \uparrow \downarrow \vec{B}$ ).

### 2.3.13.1. Характер движения заряженных частиц в однородных магнитных полях

Характер движения заряженных частиц в данном случае во многом определяется углом  $\alpha$ , т.е. углом между направлением скорости движения заряженной частицы и направлением индукции магнитного поля.

- 1)  $\angle \alpha = 0$  ( $\vec{v} \uparrow \uparrow \vec{B}$ ), или  $\angle \alpha = \pi$  ( $\vec{v} \uparrow \downarrow \vec{B}$ ) (рис. 2.70)

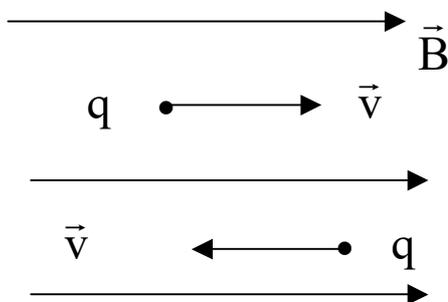


Рис. 2.70

Сила Лоренца равна нулю и заряженная частица движется равномерно и прямолинейно либо вдоль, либо против линий поля.

2)  $\angle \alpha = \pi / 2$  ( $\vec{v} \perp \vec{B}$ ) (см. рис. 2.71)

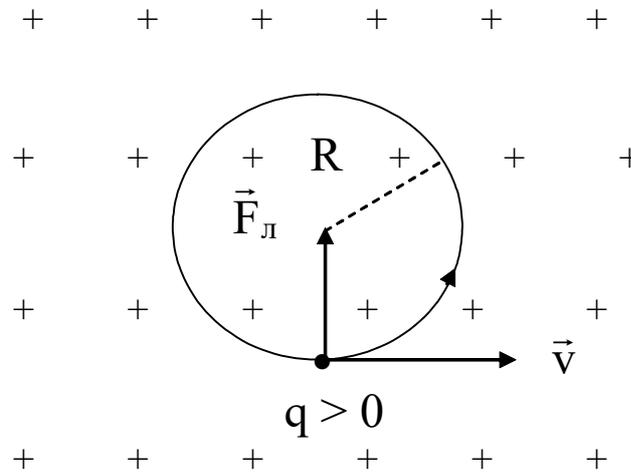


Рис. 2.71

Так как сила Лоренца является центростремительной силой, то заряженная частица совершает равномерное движение по окружности в плоскости, перпендикулярной направлению индукции магнитного поля.

Знак заряда частицы определяет направление ее движения по окружности (либо по часовой, либо против часовой стрелки).

Радиус окружности можно определить из условия, что  $F_L = F_{ц}$ :

$$qvB = \frac{mv^2}{R}, \quad (2.193)$$

поэтому

$$R = \frac{v}{\frac{|q|}{m} B}, \quad (2.194)$$

где отношение  $|q|/m$  называется удельным зарядом частицы.

Из формулы (2.194) следует, что если индукция магнитного поля возрастает, то радиус окружности уменьшается.

Период движения заряженной частицы по окружности

$$T = \frac{2\pi R}{v}, \quad (2.195)$$

откуда с учетом выражения (2.194)

$$T = \frac{2\pi}{\frac{|q|B}{m}}. \quad (2.196)$$

При возрастании индукции магнитного поля период уменьшается.

Важным следствием формулы (2.196) является то, что период движения заряженной частицы не зависит от скорости ее движения.

### 3. $0 < \angle \alpha < \pi/2$ (рис. 2.72)

Для того чтобы выяснить характер движения заряженной частицы в данном случае, разложим вектор скорости заряженной частицы  $\vec{V}$  на две составляющие, направленные вдоль ( $\vec{v}_{||}$ ) и перпендикулярно ( $\vec{v}_{\perp}$ ) направлению индукции магнитного поля.

За счет составляющей скорости  $\vec{v}_{||}$  частица совершает равномерное и прямолинейное движение вдоль линий поля, а за счет составляющей скорости  $\vec{v}_{\perp}$  – равномерное движение по окружности.

Результирующим движением заряженной частицы будет ее движение по спирали с постоянным шагом  $h$ .

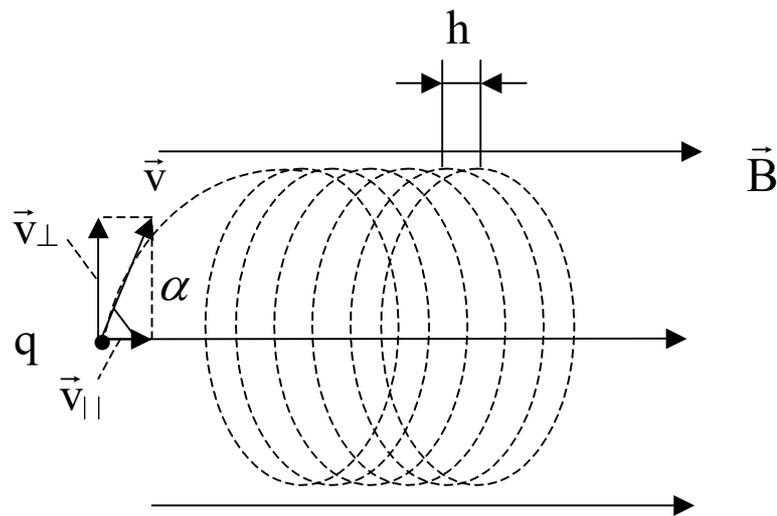


Рис. 2.72

Радиус спирали

$$R = \frac{v_{\perp}}{|q|B} \cdot m, \quad (2.197)$$

а шаг спирали

$$h = v_{\parallel} \cdot T, \quad (2.198)$$

где  $v_{\parallel} = v \cdot \cos \alpha$ ,  $v_{\perp} = v \cdot \sin \alpha$ .

Направление закручивания (правая или левая спираль) определяется знаком заряда частицы.

2.3.13.2. Характер движения заряженных частиц в неоднородных магнитных полях

Пусть заряженная частица влетает в неоднородное магнитное поле, индукция которого возрастает вдоль направления  $\vec{r}$  (см. рис. 2.73).

Составляющая скорости  $\vec{v}_{\perp}$  обеспечит движение частицы по окружности, а составляющая  $\vec{v}_{\parallel}$  – ее поступательное движение в область более сильного поля.

Так как радиус спирали  $R \sim 1/B$ , то частица будет двигаться по скручивающейся спирали, навиваясь на линию индукции магнитного поля.

Направление закручивания определяет знак заряда частицы.

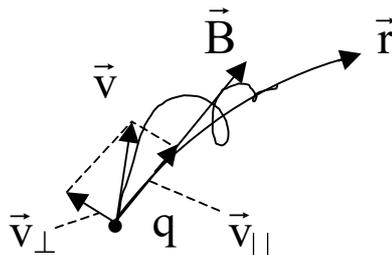


Рис. 2.73

2.3.13.3. Практическое использование движения заряженных частиц в магнитных полях

2.3.13.3.1. Эффект Холла (1880 г.)

Этот эффект заключается в следующем. Если в металлическом проводнике создать электрический ток, а в направлении, перпендикулярном току, включить магнитное поле  $\vec{B}$ , то перпендикулярно направлениям

индукции магнитного поля и электрического тока, возникнет разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$ .

Рассмотрим металлический образец в виде параллелепипеда и создадим в нем электрический ток и магнитное поле указанных выше направлений (рис. 2.74).

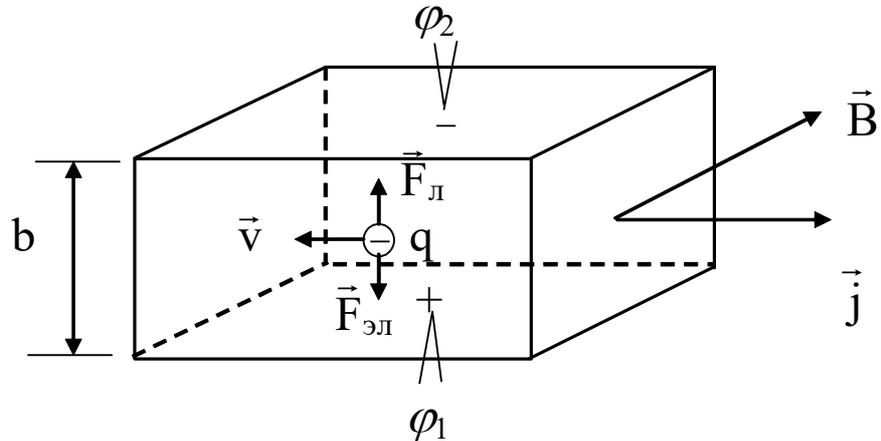


Рис. 2.74

Сила Лоренца, действуя на электроны проводимости, перераспределяет электрические заряды в проводнике. Внутри проводника будет возникать электрическое поле, препятствующее перераспределению зарядов.

В результате действия силы Лоренца верхняя грань образца заряжается отрицательно, а нижняя грань – положительно.

Перераспределение электрических зарядов закончится в тот момент времени, когда сила Лоренца по модулю будет равна силе, действующей на электроны проводимости со стороны электрического поля.

С этого момента времени между верхней и нижней гранями металлического образца установится постоянная разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$ .

В равновесном состоянии

$$F_{\text{эл}} = F_{\text{л}} \Rightarrow Eq = qvB \Rightarrow E = vB \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = vBb. \quad (2.199)$$

Так как модуль вектора плотности тока  $j = nqv$ , где  $n$  – концентрация электронов проводимости, то

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{jBb}{nq}. \quad (2.200)$$

В равновесном состоянии в пространстве между верхней и нижней гранями металлического образца движение электрических зарядов отсутствует. По этой причине разность потенциалов между указанными гранями равна некоторой эдс, которую принято называть эдс Холла:

$$\varepsilon_x = R_x j B b, \quad (2.201)$$

где  $R_x = \frac{1}{nq}$  – постоянная Холла.

Эффект Холла позволяет определить знак основных носителей тока в веществе и их концентрацию.

Кроме металлов эффект Холла наблюдается также и для полупроводников.

#### 2.3.13.3.2. Фокусировка заряженных частиц в ускорителях

Для фокусировки пучков заряженных частиц в ускорителях внутри ускорителя создают магнитное поле, индукция которого возрастает вдоль необходимой траектории движения частиц (рис. 2.75).

Если заряженная частица за счет взаимодействия с другими частицами или по иным причинам выйдет за пределы пучка, то за счет действия магнитного поля частица вновь возвращается на первоначальную траекторию.

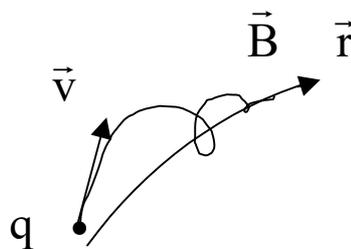


Рис. 2.75

#### 2.3.13.3.3. Широтный эффект

Широтный эффект заключается в том, что в приполярных областях Земли наблюдается свечение верхних слоев атмосферы (“полярное сияние”), которое практически не наблюдается в экваториальных областях.

Это свечение обусловлено взаимодействием верхних слоев атмосферы с заряженными частицами, приходящими от Солнца.

Заряженные частицы вблизи приполярных областей навиваются на линии напряженности магнитного поля Земли (рис. 2.76).

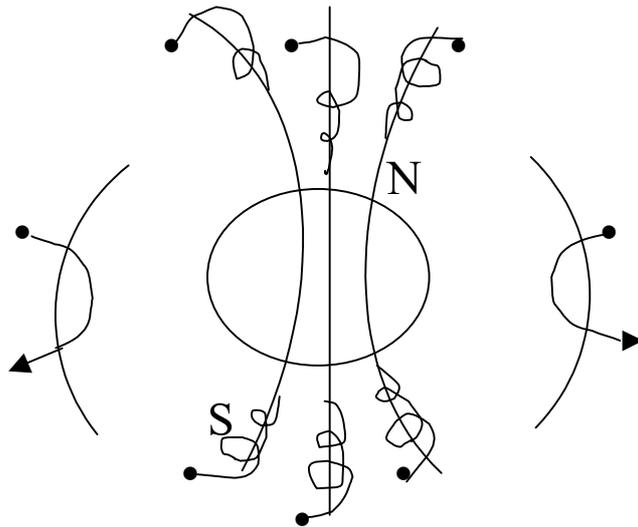


Рис. 2.76

Вблизи экваториальных областей заряженные частицы влетают в магнитное поле Земли практически под прямым углом и выбрасываются магнитным полем обратно в космическое пространство.

Поэтому вероятность взаимодействия заряженных частиц с верхними слоями атмосферы в приполярных областях много больше, чем в экваториальных.

#### 2.3.13.3.4. МГД-генератор (магнитогидродинамический генератор)

Основным недостатком генераторов является многоступенчатость преобразований энергии. На каждой ступени теряется часть энергии, что снижает коэффициент полезного действия (кпд) генераторов.

МГД-генератор (рис. 2.77) позволяет преобразовать внутреннюю энергию вещества в электрическую, исключив промежуточные ступени преобразования. Это повышает кпд генератора.

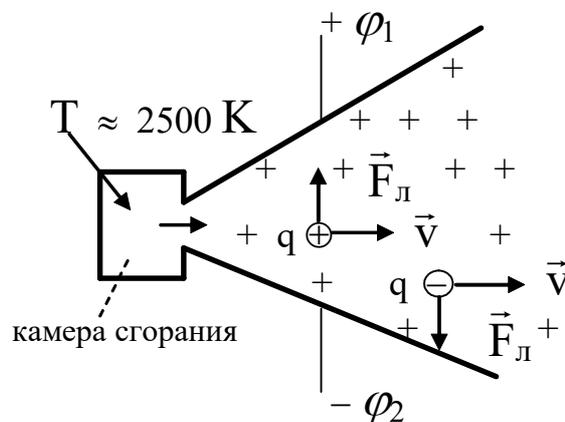


Рис. 2.77

В камере сгорания МГД-генератора создается низкотемпературная плазма. Вылетая из этой камеры, заряженные частицы попадают в магнитное поле, которое разделяет электрические заряды разного знака.

В результате верхний и нижний раструбы установки приобретают электрический заряд противоположного знака, и между ними возникает высокая разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2 \approx 10^4$  В.

#### 2.3.13.3.5. Электронно-лучевые трубки

В электронно-лучевых трубках используется совместное воздействие электрических и магнитных полей на движущиеся электроны.

В этом случае сила, действующая на электроны,

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v} \times \vec{B}], \quad (2.202)$$

и характер движения зарядов зависит от взаимного направления и величины векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ .

#### 2.3.14. Поток вектора магнитной индукции

Определение потока вектора индукции магнитного поля вводится аналогично потоку вектора напряженности электростатического поля (см. раздел 2.1.5.).

Рассмотрим некоторую поверхность S, которая находится в магнитном поле (рис. 2.78).

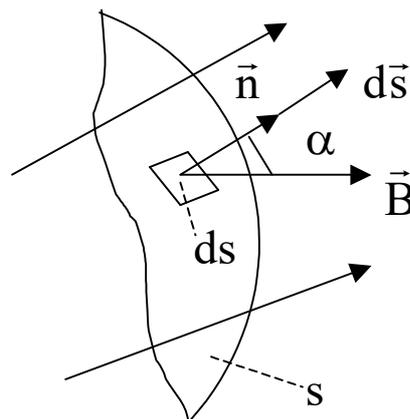


Рис. 2.78

Поток вектора индукции магнитного поля через поверхность S равен:

$$\phi_B = \int_S d\phi_B = \int_S \vec{B} d\vec{s} = \int_S B ds \cos \alpha. \quad (2.203)$$

Интеграл (2.203) определяет число линий вектора  $\vec{B}$ , которые пронизывают поверхность  $S$ .

### 2.3.15. Теорема Гаусса для магнитного поля

Согласно этой теореме, *поток вектора индукции магнитного поля через произвольную замкнутую поверхность равен нулю:*

$$\oint_S \vec{B} d\vec{s} = 0. \quad (2.204)$$

*Теорема Гаусса в данном случае утверждает отсутствие в природе магнитных зарядов.*

Для доказательства теоремы Гаусса рассмотрим произвольную замкнутую поверхность  $S$ , которая находится в магнитном поле (рис. 2.79).

Так как линии индукции магнитного поля всегда замкнуты, то число этих линий, входящих в поверхность  $S$ , будет равно числу линий вектора магнитной индукции, выходящих из поверхности.

Знаки потоков для входящих и выходящих линий разные (см. рис. 2.79).

По этой причине результирующий поток вектора  $\vec{B}$  через произвольную замкнутую поверхность  $S$  будет равен нулю.

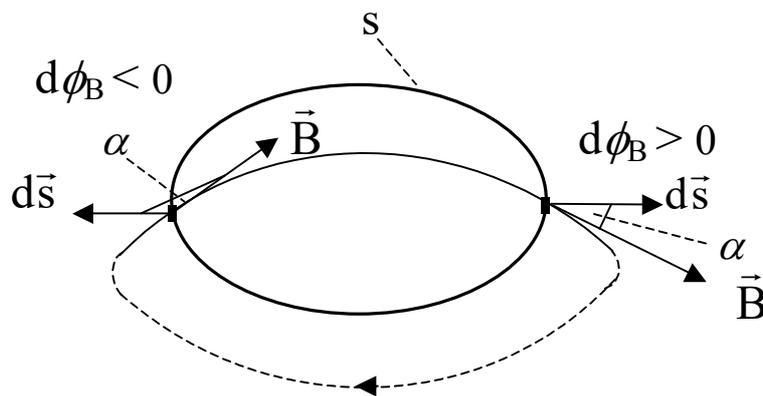


Рис. 2.79

### 2.3.16. Работа сил магнитного поля по переносу проводника с током

Рассмотрим для простоты однородное магнитное поле, в котором находится прямой проводник, по которому протекает постоянный ток  $I$  (рис. 2.80).

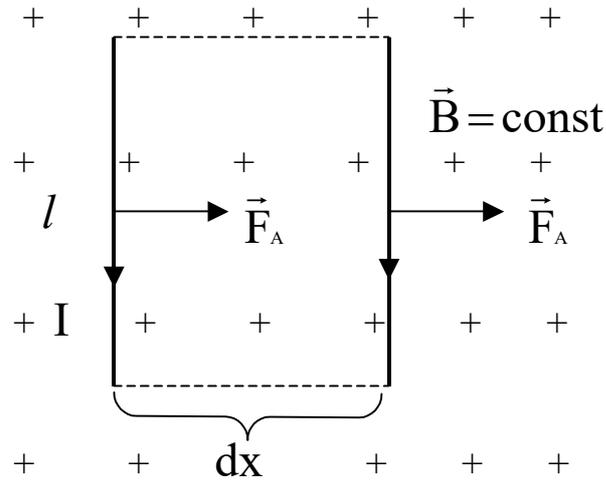


Рис. 2.80

На проводник действует сила Ампера. Под действием этой силы за время  $dt$  проводник с током переместится на расстояние  $dx$ . При этом силой Ампера совершается элементарная работа

$$dA = F_A dx = IB dx l = IB ds = Id\phi. \quad (2.205)$$

Работа силы Ампера при конечном перемещении проводника с током

$$A = \int_0^{\phi} Id\phi, \quad (2.206)$$

откуда

$$A = I\phi. \quad (2.207)$$

*Работа, совершаемая силами магнитного поля по переносу проводника с током, равна произведению силы тока в проводнике на величину магнитного потока через поверхность, которую описывает проводник при своем движении.*

Формула (2.207) справедлива для проводника любой формы и любого магнитного поля. Единственным ограничением ее применимости является постоянство силы тока в проводнике.

При движении проводника в магнитном поле в этом проводнике возникает эдс индукции, которая изменяет ток в проводнике. Чтобы избежать влияния этой эдс, перемещение проводника с током в магнитном поле должно происходить бесконечно медленно.

### 2.3.17. Работа сил магнитного поля по переносу контура с током

Рассмотрим частный случай, когда в магнитном поле находится плоский контур, расположенный так, как показано на рис. 2.81. По контуру протекает постоянный ток  $I$ . Контур перемещается в магнитном поле из положения 1 в положение 2.

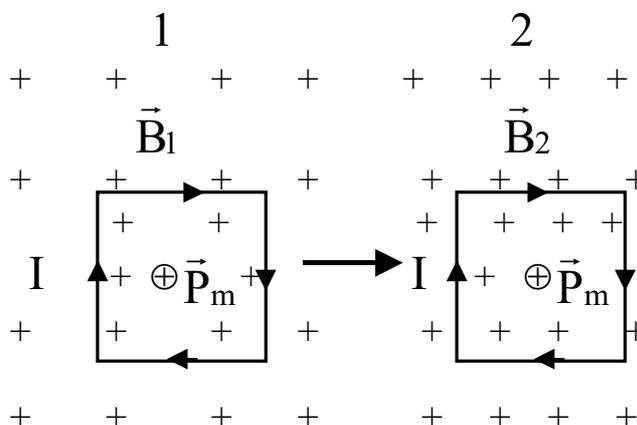


Рис. 2.81

Работа сил магнитного поля при этом перемещении контура равна разности энергий, которой обладает контур в начальном и конечном положениях:

$$A = W_{M1} - W_{M2} . \quad (2.208)$$

Учитывая направление векторов  $\vec{P}_m$  и  $\vec{B}$ ,

$$A = - P_m B_1 + P_m B_2 = IsB_2 - IsB_1 = I\phi_2 - I\phi_1 , \quad (2.209)$$

откуда

$$A = I(\phi_2 - \phi_1). \quad (2.210)$$

Работа сил магнитного поля по переносу контура с током равна произведению силы тока в контуре на разность магнитных потоков, пронизывающих контур в конечном и начальном состояниях.

Формула (2.210) справедлива для плоского контура любой формы и любого магнитного поля.

Область применимости формулы (2.210) ограничена только постоянством силы тока в контуре. Поэтому перемещение контура с током в магнитном поле должно происходить бесконечно медленно.

### 2.3.18. Явление электромагнитной индукции. Закон Фарадея. Правило Ленца

Явление электромагнитной индукции было открыто в 1831 г. Фарадеем и заключается в следующем: *при всяком изменении магнитного потока, сцепленного с контуром, в этом контуре возникает эдс индукции.*

Под магнитным потоком  $\phi$ , сцепленным с контуром  $l$ , понимается поток вектора индукции магнитного поля через любую поверхность  $S$ , которая опирается на этот контур (рис. 2.82).

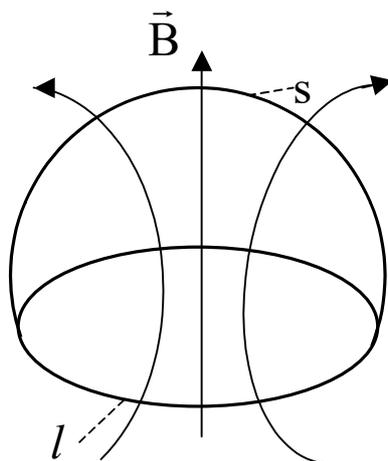


Рис. 2.82

Величина эдс индукции определяется законом Фарадея: *эдс индукции равна по модулю скорости изменения магнитного потока, сцепленного с контуром:*

$$|\varepsilon_i| = \left| \frac{d\phi}{dt} \right|. \quad (2.211)$$

Если контур состоит из  $N$  витков, то закон Фарадея имеет следующий вид:

$$|\varepsilon_i| = \left| \frac{d\psi}{dt} \right| = N \left| \frac{d\phi}{dt} \right|, \quad (2.212)$$

где  $\psi = N\phi$  – полный магнитный поток, сцепленный с контуром.

Выясним роль контура в явлении электромагнитной индукции и законе Фарадея.

Для этого первоначально возьмем проводящий контур (например, виток медной проволоки) и будем постепенно уменьшать его электропроводность.

Если магнитный поток, сцепленный с этим контуром, изменяется с течением времени, то, согласно закону Фарадея, возникнет ЭДС индукции, вследствие чего в проводящем контуре появится индукционный ток.

Разрежем контур.

Если  $\frac{d\phi}{dt} \neq \text{const}$ , то возникающая в этом случае переменная ЭДС индукции будет создавать в контуре переменный индукционный ток.

Изготовим контур из диэлектрика.

Так как в диэлектриках концентрация электронов проводимости очень мала по сравнению с металлами, то индукционный ток, возникающий в таком контуре при наличии переменного магнитного поля, будет незначителен.

Пусть теперь контур вообще отсутствует.

Если в некоторой области пространства существует переменное магнитное поле, то в этой же области пространства возникает ЭДС индукции, т.е. появляется электрическое поле. Однако в отличие от электростатического, данное электрическое поле не является потенциальным полем. Это электрическое поле является вихревым полем. Линии напряженности вихревого электрического поля всегда замкнуты. Зарядов, создающих вихревые электрические поля, в природе не существует. Источниками вихревых электрических полей являются переменные магнитные поля.

Таким образом, проводящий контур в законе Фарадея и явлении электромагнитной индукции имеет второстепенное значение. Он исполняет роль прибора, позволяющего по наличию в контуре индукционного тока зарегистрировать вихревое электрическое поле в той области пространства, где расположен контур,

Направление индукционного тока в проводящем контуре можно определить с помощью правила Ленца: *индукционный ток всегда имеет такое направление, что созданное им магнитное поле препятствует всякому изменению внешнего магнитного поля, приводящего к возникновению этого индукционного тока* (см. рис. 2.83).

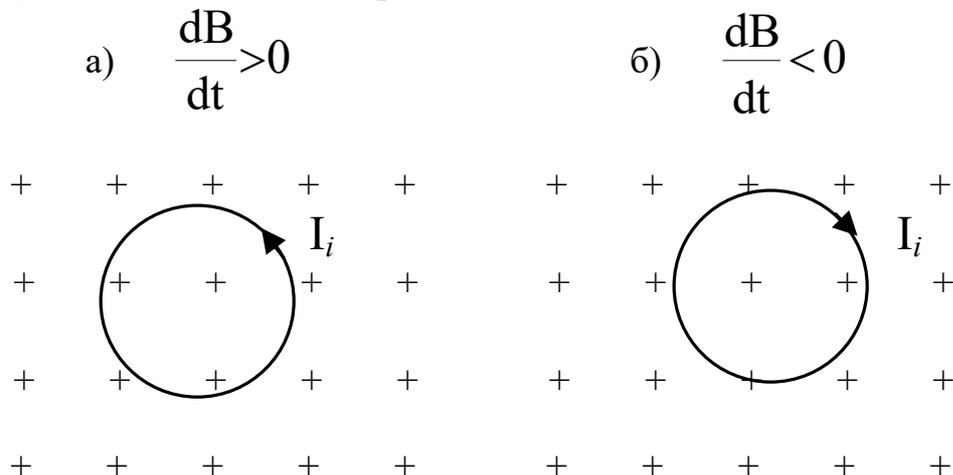


Рис. 2.83

С учетом правила Ленца выражения (2.211) и (2.212) для закона Фарадея имеют следующий вид:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\phi}{dt}; \quad \varepsilon_i = -\frac{d\psi}{dt} = -N\frac{d\phi}{dt}. \quad (2.213)$$

2.3.19. Электронный механизм возникновения эдс индукции в движущихся проводниках

Рассмотрим однородное магнитное поле. Пусть в этом поле с постоянной скоростью  $\vec{V}$  движется тонкий прямой проводник длиной  $l$ .

Для простоты будем считать, что направление скорости проводника перпендикулярно направлению магнитного поля (рис. 2.84).

Вместе с проводником со скоростью  $\vec{V}$  будут перемещаться и свободные электроны, находящиеся внутри этого проводника. Поэтому со стороны магнитного поля на эти электроны будет действовать сила Лоренца.

Сила Лоренца разделяет электрические заряды в проводнике.

В результате этого процесса внутри проводника создается электрическое поле, которое препятствует разделению электрических зарядов, а на концах проводника возникает разность потенциалов.

Так как скорость движения проводника и индукция магнитного поля неизменны, то разделение электрических зарядов внутри проводника происходит до тех пор, пока модули сил  $\vec{F}_{эл}$  и  $\vec{F}_{л}$ , действующих на электроны проводимости, не станут равны друг другу.

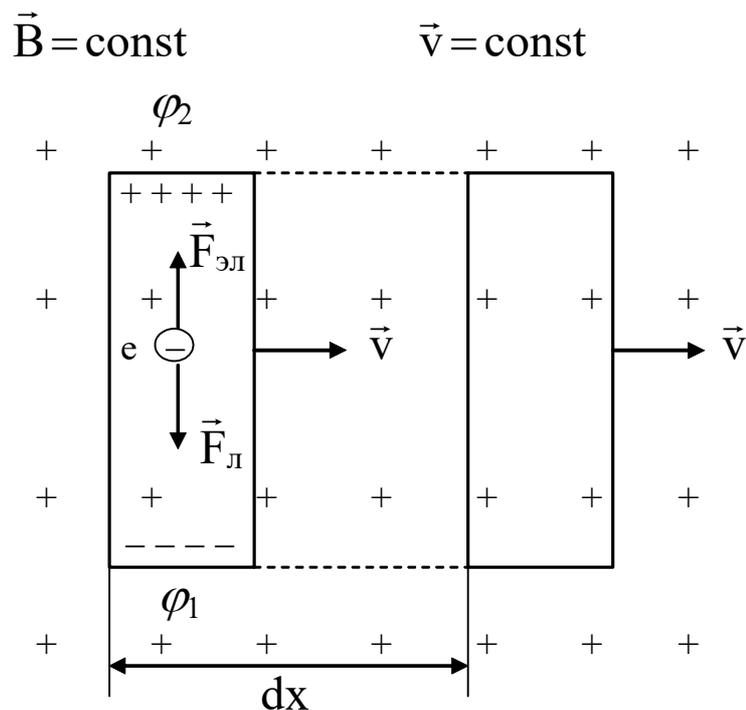


Рис. 2.84

Рассчитаем, какая разность потенциалов возникнет на концах проводника после прекращения в нем перераспределения электрических зарядов.

Для этого момента времени

$$F_{\text{л}} = F_{\text{эл}} \Rightarrow eE = evB \Rightarrow E = vB. \quad (2.214)$$

Так как проводник тонкий, то можно считать, что электрическое поле внутри него однородно, а напряженность электрического поля

$$E = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{l}, \quad (2.215)$$

где  $l$  – длина проводника.

Из соотношений (2.214) и (2.215) следует, что

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -lvB. \quad (2.216)$$

В установившемся режиме перераспределение электрических зарядов внутри проводника закончилось. Никакие токи в нем не протекают. Поэтому разность потенциалов (2.216) равна некоторой эдс:

$$\mathcal{E} = -lvB, \quad (2.217)$$

а движущийся проводник можно рассматривать как своеобразный источник тока.

Установим природу этой эдс.

Если за время  $dt$  проводник переместился в пространстве на расстояние  $dx$  (см. рис. 2.84), то скорость проводника  $v = dx/dt$  и

$$\mathcal{E} = -l \frac{dx}{dt} B. \quad (2.218)$$

Учитывая, что  $l dx = ds$ , а  $B ds = d\phi$  из (2.218) следует, что

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} \Rightarrow \mathcal{E} = \mathcal{E}_i. \quad (2.219)$$

Таким образом, после завершения процесса перераспределения электрических зарядов в проводнике, движущемся в однородном магнитном поле с постоянной скоростью, в этом проводнике возникает эдс индукции.

В общем случае скорость движения проводника не перпендикулярна направлению индукции магнитного поля и эдс индукции в этом проводнике

$$\varepsilon_i = -lvB \sin \alpha, \quad (2.220)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ .

### 2.3.20. Связь закона Фарадея с законом сохранения энергии

Можно показать, что закон Фарадея является одним из проявлений закона сохранения энергии.

Рассмотрим прямой проводник с током, который находится в однородном магнитном поле.

Проводник может скользить по двум направляющим проводникам в плоскости, перпендикулярной направлению индукции магнитного поля (рис. 2.85).

На проводник в магнитном поле действует сила Ампера, под действием которой проводник перемещается в магнитном поле.

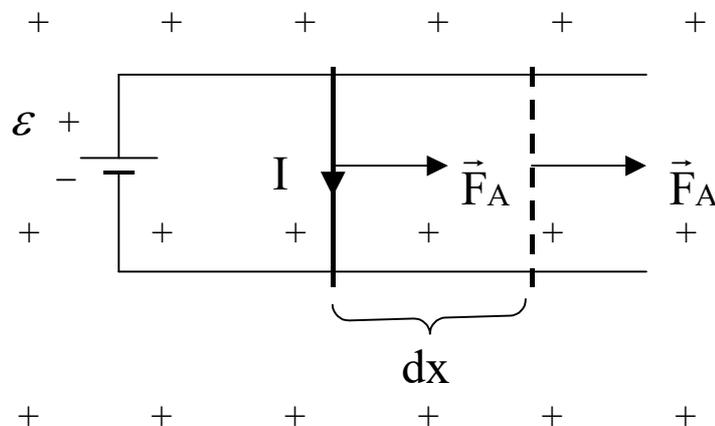


Рис. 2.85

За бесконечно малый промежуток времени  $dt$  совершается элементарная работа, как по нагреву проводника, так и по его перемещению в магнитном поле:

$$dA = Id\phi + I^2 R dt. \quad (2.221)$$

Работа  $dA$  совершается за счет работы источника тока:

$$dA = I\varepsilon dt. \quad (2.222)$$

На основании закона сохранения энергии

$$Id\phi + I^2Rdt = I\varepsilon dt,$$

откуда

$$I = \frac{\varepsilon + \left(-\frac{d\phi}{dt}\right)}{R}. \quad (2.223)$$

Это выражение является законом Ома для замкнутой цепи в том случае, когда в цепи кроме эдс источника тока действует дополнительная эдс, которая, согласно (2.223), является эдс индукции:  $\varepsilon_i = -\frac{d\phi}{dt}$ .

2.3.21. Заряд, переносимый индукционными токами через поперечное сечение проводников

Пусть в переменном магнитном поле расположен проводящий контур, имеющий электросопротивление  $R$  (рис. 2.86).

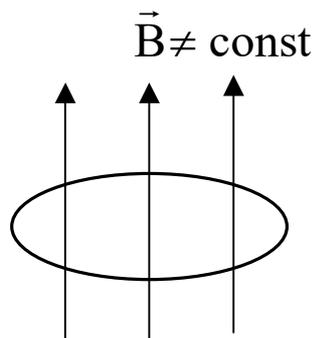


Рис. 2.86

Рассчитаем величину электрического заряда  $Q_i$ , переносимого индукционными токами через любое поперечное сечение этого контура за промежуток времени  $\Delta t = t_2 - t_1$ , если в начальный момент времени магнитный поток, сцепленный с контуром, был равен  $\phi_1$ , а в конечный момент времени —  $\phi_2$ .

Величина силы тока в контуре, создаваемого индукционными токами,

$$I_i = \frac{dq_i}{dt} = \frac{\mathcal{E}_i}{R}. \quad (2.224)$$

Используя это соотношение и формулу (2.213) для закона Фарадея, получим следующее дифференциальное уравнение:

$$dq_i = -\frac{d\phi}{Rdt}, \quad (2.225)$$

откуда

$$q_i = -\frac{1}{R} \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi. \quad (2.226)$$

После интегрирования

$$q_i = \frac{\phi_1 - \phi_2}{R}. \quad (2.227)$$

*Величина электрического заряда, переносимого индукционными токами через любое поперечное сечение проводящего контура, прямо пропорциональна разности магнитных потоков, сцепленных с контуром в начальный и конечный момент времени, и обратно пропорциональна его электросопротивлению.*

### 2.3.22. Токи Фуко

*Токами Фуко называются индукционные токи, возникающие в массивных металлических проводниках.*

Величина силы тока, создаваемого в металлических проводниках индукционными токами,  $I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R}$ .

Так как массивные металлические проводники имеют малое электросопротивление, то величина силы тока Фуко в них может достигать большой величины.

Направление индукционных токов в проводниках определяется правилом Ленца.

Проводники, движущиеся в магнитном поле, испытывают торможение. Это является следствием взаимодействия внешнего магнитного поля с магнитным полем индукционных токов (рис. 2.87).

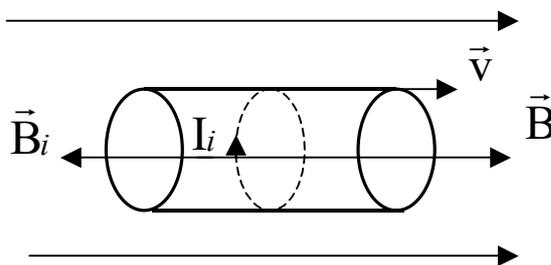


Рис. 2.87

Данный эффект применяется для демпфирования (успокоения) стрелок электроизмерительных приборов.

Для этих целей на ось стрелки прибора крепят кусочек алюминиевой или медной фольги и размещают это устройство между полюсами постоянного магнита. При движении стрелки в фольге возникают индукционные токи. Стрелка испытывает торможение. Ее колебания быстро прекращаются. На результаты показания прибора наличие демпфера не оказывает никакого влияния, так как в неподвижном состоянии стрелки индукционные токи в металлической фольге отсутствуют. Способ столь эффективен, что колебания стрелок практически незаметны.

Положительное действие токов Фуко используется также в индукционных печах для нагрева и плавления металлов и сплавов.

В ряде случаев токи Фуко оказывают вредное влияние, и с ними приходится бороться.

Это имеет место, например, в трансформаторах. За счет индукционных токов происходит нагрев сердечников трансформаторов и, как следствие, уменьшение их коэффициента полезного действия.

С целью снижения величины индукционных токов сердечники трансформаторов собирают из отдельных пластин, изготовленных из специальной трансформаторной стали. Пластины располагают перпендикулярно направлению токов Фуко.

Уменьшить токи Фуко можно за счет изготовления сердечников трансформаторов из материалов, имеющих относительно большое удельное электросопротивление. С этой целью в ряде случаев сердечники изготавливают из феррита – полупроводникового материала, имеющего удельное электросопротивление на несколько порядков большее, чем у трансформаторной стали.

### 2.3.23. Явление самоиндукции

Рассмотрим цепь, по которой протекает электрический ток.

В результате протекания по цепи электрического тока возникает магнитный поток, который в данном случае является потоком самоиндукции  $\Psi_s$  (рис. 2.88).

Если сила тока изменяется, то возникающее переменное магнитное поле создаст в цепи эдс индукции, называемую эдс самоиндукции  $\mathcal{E}_{is}$ .

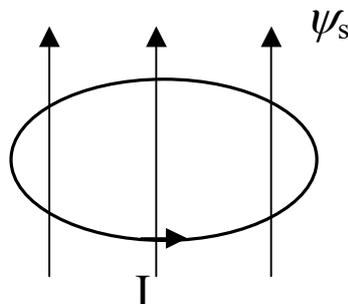


Рис. 2.88

*Явление самоиндукции заключается в возникновении эдс индукции в цепи вследствие изменения силы тока, протекающего в этой же цепи.*

Величина потока самоиндукции пропорциональна индукции магнитного поля, а значит силе тока, протекающего в цепи:

$$\psi_s = LI. \quad (2.228)$$

Коэффициент пропорциональности  $L$  в этой формуле называется коэффициентом самоиндукции или индуктивностью цепи.

Из (2.228) следует, что

$$L = \frac{\psi_s}{I}, \quad (2.229)$$

*т.е. индуктивность цепи численно равна потоку самоиндукции, если по этой цепи протекает электрический ток, равный 1 А.*

*Индуктивность цепи зависит от ее формы, размеров и магнитной проницаемости окружающей среды.*

В качестве примера рассчитаем индуктивность длинного соленоида, имеющего концентрацию витков  $n$ , длину  $l$  и площадь поперечного сечения  $S$ , если магнитная проницаемость окружающей среды равна  $\mu$ .

Для расчета мысленно пропустим по соленоиду постоянный электрический ток  $I$ . С соленоидом будет сцеплен магнитный поток

$$\psi_s = N\phi = NsB, \quad (2.230)$$

где  $N$  – число витков соленоида.

Так как индукция магнитного поля внутри длинного соленоида  $B = \mu\mu_0 nI$ , а число витков соленоида  $N = nl$ , то

$$\psi_s = n^2 \mu\mu_0 I ls. \quad (2.231)$$

С другой стороны, поток самоиндукции определяется соотношением (2.228). Приравнявая формулы (2.228) и (2.231), получаем, что индуктивность длинного соленоида

$$L = \mu\mu_0 n^2 ls. \quad (2.232)$$

Рассчитаем эдс самоиндукции.

Согласно закону Фарадея

$$\mathcal{E}_{is} = -\frac{d\psi_s}{dt}. \quad (2.233)$$

С учетом формулы (2.228)

$$\mathcal{E}_{is} = -\frac{d(LI)}{dt} = -\left( L \frac{\partial I}{\partial t} + I \frac{\partial L}{\partial t} \right). \quad (2.234)$$

Если индуктивность цепи  $L = \text{const}$ , а окружающая среда не является ферромагнитной, то

$$\mathcal{E}_{is} = -L \frac{dI}{dt}, \quad (2.235)$$

и в этом случае эдс самоиндукции прямо пропорциональна скорости изменения силы тока в цепи.

2.3.24. Явления, происходящие в цепях, содержащих индуктивность, при их размыкании и замыкании

Рассмотрим электрическую цепь, изображенную на рис. 2.89.

### 2.3.24.1. Размыкание цепи

Замкнем электрическую цепь (ключ в положении “1”). Если все переходные процессы, связанные с наличием в цепи индуктивности, закончились, то по цепи протекает постоянный ток  $I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$ .

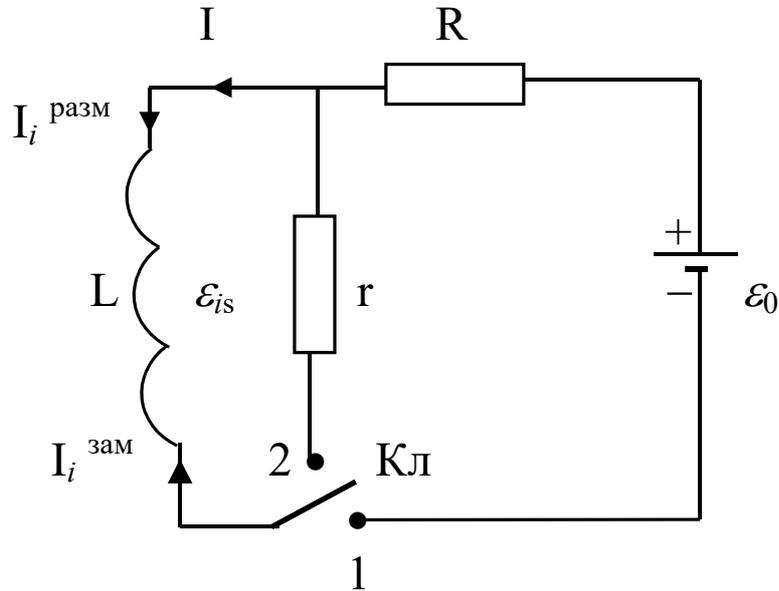


Рис. 2.89

Пусть в момент времени  $t = 0$ , когда по цепи протекает ток  $I_0$ , ключ переключают в положение “2”. Цепь размыкается, т.е. отключается от источника тока.

Найдем закон, по которому изменяется сила тока в цепи после ее размыкания при следующих начальных условиях:

$$\text{если } t = 0, \text{ то } I = I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R} . \quad (2.236)$$

Если ключ находится в положении “2”, то на основании второго правила Кирхгофа можно записать, что

$$Ir = \mathcal{E}_{is}, \quad (2.237)$$

откуда с учетом формулы (2.235) получим следующее дифференциальное уравнение относительно тока, протекающего в цепи после ее размыкания:

$$Ir = -L \frac{dI}{dt} . \quad (2.238)$$

Дифференциальное уравнение (2.238) решается методом разделения переменных:

$$\frac{dI}{I} = -\frac{r}{L} dt \Rightarrow \int \frac{dI}{I} = -\frac{r}{L} \int dt \Rightarrow \ln I = -\frac{r}{L} t + \ln c, \quad (2.239)$$

откуда

$$I(t) = c e^{-\frac{r}{L} t}, \quad (2.240)$$

где  $c$  – произвольная постоянная, значение которой определяется из начальных условий (2.236):

$$c = I_0. \quad (2.241)$$

С учетом этого значения произвольной постоянной, закон изменения силы тока в цепи с течением времени для рассматриваемого случая имеет следующий вид:

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{r}{L} t}, \quad (2.242)$$

т.е. сила тока в цепи, содержащей индуктивность, после ее размыкания уменьшается с течением времени по экспоненциальному закону (рис. 2.90).

Из формулы (2.242) и рис. 2.90 следует, что чем больше индуктивность цепи, то, при равных прочих условиях, медленнее происходит уменьшение силы тока в цепи при ее размыкании.

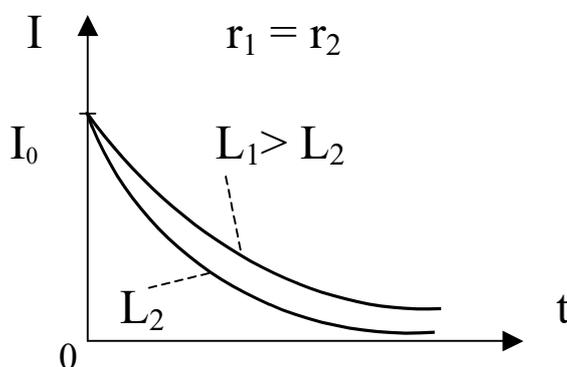


Рис. 2.90

То, что сила тока в цепи уменьшается до нуля не мгновенно, а постепенно, является следствием того, что при размыкании цепи вследствие

явления самоиндукции возникает индукционный ток  $I_i^{\text{разм}}$ , направление которого согласно правилу Ленца совпадает с направлением основного тока  $I$  (см. рис. 2.89).

Определим закон, по которому с течением времени изменяется эдс самоиндукции в цепи после ее размыкания.

Если в выражение (2.235) подставить соотношение (2.242) и учесть, что

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R}, \text{ то получим:}$$

$$\mathcal{E}_{is} = \frac{\mathcal{E}_0}{R} r e^{-\frac{r}{L}t}. \quad (2.243)$$

Эдс самоиндукции, действующая в цепи после ее размыкания, уменьшается с течением времени по экспоненциальному закону (см. рис. 2.91).

Как и в случае силы тока, чем больше индуктивность цепи, тем медленнее происходит уменьшение эдс самоиндукции в этой цепи после ее размыкания.

Оценим величину эдс самоиндукции, которая возникает в цепи в момент ее размыкания.

В момент времени  $t = 0$

$$\mathcal{E}_{is} = \frac{\mathcal{E}_0}{R} r. \quad (2.244)$$

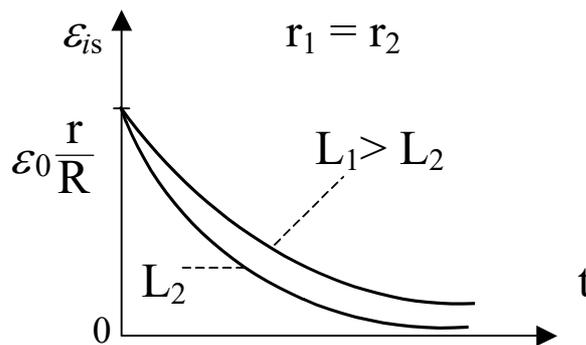


Рис. 2.91

Из соотношения (2.244) следует, что в указанный момент времени при  $r \gg R$  эдс самоиндукции  $\mathcal{E}_{is} \gg \mathcal{E}_0$ .

Если не учитывать этот эффект, то цепь, содержащая индуктивность, в момент ее размыкания может быть выведена из строя из-за пробоя изоляции.

По этой причине, например, при отключении электрических цепей с помощью рубильников наблюдается искрение. В этом случае роль электросопротивления  $\Gamma$  выполняет электросопротивление воздушного промежутка, возникающего между контактами рубильника при их размыкании.

Индукционные токи, протекающие в электрических цепях при их размыкании, называются экстратоками размыкания.

### 2.3.24.2. Замыкание цепи

Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  ключ переключают в положение "1" (рис. 2.89).

Цепь замыкается, т.е. к ней подключается источник тока. В этот момент времени электрический ток в цепи отсутствует.

Найдем закон, по которому изменяется сила тока в цепи после ее замыкания при следующих начальных условиях:

$$\text{если } t = 0, \text{ то } I(0) = 0. \quad (2.245)$$

На основании второго правила Кирхгофа для рассматриваемой замкнутой цепи

$$IR = \varepsilon_{is} + \varepsilon_0. \quad (2.246)$$

Подставляя в это соотношение значение эдс самоиндукции, получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$IR - \varepsilon_0 = -L \frac{dI}{dt}. \quad (2.247)$$

Это дифференциальное уравнение, как и в предыдущем случае, решается методом разделения переменных:

$$\frac{dI}{IR - \varepsilon_0} = -\frac{dt}{L} \Rightarrow \frac{RdI}{IR - \varepsilon_0} = -\frac{Rdt}{L} \Rightarrow \int \frac{RdI}{IR - \varepsilon_0} = -\frac{R}{L} \int dt. \quad (2.248)$$

После интегрирования:

$$\ln(IR - \varepsilon_0) = -\frac{R}{L}t + \ln c, \quad (2.249)$$

откуда

$$IR - \varepsilon_0 = c e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (2.250)$$

Если подставить в выражение (2.250) начальные условия (2.245), то получим, что произвольная постоянная

$$c = -\varepsilon_0, \quad (2.251)$$

и закон изменения силы тока в цепи, содержащей индуктивность, при ее замыкании имеет следующий вид:

$$I(t) = \frac{\varepsilon_0}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right), \quad (2.252)$$

где  $\frac{\varepsilon_0}{R} = I_0$ .

Таким образом, сила тока в цепи в данном случае будет возрастать от нуля до значения  $I_0$  не мгновенно, а постепенно.

Это является следствием того, что при замыкании цепи вследствие явления самоиндукции возникает индукционный ток  $I_i^{\text{зам}}$ , направление которого, согласно правилу Ленца, противоположно направлению основного тока  $I$  (см.рис.2.89).

Как следует из формулы (2.252) и рис. 2.92, чем больше индуктивность цепи, тем медленнее происходит возрастание силы тока в этой цепи при ее замыкании.

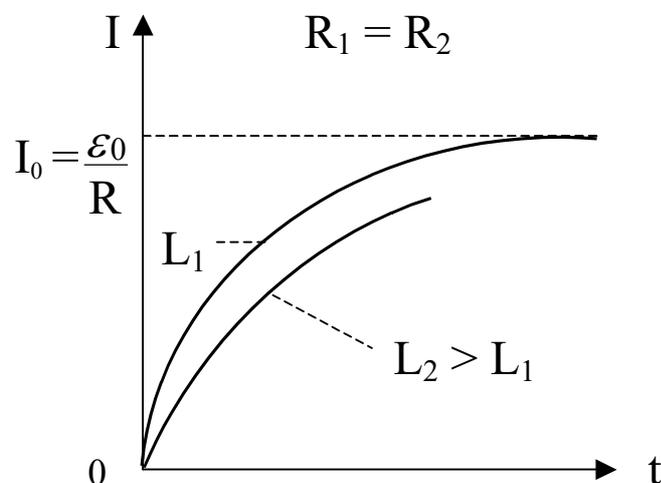


Рис. 2.92

Рассмотренные процессы указывают на то, что явление самоиндукции в электромагнетизме играет роль, аналогичную инерции в механике.

За счет этого явления изменение силы тока в электрических цепях при их замыкании и размыкании происходит не мгновенно, а постепенно.

### 2.3.25. Энергия магнитного поля

Рассчитаем, какую работу совершает электрический ток, протекающий в цепи, содержащей индуктивность, за время его исчезновения от значения  $I_0$  до нуля.

Элементарная работа тока за бесконечно малый промежуток времени

$$dA = \varepsilon_{is} Idt . \quad (2.253)$$

Если в это соотношение подставить выражение для эдс самоиндукции (2.235), то получим следующее дифференциальное уравнение:

$$dA = -LI dI , \quad (2.254)$$

откуда

$$A = \int_1^2 dA \Rightarrow A = -L \int_{I_0}^0 IdI \Rightarrow A = \frac{LI_0^2}{2} . \quad (2.255)$$

За счет работы  $A$  повышается внутренняя энергия проводников цепи и окружающей среды.

Из законов термодинамики и опытов с электромагнитными волнами следует, что носителем этой энергии является магнитное поле.

Поэтому энергия магнитного поля, создаваемого электрической цепью, может быть рассчитана по формуле:

$$W_M = \frac{LI^2}{2} . \quad (2.256)$$

Преобразуем формулу (2.256) так, чтобы в нее входили не характеристики цепи, а характеристики магнитного поля.

С этой целью рассмотрим однородное магнитное поле, существующее внутри бесконечно длинного соленоида, если по этому соленоиду протекает постоянный электрический ток.

Подставим в формулу (2.256) выражение (2.232) для индуктивности соленоида. Учтем, что индукция однородного магнитного поля внутри соленоида связана с силой тока, протекающего в этом соленоиде,

соотношением (2.177), а произведение  $sl$  определяет объем соленоида  $V$ . Тогда энергия однородного магнитного поля, заключенного в пространстве объемом  $V$ , равна:

$$W_M = \frac{B^2 V}{2\mu\mu_0}. \quad (2.257)$$

Для однородного магнитного поля можно ввести понятия объемной плотности энергии  $\omega$  или энергии, заключенной в единичном объеме пространства:

$$\omega = \frac{W_M}{V} \Rightarrow \omega = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}. \quad (2.258)$$

В общем случае магнитное поле не является однородным. Энергия такого магнитного поля в объеме  $V$  равна:

$$W_M = \int_V \omega_M dV. \quad (2.259)$$

### 3. МЕХАНИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

*Колебания – любой физический процесс, характеризующийся повторяемостью в пространстве и времени.*

Колебания бывают периодическими и непериодическими.

В дальнейшем будут изучаться только *периодические колебания – это такие колебания, при которых значения колеблющейся физической величины повторяются через одинаковые промежутки времени.*

*Минимальный промежуток времени  $T$ , по истечении которого значения колеблющейся физической величины повторяются, называется периодом колебаний.*

*Число полных колебаний, совершенных за единицу времени, определяет частоту колебаний  $\nu$ .*

Период колебаний и частота колебаний связаны между собой следующим соотношением:

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (3.1)$$

Колебания бывают свободными и вынужденными.

*Свободные колебания – это колебания, которые происходят за счет энергии, запасенной в системе первоначально. В процессе свободных колебаний восполнения потерь энергии не происходит.*

Вынужденные колебания происходят за счет энергии дополнительного источника.

Самым простейшим видом периодических колебаний являются гармонические колебания.

*Гармонические колебания – это такие колебания, при которых колеблющаяся физическая величина изменяется с течением времени по закону синуса или косинуса.*

#### 3.1. Механические гармонические колебания

*Механическое гармоническое колебание – прямолинейное неравномерное движение материальной точки, при котором радиус-вектор этой материальной точки изменяется с течением времени по закону синуса или косинуса.*

Уравнение механического гармонического колебания имеет следующий вид:

$$\vec{r}(t) = \vec{A} \cos(\omega_0 t + \alpha_0), \quad (3.2)$$

где  $\vec{A}$  – вектор, задающий направление прямой, вдоль которой происходят колебания (проводится от центра колебаний в одно из крайних положений материальной точки (рис. 3.1));  $|\vec{A}|=A$  – амплитуда колебаний;  $(\omega_0 t + \alpha_0)$  – фаза колебаний;  $\alpha_0$  – начальная фаза колебаний;  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$  – угловая частота (характеризует быстроту изменения фазы колебаний и численно равна числу полных колебаний, совершенных за  $2\pi$  секунд).

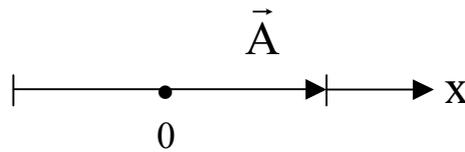


Рис. 3.1

3.1.1. Скорость и ускорение материальной точки при гармонических колебаниях

Скорость материальной точки при гармонических колебаниях  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ .

Из уравнения (3.2) следует, что скорость материальной точки, участвующей в механическом гармоническом колебании,

$$\vec{v}(t) = -\omega_0 \vec{A} \sin(\omega_0 t + \alpha_0) \quad (3.3)$$

или

$$\vec{v}(t) = \omega_0 \vec{A} \cos\left(\omega_0 t + \alpha_0 + \frac{\pi}{2}\right). \quad (3.4)$$

Так как ускорение материальной точки  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ , из выражения (3.3) получаем, что при гармонических колебаниях ускорение тела изменяется во времени по закону:

$$\vec{a}(t) = -\omega_0^2 \vec{A} \cos(\omega_0 t + \alpha_0) \quad (3.5)$$

или

$$\vec{a}(t) = \omega_0^2 \vec{A} \cos(\omega_0 t + \alpha_0 + \pi). \quad (3.6)$$

Проанализируем выражения (3.2), (3.4) и (3.6):

- скорость и ускорение материальной точки, участвующей в гармоническом колебании, изменяются с течением времени по гармоническому закону, причем с той же частотой  $\omega_0$ , что и смещение (радиус-вектор);
- колебания скорости опережают по фазе колебания смещения на  $\frac{\pi}{2}$  (или отстают на  $\frac{3}{2}\pi$ );
- колебания смещения и ускорения происходят со сдвигом по фазе на  $\pi$ , т.е. в противофазе;
- амплитуда колебаний скорости материальной точки равна  $\omega_0 A$ , а амплитуда колебаний ускорения –  $\omega_0^2 A$ .

Уравнения (3.2), (3.4) и (3.6) можно записать и в скалярной форме, если спроектировать соответствующие вектора на ось X (см. рис. 3.1):

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha_0); \quad (3.7)$$

$$v(t) = \omega_0 A \cos\left(\omega_0 t + \alpha_0 + \frac{\pi}{2}\right); \quad (3.8)$$

$$a(t) = \omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \alpha_0 + \pi). \quad (3.9)$$

### 3.1.2. Упругие и квазиупругие силы

Выясним природу силы, под действием которой материальная точка может совершать гармонические колебания.

Согласно второму закону динамики и формуле (3.9),

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F}(t) = m\omega_0^2 \vec{A} \cos(\omega_0 t + \alpha_0 + \pi). \quad (3.10)$$

*Для того чтобы материальная точка совершала гармонические колебания, на нее должна действовать сила, изменяющаяся с течением времени по гармоническому закону с частотой  $\omega_0$ .*

Если обозначить

$$m\omega_0^2 = k, \quad (3.11)$$

то из (3.10) следует, что

$$\vec{F}(t) = -k\vec{A}\cos(\omega_0 t + \alpha_0). \quad (3.12)$$

Сравнение формул (3.2) и (3.12) показывает:

$$\vec{F} = -k\vec{r} \Rightarrow F = -kx, \quad (3.13)$$

что соответствует выражению для упругой силы, если коэффициент упругости определяется соотношением (3.11).

*Материальная точка совершает гармонические колебания только под действием упругой силы.*

Однако тело может совершать гармонические колебания и под действием квазиупругих сил.

*Квазиупругие силы – это силы, которые по своей природе не являются упругими силами, однако подобны упругим силам по зависимости от координат при малых смещениях материальной точки от положения равновесия (рис. 3.2).*

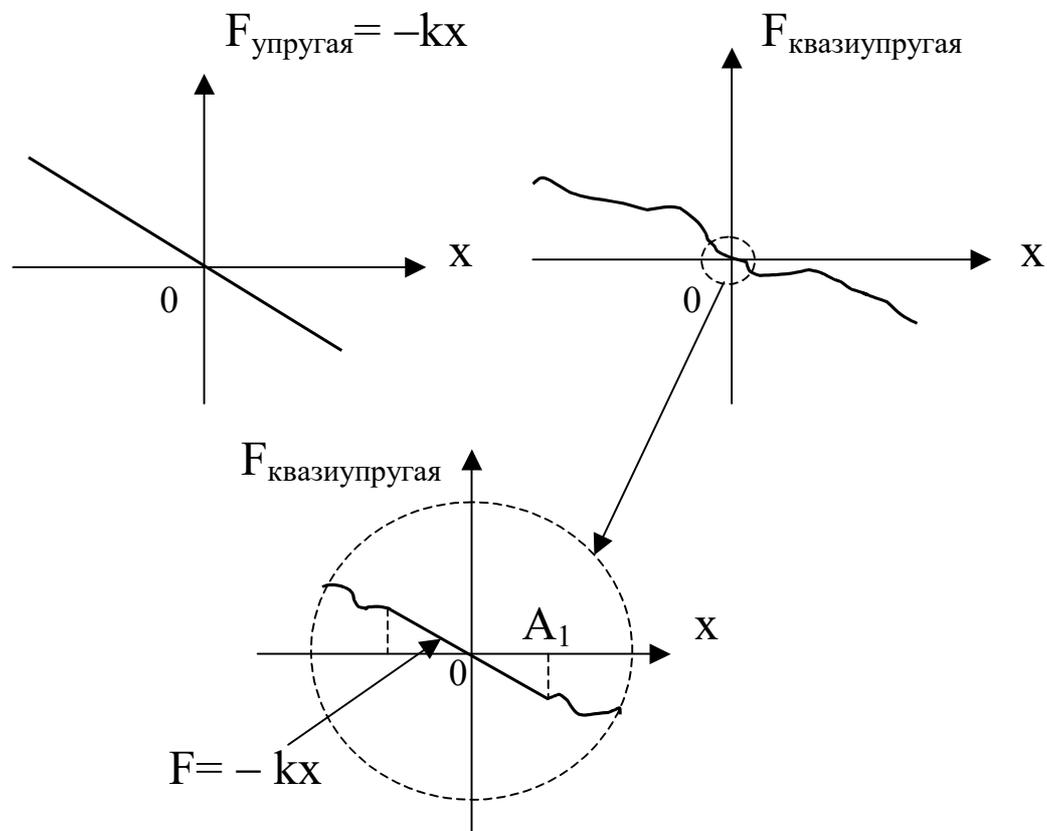


Рис. 3.2

Если амплитуда колебаний материальной точки не превышает  $A_1$ , то для квазиупругой силы, изображенной на рис. 3.2, справедливо выражение  $F = -kx$ . Поэтому при таких амплитудах тело будет совершать гармонические колебания и под действием квазиупругой силы.

Подобное, например, имеет место в начальный момент времени в случае малых амплитуд колебаний зданий, находящихся вблизи мест выполнения взрывных работ, когда затуханием колебаний еще можно пренебречь.

### 3.1.3. Энергия механических гармонических колебаний

При механических гармонических колебаниях изменяются координата и скорость материальной точки. Поэтому в процессе этих колебаний должны изменяться потенциальная и кинетическая энергии материальной точки.

Так как механические гармонические колебания тела происходят под действием упругой силы, то потенциальную энергию материальной точки при гармонических колебаниях можно определить из формулы для потенциальной энергии упругой деформации

$$W_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2} \quad (3.14)$$

и выражения (3.7):

$$W_{\text{п}}(t) = \frac{m\omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \alpha_0)}{2}. \quad (3.15)$$

Если использовать формулу тригонометрии

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad (3.16)$$

то потенциальная энергия материальной точки, участвующей в гармонических колебаниях, равна:

$$W_{\text{п}}(t) = \frac{m\omega_0^2 A^2 [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\alpha_0)]}{4}. \quad (3.17)$$

Кинетическая энергия материальной точки при гармонических колебаниях с учетом выражения (3.8) для ее скорости равна:

$$W_k = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow W_k(t) = \frac{m\omega_0^2 A^2 \cos^2\left(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{2}. \quad (3.18)$$

Применяя формулу (3.16) к выражению (3.18), получим, что кинетическая энергия тела при гармонических колебаниях изменяется со временем по закону:

$$W_k(t) = \frac{m\omega_0^2 A^2 [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\alpha_0 + \pi)]}{4}. \quad (3.19)$$

Из анализа выражений (3.17) и (3.19) следует:

- при механических гармонических колебаниях потенциальная и кинетическая энергии тела изменяются во времени по гармоническому закону с частотой  $2\omega_0$  (т.е. с удвоенной частотой по отношению к колебаниям смещения);
- колебания потенциальной и кинетической энергии материальной точки происходят со сдвигом по фазе, равным  $\pi$ , т.е. в противофазе.

Определим полную энергию тела при гармонических механических колебаниях:

$$W = W_{\text{п}} + W_k. \quad (3.20)$$

Согласно формулам (3.17) и (3.19),

$$W = \frac{m\omega_0^2 A^2}{4} [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\alpha_0) + 1 + \cos(2\omega_0 t + 2\alpha_0 + \pi)].$$

Полная энергия материальной точки при гармонических механических колебаниях равна:

$$W = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} = \text{const}. \quad (3.21)$$

Из этой формулы следуют важные выводы:

- полная энергия тела при гармонических механических колебаниях с течением времени не изменяется (это является следствием того, что упругая сила является консервативной силой);

- полная энергия тела при механических гармонических колебаниях прямо пропорциональна квадрату амплитуды колебаний ( $W \sim A^2$ ).

### 3.1.4. Векторная диаграмма

В ряде случаев механическое гармоническое колебание удобно изображать графически с помощью векторной диаграммы.

Представим механическое гармоническое колебание материальной точки

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha_0) \quad (3.22)$$

с помощью векторной диаграммы.

Для этого рассмотрим ось  $X$  и под углом  $\alpha_0$  к этой оси проведем вектор  $\vec{A}$ , модуль которого равен амплитуде колебаний (рис. 3.3).

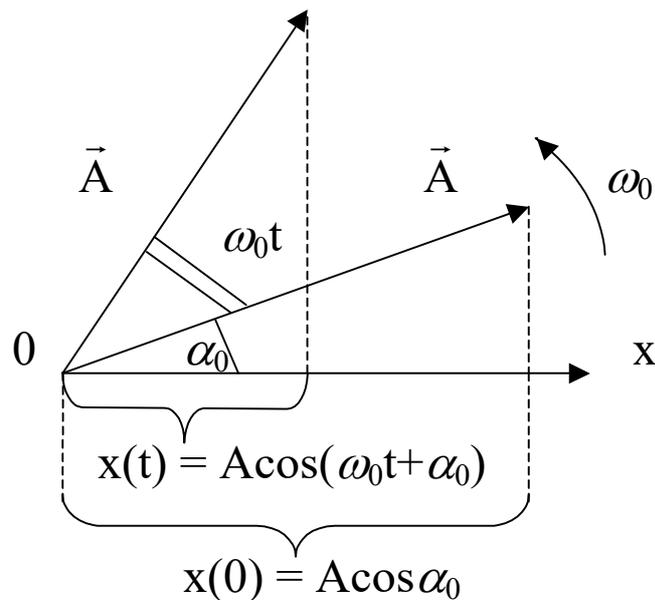


Рис. 3.3

Проекция вектора  $\vec{A}$  на ось  $X$  в этом случае определит смещение материальной точки от положения равновесия в начальный (нулевой) момент времени.

Пусть теперь вектор  $\vec{A}$  равномерно вращается вокруг точки  $O$  с угловой скоростью  $\omega_0$ .

За время  $t$  этот вектор повернется относительно начального положения на угол  $\omega_0 t$ .

Проекция вектора  $\vec{A}$  на ось X в момент времени  $t$  определяется выражением (3.22), т.е. уравнением механического гармонического колебания.

На векторной диаграмме механическое гармоническое колебание представляется в виде закона, по которому изменяется во времени проекция вектора  $\vec{A}$  на ось X, если этот вектор равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega_0$ .

### 3.1.5. Сложение механических гармонических колебаний

Чтобы сложить два и более колебаний, необходимо определить траекторию результирующего движения материальной точки и закон, по которому происходит ее движение по этой траектории.

#### 3.1.5.1. Сложение двух механических гармонических колебаний одинаковой частоты, происходящих вдоль одной прямой

Пусть имеются два сонаправленных гармонических колебания одинаковой частоты:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_{01}); \quad (3.23)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \alpha_{02}). \quad (3.24)$$

Задачу о сложении колебаний в данном случае удобно решать с помощью векторной диаграммы.

Построим векторы  $\vec{A}_1$ ,  $\vec{A}_2$  и вектор  $\vec{A}$ , который является их суммой (рис. 3.4).

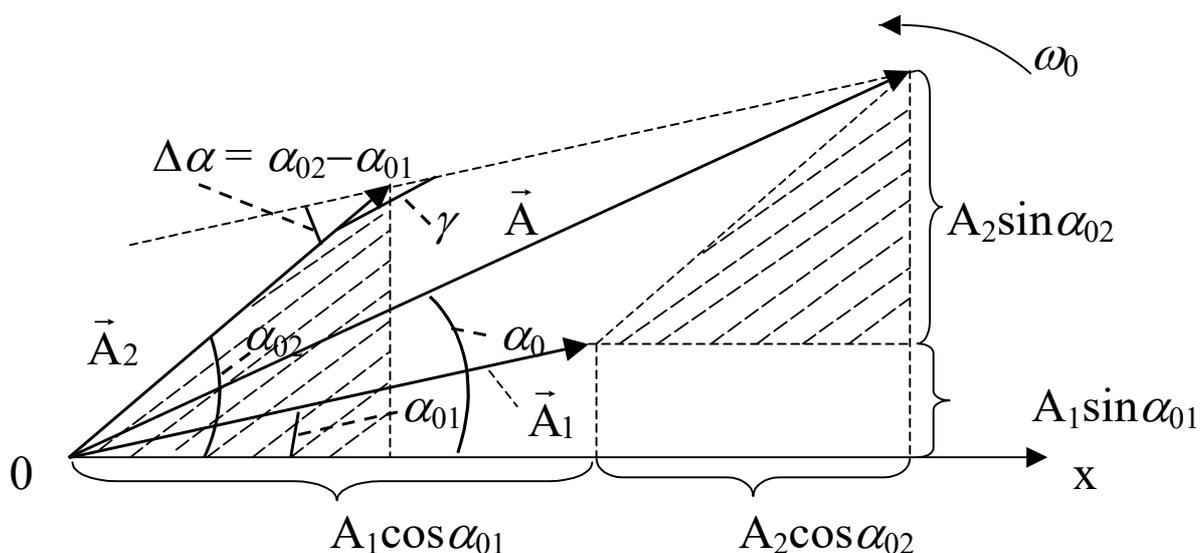


Рис. 3.4

Векторы  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$  равномерно вращаются вокруг точки  $O$  с угловой скоростью  $\omega_0$ .

С этой же угловой скоростью вращается и результирующий вектор  $\vec{A}$ .

Поэтому проекция вектора  $\vec{A}$  на ось  $X$  будет изменяться с течением времени по гармоническому закону с частотой  $\omega_0$ :

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha_0). \quad (3.25)$$

Таким образом, при сложении двух гармонических колебаний одинаковой частоты, происходящих вдоль одной прямой, возникает механическое гармоническое колебание той же частоты и того же направления, что и в случае складываемых колебаний.

Для того чтобы определить закон результирующего движения материальной точки (3.25) необходимо выразить амплитуду результирующего колебания  $A$  и его начальную фазу  $\alpha_0$  через известные величины – амплитуды и начальные фазы складываемых колебаний.

Из рис. 3.4 следует, что согласно теореме косинусов для тупого угла  $\gamma$  квадрат амплитуды результирующего колебания

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos \gamma = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos(\pi - \Delta\alpha),$$

откуда

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\alpha. \quad (3.26)$$

Учитывая, что заштрихованные на рис. 3.4 треугольники равны, имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{A_1 \sin \alpha_{01} + A_2 \sin \alpha_{02}}{A_1 \cos \alpha_{01} + A_2 \cos \alpha_{02}}. \quad (3.27)$$

Проанализируем соотношение (3.26).

1) Разность фаз складываемых колебаний  $\Delta\alpha = \pm 2n\pi$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  (максимальное взаимное усиление колебаний).

В этом случае

$$\cos \Delta\alpha = +1$$

и

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2,$$

откуда

$$A = A_{\max} = A_1 + A_2. \quad (3.28)$$

2) Разность фаз складываемых колебаний  $\Delta\alpha = \pm(2n+1)\pi, n=0,1,2,\dots$  (максимальное взаимное ослабление колебаний).

В этом случае

$$\cos\Delta\alpha = -1$$

и

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2,$$

откуда

$$A = A_{\min} = |A_1 - A_2|. \quad (3.29)$$

Если  $A_1 = A_2$ , то амплитуда результирующего колебания  $A = 0$ , и колебания полностью взаимно гасят друг друга.

Таким образом, при сложении двух сонаправленных гармонических колебаний одинаковой частоты, в зависимости от разности фаз складываемых колебаний амплитуда результирующего колебания лежит в следующих пределах:

$$A_1 + A_2 \geq A \geq |A_1 - A_2|. \quad (3.30)$$

3.1.5.2. Сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу

Рассмотрим для простоты два механических гармонических колебания одинаковой частоты, происходящих вдоль взаимно перпендикулярных направлений:

$$x = A\cos\omega_0 t;$$

$$y = B\cos(\omega_0 t + \alpha_0). \quad (3.31)$$

Результат сложения во многом определяется разностью фаз складываемых колебаний  $\alpha_0$ .

1)  $\alpha_0 = 0$ .

В этом случае уравнения колебаний (3.31) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}x &= A \cos \omega_0 t; \\y &= B \cos \omega_0 t.\end{aligned}\tag{3.32}$$

Чтобы найти уравнение траектории результирующего движения тела, необходимо связать между собой  $X$  и  $Y$ , исключив время.

Из (3.32) следует, что

$$\begin{aligned}\frac{x}{A} &= \cos \omega_0 t; \\ \frac{y}{B} &= \cos \omega_0 t,\end{aligned}$$

и траектория результирующего движения тела описывается уравнением:

$$y = \frac{B}{A} x.\tag{3.33}$$

В результате сложения колебаний материальная точка будет совершать движение вдоль прямой, изображенной на рис. 3.5. При этом смещение тела по осям  $X$  и  $Y$  ограничивается амплитудами колебаний  $A$  и  $B$ .

Найдем закон движения материальной точки  $\mathbf{r}(t)$  по указанной траектории.

Из рис. 3.5 следует, что

$$r^2 = x^2 + y^2 = A^2 \cos^2 \omega_0 t + B^2 \cos^2 \omega_0 t,$$

и

$$\mathbf{r}(t) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos \omega_0 t.\tag{3.34}$$

В данном случае при сложении двух взаимно перпендикулярных колебаний материальная точка совершает гармоническое колебание с

частотой  $\omega_0$  вдоль указанной траектории движения с амплитудой, равной  $\sqrt{A^2 + B^2}$ .

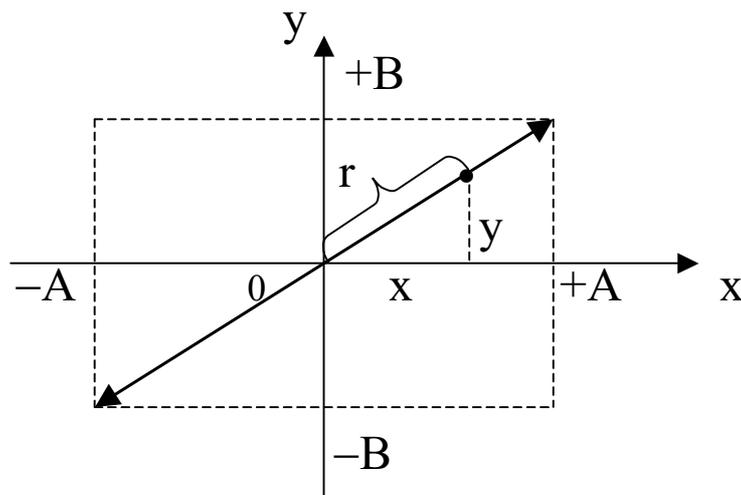


Рис. 3.5

2)  $\alpha_0 = \pi$ .

Уравнения колебаний (3.31) имеют следующий вид:

$$x = A \cos \omega_0 t; \quad (3.34)$$

$$y = B \cos(\omega_0 t + \pi) = -B \cos \omega_0 t. \quad (3.35)$$

Из этих уравнений следует, что

$$\frac{x}{A} = \cos \omega_0 t,$$

а

$$\frac{y}{B} = -\cos \omega_0 t,$$

и траектория результирующего движения материальной точки в данном случае описывается уравнением:

$$y = -\frac{B}{A} x. \quad (3.36)$$

Эта траектория изображена на рис. 3.6.

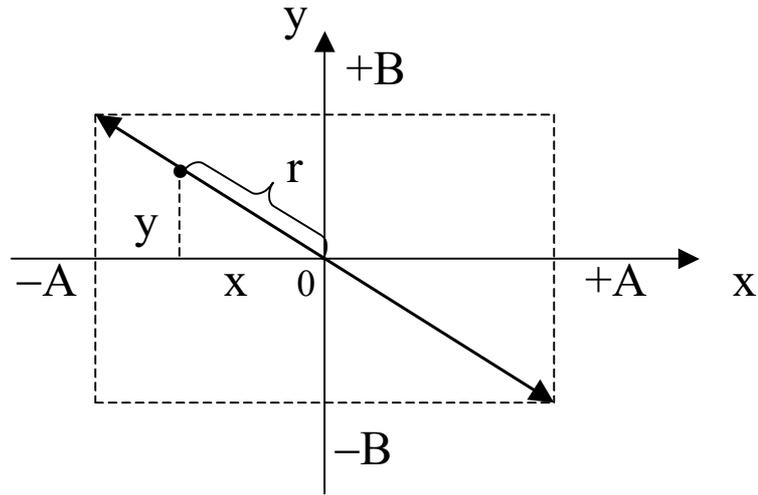


Рис. 3.6

Закон движения материальной точки по этой траектории как и в предыдущем случае описывается уравнением (3.34).

Таким образом, в результате сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой частоты, разность фаз которых  $\alpha_0 = \pi$ , материальная точка совершает гармоническое колебание с частотой  $\omega_0$  вдоль указанной траектории движения с амплитудой, равной  $\sqrt{A^2 + B^2}$ .

$$3) \alpha_0 = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Уравнения колебаний (3.31) в этом случае имеют следующий вид:

$$x = A \cos \omega_0 t; \quad (3.37)$$

$$y = B \cos(\omega_0 t \pm \frac{\pi}{2}). \quad (3.38)$$

После преобразований имеем:

$$\frac{x}{A} = \cos \omega_0 t; \quad (3.39)$$

$$\frac{y}{B} = \mp \sin \omega_0 t, \quad (3.40)$$

откуда

$$\frac{x^2}{A^2} = \cos^2 \omega_0 t; \quad (3.41)$$

$$\frac{y^2}{B^2} = \sin^2 \omega_0 t. \quad (3.42)$$

Если сложить левые и правые части этих соотношений, то получим, что траектория результирующего движения материальной точки описывается уравнением

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1. \quad (3.43)$$

Из уравнения (3.43) следует, что эта траектория представляет собой эллипс, изображенный на рис. 3.7.

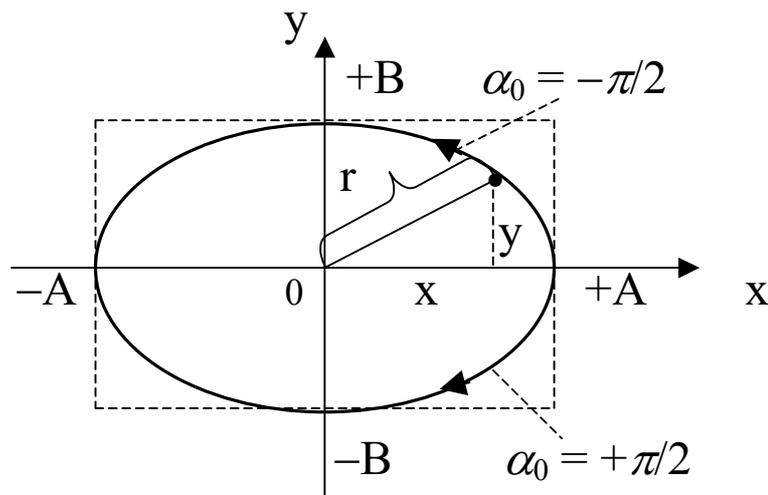


Рис. 3.7

Закон движения материальной точки по найденной траектории находится из соотношения  $r^2 = x^2 + y^2$  и представляет собой уравнение:

$$r(t) = \sqrt{A^2 \cos^2 \omega_0 t + B^2 \sin^2 \omega_0 t}. \quad (3.44)$$

Из уравнения (3.44) следует, что тело будет совершать неравномерное криволинейное движение по эллиптической траектории.

Направление движения тела определяется знаком разности фаз складываемых колебаний  $\alpha_0$ .

Если амплитуды колебаний вдоль взаимно перпендикулярных направлений равны ( $A=B$ ), то уравнение результирующей траектории движения материальной точки (3.43) и закон ее движения по этой траектории (3.44) имеют следующий вид:

$$x^2 + y^2 = A^2; \quad (3.45)$$

$$r(t) = A. \quad (3.46)$$

В данном случае материальная точка совершает равномерное движение по окружности (см. рис. 3.8.).

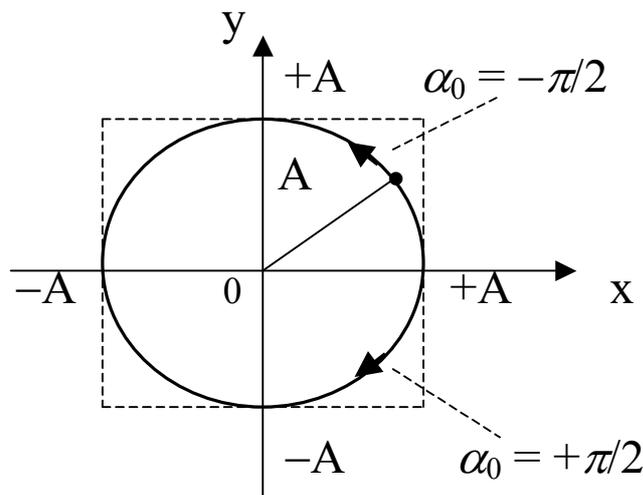


Рис. 3.8

*Траектории результирующего движения тела, возникающие при сложении двух взаимно перпендикулярных колебаний, называются фигурами Лиссажу (см., например, рис. 3.5–3.8).*

Если частоты складываемых колебаний не равны друг другу, то фигуры Лиссажу представляют собой сложные замкнутые кривые.

Форма этих кривых позволяет определить кратность частот складываемых колебаний.

Для этого необходимо провести две прямые, параллельные координатным осям, так, чтобы они максимальное число раз пересекали фигуру Лиссажу.

Зная число этих пересечений, можно установить кратность частот.

Например, для фигуры Лиссажу, изображенной на рис. 3.9, кратность частот определяется из условия, что  $2\omega_x = 1\omega_y$ .

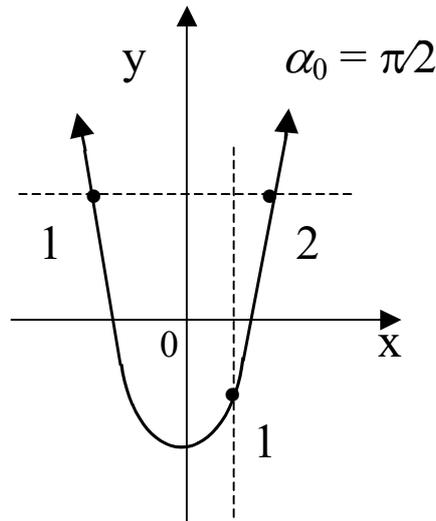


Рис. 3.9

Мы рассмотрели свободные механические гармонические колебания. Такие колебания происходят за счет энергии, запасенной в колебательной системе первоначально. Предполагалось, что потери энергии этих колебаний отсутствуют. Поэтому такие идеализированные свободные колебания могли продолжаться сколь угодно долго.

Если рассмотреть реальные свободные колебания, то, из-за различных потерь энергии, эти свободные колебания будут затухающими и через некоторое время прекратятся.

Чтобы колебания продолжались длительное время, необходимо восполнять потери энергии колебаний. Для этих целей необходимо использовать дополнительный источник энергии. Однако возникающие в этом случае колебания уже будут не свободными, а вынужденными.

Затухающие и вынужденные колебания будут рассмотрены в дальнейшем на примере электромагнитных колебаний.

## 3.2. Электромагнитные колебания

### 3.2.1. Свободные колебания в идеальном колебательном контуре

*Идеальный колебательный контур – это система, в которой отсутствуют все без исключения виды потери энергии.*

Зарядим конденсатор такого колебательного контура (рис. 3.10) и найдем закон, по которому этот заряд будет изменяться с течением времени.

В процессе разряда конденсатора в цепи колебательного контура протекает переменный электрический ток  $I$ , который является причиной возникновения в катушке индуктивности эдс самоиндукции  $\mathcal{E}_{is}$ .

На основании второго правила Кирхгофа для рассматриваемой замкнутой цепи справедливо следующее соотношение:

$$U_c = \mathcal{E}_{is}. \quad (3.47)$$

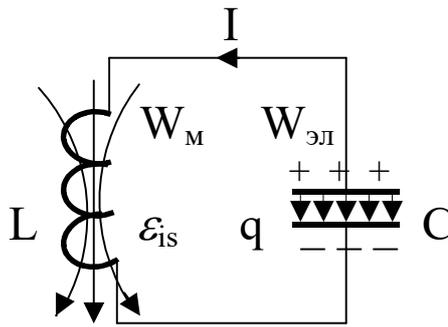


Рис. 3.10

Так как  $U_c = \frac{q}{C}$ ;  $\mathcal{E}_{is} = -L \frac{dI}{dt}$ ;  $I = \frac{dq}{dt}$ , то соотношение (3.47) приводит к следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{CL} = 0. \quad (3.48)$$

Если обозначить

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0, \quad (3.49)$$

то окончательный вид дифференциального уравнения для заряда конденсатора в случае идеального колебательного контура имеет вид:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0. \quad (3.50)$$

Это однородное дифференциальное уравнение второго порядка позволяет найти закон  $q(t)$ , по которому изменяется с течением времени заряд конденсатора в рассматриваемом колебательном контуре.

Параметр  $\omega_0$  определяет частоту свободных электромагнитных колебаний в идеальном колебательном контуре.

Период таких колебаний равен:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (3.51)$$

Выражение (3.51) носит название формулы Томсона.

В теории колебаний для упрощения записи дифференциальных уравнений принято обозначать производные по времени в виде соответствующего числа точек над дифференцируемой физической величиной.

Например, дифференциальное уравнение (3.50) может быть записано в виде:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (3.52)$$

Решением дифференциального уравнения (3.50) (или (3.52)) является выражение:

$$q(t) = q_0 \cos(\omega_0 t + \alpha_0), \quad (3.53)$$

где  $q_0$  и  $\alpha_0$  – амплитуда и начальная фаза колебаний заряда конденсатора.

Значения параметров  $q_0$  и  $\alpha_0$  определяются из начальных условий.

Таким образом, заряд конденсатора в идеальном колебательном контуре изменяется с течением времени по гармоническому закону с частотой  $\omega_0$ .

Так как  $U_c = \frac{q}{C}$ , то закон, по которому изменяется с течением времени напряжение на конденсаторе, имеет следующий вид:

$$U_c(t) = \frac{q_0}{C} \cos(\omega_0 t + \alpha_0) \Rightarrow U_c(t) = U_{c0} \cos(\omega_0 t + \alpha_0), \quad (3.54)$$

где  $U_{c0} = \frac{q_0}{C}$  – амплитуда колебаний напряжения на конденсаторе.

Согласно (3.54), напряжение на конденсаторе в случае идеального колебательного контура изменяется с течением времени по гармоническому закону с частотой  $\omega_0$  синфазно (в одинаковой фазе) с колебаниями заряда конденсатора.

Определим, каким образом изменяется сила тока в цепи идеального колебательного контура.

Учитывая, что  $I = \frac{dq}{dt}$ , и используя выражение (3.53), получаем:

$$I(t) = -q_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha_0) \Rightarrow I(t) = I_0 \cos\left(\omega_0 t + \alpha_0 + \frac{\pi}{2}\right), \quad (3.55)$$

где  $I_0 = q_0 \omega_0$  – амплитуда колебаний силы тока.

Сила тока в цепи идеального колебательного контура изменяется с течением времени по гармоническому закону с частотой  $\omega_0$ .

Колебания силы тока опережают по фазе колебания заряда конденсатора на  $\frac{\pi}{2}$  (или отстают на  $\frac{3\pi}{2}$ ).

Определим, по какому закону в процессе работы идеального колебательного контура изменяются энергия электрического поля внутри конденсатора  $W_{\text{эл}}$  и энергия магнитного поля внутри катушки индуктивности  $W_{\text{м}}$ .

1) Энергия электрического поля внутри конденсатора.

Энергия  $W_{\text{эл}} = \frac{q^2}{2C}$ . Если использовать (3.53), то эта энергия равна:

$$W_{\text{эл}} = \frac{q_0^2}{2C} \cos^2(\omega_0 t + \alpha_0),$$

откуда

$$W_{\text{эл}} = \frac{q_0^2}{4C} [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\alpha_0)]. \quad (3.56)$$

2) Энергия магнитного поля внутри катушки индуктивности.

Эта энергия  $W_{\text{м}} = \frac{LI^2}{2}$ . С учетом (3.55) получаем, что

$$W_{\text{м}} = \frac{LI_0^2}{2} \cos^2\left(\omega_0 t + \alpha_0 + \frac{\pi}{2}\right),$$

откуда

$$W_{\text{м}} = \frac{LI_0^2}{4} [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\alpha_0 + \pi)]. \quad (3.57)$$

Проанализируем соотношения (3.56) и (3.57):

- энергии электрического и магнитного полей в идеальном колебательном контуре изменяются с течением времени по гармоническому закону с частотой  $2\omega_0$  (т.е. с удвоенной частотой по сравнению с частотой колебаний заряда конденсатора);
- колебания энергии электрического и магнитных полей происходят в противофазе;
- так как в процессе колебаний в идеальном колебательном контуре полностью отсутствует потеря энергии, то амплитудные (максимальные) значения колебаний рассматриваемых энергий должны быть одинаковы:

$$W_{\text{эл}}^{\text{max}} = W_{\text{м}}^{\text{max}} \Rightarrow \frac{q_0^2}{2C} = \frac{LI_0^2}{2} \Rightarrow U_{\text{co}}^2 C = LI_0^2$$

и

$$U_{\text{co}} = I_0 \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (3.58)$$

Формула (3.58) связывает между собой амплитудные значения колебаний напряжения на конденсаторе и силы тока в идеальном колебательном контуре.

Свободные электромагнитные колебания в идеальном колебательном контуре могут продолжаться сколь угодно долго.

### 3.2.2. Свободные затухающие электромагнитные колебания

В любом реальном колебательном контуре в процессе свободных колебаний происходят потери энергии.

Уменьшение первоначальной энергии колебательного контура происходит, в основном, за счет следующих явлений:

- потери энергии за счет нагрева проводников;
- потери энергии, обусловленные поляризацией диэлектрика в конденсаторе;
- потери энергии, связанные с явлением гистерезиса в сердечнике катушки индуктивности;
- потери энергии за счет излучения колебательным контуром электромагнитных волн.

Современные технологии и методы физического эксперимента позволяют существенно уменьшить или исключить три первых из указанных выше видов потери энергии в колебательном контуре. Однако последний из

них, обусловленный излучением колебательным контуром электромагнитных волн, принципиально исключить нельзя.

Поэтому свободные электромагнитные колебания в реальном колебательном контуре всегда будут затухающими.

Включим в цепь колебательного контура, изображенного на рис. 3.10, электрическое сопротивление  $R$ , которое будет ответственно за все возможные потери энергии.

Тогда схему реального колебательного контура можно представить в виде, изображенном на рис. 3.11.

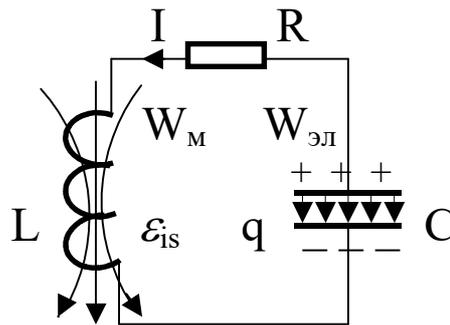


Рис. 3.11

Зарядим конденсатор в этом колебательном контуре и найдем закон, по которому этот заряд будет изменяться с течением времени.

На основании второго правила Кирхгофа для рассматриваемого колебательного контура можно записать, что

$$U_R + U_C = \varepsilon_{is}. \quad (3.59)$$

Если выполнить те же подстановки, что и в случае соотношения (3.47), и учесть, что  $U_R = IR$ , то из выражения (3.59) получим дифференциальное уравнение относительно заряда конденсатора:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{CL} = 0. \quad (3.60)$$

Обозначим

$$\frac{R}{2L} = \beta. \quad (3.61)$$

Параметр  $\beta$  называется коэффициентом затухания колебательного контура.

Окончательный вид дифференциального уравнения для заряда конденсатора реального колебательного контура получим при подстановке в уравнение (3.60) соотношений (3.49) и (3.61):

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0. \quad (3.62)$$

Дифференциальное уравнение (3.62) можно записать и в таком виде:

$$\ddot{q} + 2\beta \dot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (3.63)$$

Это однородное дифференциальное уравнение второго порядка решается путем составления характеристического уравнения.

Будем искать решение дифференциального уравнения (3.62) в виде:

$$q = q' e^{\Gamma t}, \quad (3.64)$$

где  $\Gamma$  – коэффициент, не зависящий от времени.

Чтобы получить характеристическое уравнение, необходимо выражение (3.64) подставить в дифференциальное уравнение (3.62).

После подстановки имеем следующее характеристическое уравнение:

$$r^2 + 2\beta r + \omega_0^2 = 0. \quad (3.65)$$

Уравнение (3.65) имеет следующие корни:

$$r_{1,2} = -\beta \pm \underbrace{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}_{\varphi}. \quad (3.66)$$

Значения этих корней определяют решения дифференциального уравнения (3.62).

Проанализируем возможные значения корней характеристического уравнения.

1)  $\beta > \omega_0$  (сильное затухание).

В этом случае характеристическое уравнение имеет два действительных корня, а решение дифференциального уравнения (3.62) имеет вид:

$$q(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \Rightarrow q(t) = C_1 e^{-(\beta - \varphi)t} + C_2 e^{-(\beta + \varphi)t}, \quad (3.67)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные.

Из (3.67) следует, что в рассматриваемом случае в цепи, изображенной на рис. 3.11, происходит аperiodический разряд конденсатора и никаких колебаний в колебательном контуре не возникает.

В зависимости от значений произвольных постоянных  $C_1$  и  $C_2$  в колебательном контуре возможны два процесса аperiodического разряда конденсатора (рис. 3.12).

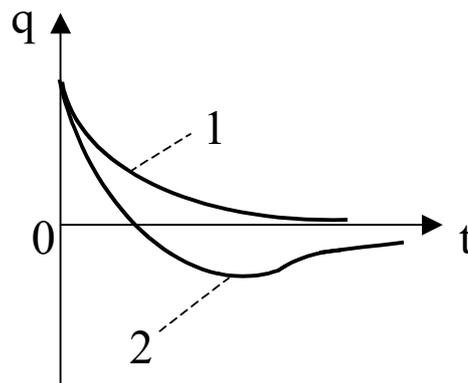


Рис. 3.12

2)  $\beta = \omega_0$  (критический режим).

Корни характеристического уравнения кратные ( $r_1 = r_2 = -\beta$ ) и дифференциальное уравнение (3.62) имеет решение:

$$q(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 t e^{r_1 t} \Rightarrow q(t) = C_1 e^{-\beta t} + C_2 t e^{-\beta t}. \quad (3.68)$$

Как и в предыдущем случае, никаких колебаний в рассматриваемой цепи не возникает, а происходит аperiodический разряд конденсатора.

Значение сопротивления колебательного контура, соответствующее равенству  $\beta = \omega_0$ , называется критическим сопротивлением колебательного контура  $R_k$ .

Найдем значение этого сопротивления:

$$\frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (3.69)$$

3)  $\beta < \omega_0$  (колебательный режим).

Характеристическое уравнение имеет два мнимых корня.

Данный режим работы колебательного контура возможен только в том случае, если значение электрического сопротивления, включенного в цепь колебательного контура, строго меньше критического:

$$R < R_k. \quad (3.70)$$

После преобразований решение дифференциального уравнения для заряда конденсатора в этом случае имеет вид:

$$q(t) = q_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha_0), \quad (3.71)$$

где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (3.72)$$

Уравнение (3.71) описывает затухающие колебания для заряда конденсатора при свободных колебаниях в реальном колебательном контуре, а выражение (3.72) определяет частоту этих затухающих колебаний.

Из (3.72) следует, что частота свободных затухающих колебаний всегда меньше частоты свободных колебаний в идеальном колебательном контуре:

$$\omega < \omega_0. \quad (3.73)$$

График функции (3.71) изображен на рис. 3.13.

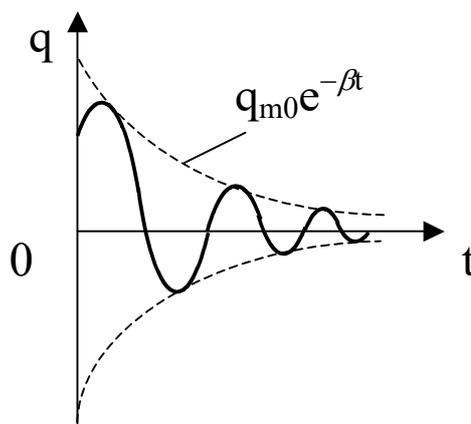


Рис. 3.13

Определим, по какому закону изменяется с течением времени напряжение на конденсаторе при свободных электромагнитных колебаниях.

Так как  $U_c = q/c$ , то из уравнения (3.71) получаем, что

$$U_c(t) = \underbrace{\frac{q_{m0}}{C}}_{U_{cm0}} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha_0) \Rightarrow U_c(t) = U_{cm0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha_0). \quad (3.74)$$

Согласно уравнению (3.74), процесс изменения напряжения на конденсаторе представляет собой затухающие колебания, происходящие синфазно с колебаниями заряда конденсатора.

Сила тока в цепи  $I = dq/dt$ . Поэтому закон изменения с течением времени силы тока в цепи колебательного контура при свободных затухающих колебаниях можно определить из уравнения (3.71):

$$I(t) = -q_{m0} \beta e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha_0) - q_{m0} \omega e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha_0),$$

откуда

$$I(t) = q_{m0} \underbrace{\omega_0 e^{-\beta t}}_{I_{m0}} \left[ -\frac{\beta}{\omega_0} \cos(\omega t + \alpha_0) - \frac{\omega}{\omega_0} \sin(\omega t + \alpha_0) \right]. \quad (3.75)$$

Если сделать следующие обозначения:

$$-\frac{\beta}{\omega_0} = \cos \psi; \quad \frac{\omega}{\omega_0} \sin \psi, \quad (3.76)$$

то из выражения (3.75) следует, что

$$I(t) = I_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha_0 + \psi). \quad (3.77)$$

Сила тока в цепи рассматриваемого колебательного контура изменяется со временем по закону затухающих колебаний. При этом сдвиг фаз между колебаниями заряда конденсатора и силы тока равен  $\psi$ .

Определим значение этого сдвига фаз.

Согласно соотношениям (3.76), косинус рассматриваемого угла отрицателен, а синус – положителен. В связи с этим, угол  $\psi$  должен лежать во второй четверти.

Таким образом, сдвиг фаз между колебаниями заряда конденсатора и силы тока в цепи реального колебательного при свободных колебаниях должен быть больше, чем  $\frac{\pi}{2}$  (т.е.  $\frac{\pi}{2} < \psi < \pi$ ).

В случае идеального колебательно контура рассматриваемый сдвиг фаз был равен  $\frac{\pi}{2}$ .

Энергия электромагнитного поля  $W_{\text{э-м}}$  в колебательном контуре пропорциональна квадрату амплитуды колебаний силы тока или квадрату амплитуды колебаний напряжения на конденсаторе.

Поэтому энергия реального колебательного контура при свободных электромагнитных колебаниях убывает по закону:

$$W_{\text{э-м}} = W_{\text{э-м}0} e^{-2\beta t}. \quad (3.78)$$

Согласно (3.78), коэффициент затухания для энергии равен  $2\beta$ .

### 3.2.2.1. Характеристики колебательного контура

Характеристиками реального колебательного контура являются:

- $\beta = \frac{R}{2L}$  – коэффициент затухания;
- $\tau = \frac{1}{\beta}$  – время релаксации (время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз);
- $R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$  – критическое сопротивление колебательного контура;
- $\lambda$  – логарифмический декремент затухания (определяется логарифмом отношения амплитуды колебаний в данный момент времени к амплитуде колебаний через время, равное периоду колебаний):

$$\lambda = \ln \frac{q_{m0} e^{-\beta t}}{q_{m0} e^{-\beta(t+T)}} = \beta T, \quad (3.79)$$

откуда

$$\lambda = \frac{1}{N_\tau}, \quad (3.80)$$

где  $N_\tau$  – число полных колебаний, совершаемых в колебательном контуре за время, равное времени релаксации;

- $Q$  – добротность колебательного контура (определяется как величина, обратно пропорциональная логарифмическому декременту затухания):

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_\tau. \quad (3.81)$$

Из (3.81) следует, что чем выше добротность колебательного контура, тем большее число колебаний совершается за время, равное времени релаксации.

Если затухания в колебательном контуре малы ( $\beta^2 \ll \omega_0^2$ ), то частота затухающих колебаний  $\omega \approx \omega_0$  и из формул (3.61), (3.79) и (3.81) следует, что в этом случае

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (3.82)$$

Добротность колебательного контура можно рассчитать и по формуле:

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}, \quad (3.83)$$

где  $W$  – энергия колебательного контура в данный момент времени, а  $\Delta W$  – уменьшение энергии колебательного контура через промежуток времени, равный периоду колебаний.

Согласно (3.83), *чем выше добротность колебательного контура, тем медленнее происходят потери энергии в этом колебательном контуре.*

### 3.2.3. Вынужденные электромагнитные колебания

Чтобы электромагнитные колебания в реальном колебательном контуре продолжались длительное время, необходимо восполнять потери энергии этих колебаний.

Для этой цели в цепь колебательного контура, изображенного на рис. 3.11, последовательно с элементами контура включим дополнительный источник энергии, который за счет переменного напряжения на контактах будет оказывать на колебательный контур внешнее периодически изменяющееся воздействие с частотой  $\Omega$  (рис. 3.14).

Колебания, возникающие в колебательном контуре в этом случае, носят название вынужденных электромагнитных колебаний.

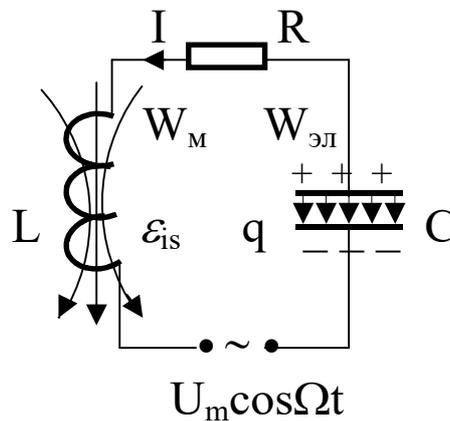


Рис. 3.14

Найдем закон, по которому с течением времени изменяется заряд конденсатора в случае вынужденных колебаний.

Используя, как и в предыдущих случаях, для колебательного контура второе правило Кирхгофа и обозначения, принятые ранее, получим для заряда конденсатора следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L} \cos \Omega t. \quad (3.84)$$

В сокращенной форме дифференциальное уравнение (3.84) имеет вид:

$$\ddot{q} + 2\beta \dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L} \cos \Omega t. \quad (3.85)$$

Чтобы определить закон изменения со временем заряда конденсатора при вынужденных электромагнитных колебаниях, необходимо решить уравнение (3.84) или (3.85).

Уравнение (3.84) – неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка.

Общим решением такого дифференциального уравнения является сумма двух решений:

$$q(t) = q_1(t) + q_2(t), \quad (3.86)$$

где  $q_1(t) = q_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha_0)$  – общее решение однородного дифференциального уравнения, соответствующее уравнению затухающих колебаний, а  $q_2(t)$  – частное решение неоднородного дифференциального уравнения.

Можно показать, что частное решение неоднородного дифференциального уравнения в рассматриваемом случае представляет собой выражение:

$$q_2(t) = q_m \cos(\Omega t + \Psi), \quad (3.87)$$

где

$$q_m = \frac{U_m}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}, \quad (3.88)$$

а

$$\operatorname{tg} \Psi = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (3.89)$$

Таким образом, общее решение неоднородного дифференциального уравнения (3.84) имеет вид:

$$q(t) = q_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha_0) + q_m \cos(\Omega t + \Psi). \quad (3.90)$$

↙  
0 (при  $t \geq 5\tau$ )

Через промежуток времени, превышающий  $5\tau$ , первое слагаемое в выражении (3.90) обратится в ноль, и закон установившихся вынужденных колебаний для заряда конденсатора будет описываться уравнением

$$q(t) = q_m \cos(\Omega t + \Psi). \quad (3.91)$$

В рассматриваемом колебательном контуре возможны два вида резонанса – резонанс напряжения и резонанс тока.

### 3.2.3.1. Резонанс напряжения

Зависимость от времени напряжения на конденсаторе при вынужденных электромагнитных колебаниях можно определить из (3.91), если учесть, что  $U_c = q/C$ :

$$U_c(t) = \frac{q_m}{C} \cos(\Omega t + \Psi) \Rightarrow U_c(t) = U_{cm} \cos(\Omega t + \Psi),$$

где

$$U_{cm} = \frac{U_m}{CL\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}. \quad (3.92)$$

Из выражения (3.92) следует, что амплитуда колебаний напряжения на конденсаторе является функцией частоты  $\Omega$  :

$$U_{cm} = U_{cm}(\Omega). \quad (3.93)$$

Если проанализировать (3.92), то установим, что при некоторой частоте  $\Omega$  значение  $U_{cm}$  достигает максимального значения. Это явление называется резонансом напряжения, а соответствующая частота – резонансной частотой  $\Omega_U^{\text{рез}}$ .

Найдем значение этой резонансной частоты.

Амплитуда колебаний напряжения на конденсаторе максимальна тогда, когда минимально подкоренное выражение в формуле (3.92).

Продифференцируем это подкоренное выражение:

$$\left[ (\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2 \right]' = 2(\omega_0^2 - \Omega^2)(-2\Omega) + 8\beta^2\Omega. \quad (3.94)$$

Приравнявая нулю соотношение (3.94), получаем, что искомая резонансная частота равна:

$$\Omega_U^{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (3.95)$$

Из формулы (3.95) следует, что при возрастании коэффициента затухания  $\beta$  значение резонансной частоты  $\Omega_U^{\text{рез}}$  уменьшается.

Найдем резонансное значение амплитуды колебаний напряжения на конденсаторе  $U_{cm}^{\text{рез}}$ .

Для этого значение резонансной частоты (3.95) подставим в формулу (3.92). После преобразований получим, что

$$U_{cm}^{\text{рез}} = \frac{U_m}{LC2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (3.96)$$

Оценим  $U_{\text{см}}^{\text{рез}}$  для случая, когда затухания в колебательном контуре малы.

Так как в этом случае  $\beta^2 \ll \omega_0^2$ , то

$$U_{\text{см}}^{\text{рез}} = \frac{U_m}{LC2\beta\omega_0}, \quad (3.97)$$

и при возрастании  $\beta$  значение  $U_{\text{см}}^{\text{рез}}$  уменьшается.

Подставим в формулу (3.97) значение  $\beta$  и  $\omega_0$ , тогда

$$U_{\text{см}}^{\text{рез}} = \frac{U_m}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (3.98)$$

Сопоставление этого выражения с формулой (3.82) показывает, что

$$\frac{U_{\text{см}}^{\text{рез}}}{U_m} = Q. \quad (3.99)$$

Согласно (3.99) добротность колебательного контура определяет, во сколько раз амплитуда колебаний напряжения на конденсаторе при резонансе больше амплитуды колебаний напряжения источника, включенного в цепь этого колебательного контура.

На рис. 3.15 представлен вид резонансных кривых для резонанса напряжения при различных значениях коэффициента затухания.

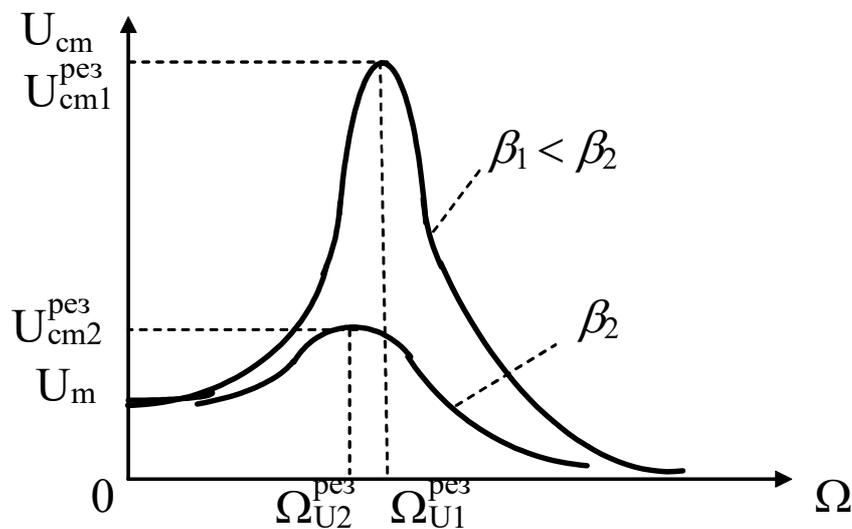


Рис. 3.15

### 3.2.3.2. Резонанс тока

Найдем зависимость от времени силы тока в цепи колебательного контура при вынужденных колебаниях. Для этого продифференцируем по времени выражение (3.91):

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_m \Omega \sin(\Omega t + \Psi) \Rightarrow I(t) = I_m \cos(\Omega t + \Psi + \pi/2),$$

где

$$I_m = q_m \Omega = \frac{U_m \Omega}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} \Rightarrow I_m = I_m(\Omega). \quad (3.100)$$

Согласно (3.100) амплитуда колебаний силы тока в цепи колебательного контура при вынужденных колебаниях является функцией частоты  $\Omega$ .

Анализ выражения (3.100) свидетельствует о том, что при некотором значении частоты  $\Omega$  амплитуда колебаний силы тока  $I_m$  достигает максимального значения.

Это явление называется резонансом тока, а соответствующая частота  $\Omega$  – резонансной частотой  $\Omega_I^{\text{рез}}$ .

Найдем значение частоты  $\Omega_I^{\text{рез}}$ .

Для этого разделим числитель и знаменатель выражения (3.100) на  $\Omega$ . После преобразований имеем:

$$I_m = \frac{U_m}{L \sqrt{\frac{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2}{\Omega^2} + 4\beta^2}}. \quad (3.101)$$

Амплитуда колебаний силы тока в цепи колебательного контура при вынужденных электромагнитных колебаниях  $I_m$  максимальна тогда, когда минимально подкоренное выражение в формуле (3.101). Это имеет место при  $\Omega = \omega_0$ .

Поэтому искомая резонансная частота

$$\Omega_I^{\text{рез}} = \omega_0 \Rightarrow \Omega_I^{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (3.102)$$

Резонансная частота  $\Omega_1^{\text{рез}}$  не зависит от коэффициента затухания  $\beta$ .

Из (3.101) следует, что резонансное значение амплитуды колебаний силы тока в цепи колебательного контура равно:

$$I_m^{\text{рез}} = \frac{U_m}{2L\beta}. \quad (3.103)$$

Если коэффициент затухания  $\beta$  увеличивается, то значение  $I_m^{\text{рез}}$  уменьшается.

При подстановке в (3.103) значения коэффициента затухания получаем, что

$$I_m^{\text{рез}} = \frac{U_m}{R}. \quad (3.104)$$

На рис. 3.16 представлены резонансные кривые в случае резонанса тока.

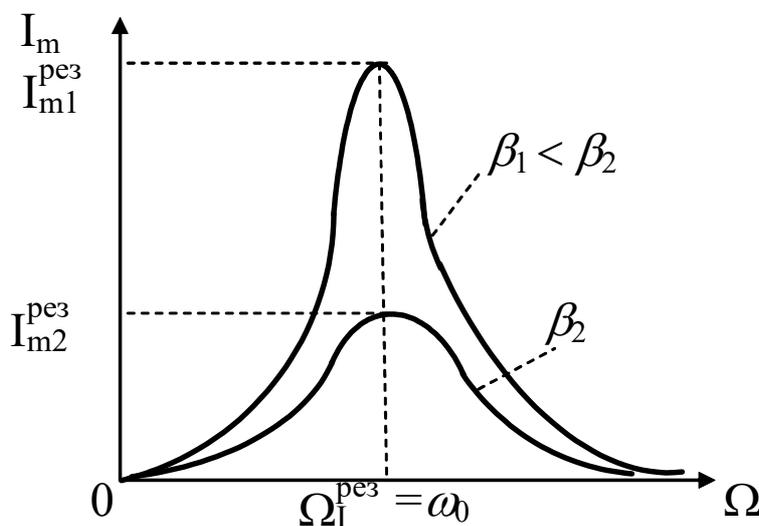


Рис. 3.16

Как и при резонансе напряжения, в данном случае по резонансным кривым можно определить добротность колебательного контура.

Для этого преобразуют рис. 3.16 так, как это показано на рис. 3.17.

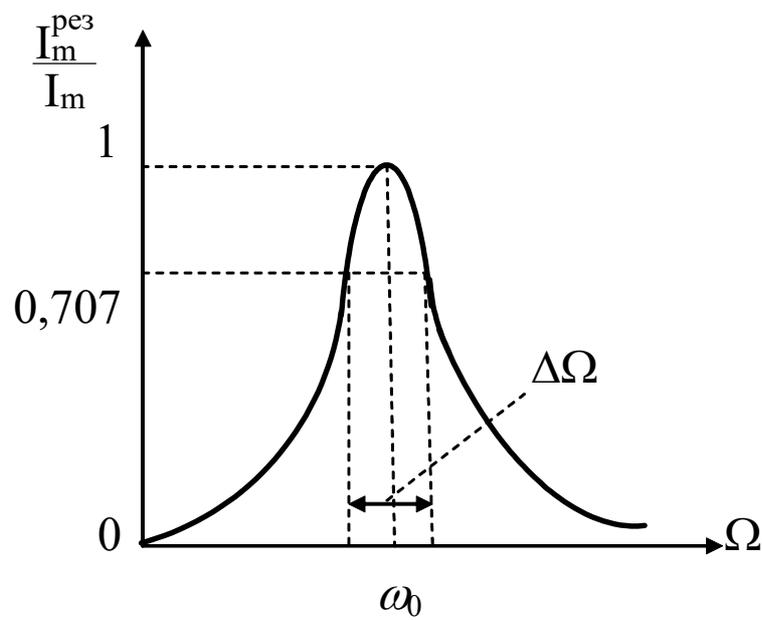


Рис. 3.17

Добротность колебательного контура

$$Q \approx \frac{\omega_0}{\Delta\Omega}. \quad (3.105)$$

## 4. МЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

Если частицы упругой среды привести в колебательное движение, то, вследствие взаимодействия между частицами, эти колебания не будут локализованы в какой-то области пространства, а будут распространяться в этой среде.

*Процесс распространения колебаний в среде называется волновым процессом или волной.*

*Процесс распространения механических колебаний в упругой среде называется механической волной.*

*Признаком наличия волнового процесса является перенос в пространстве энергии колебаний.*

При распространении механических колебаний переноса в пространстве массы вещества не происходит.

*Для механических волн характерно следующее: колебания даже ближайших частиц упругой среды происходят со сдвигом по фазе. Это является следствием конечности скорости передачи взаимодействия между частицами.*

Различают продольные и поперечные волны.

*Поперечные волны – это такие волны, у которых колебания частиц среды происходят в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны (например, волны на поверхности жидкости, волны в длинном шнуре).*

*Продольные волны – волны, у которых колебания частиц среды происходят вдоль направления ее распространения (например, звуковые волны, волны растяжения и сжатия в длинной пружине).*

### 4.1. Основные понятия и определения

- *Волновое поле – пространство, охваченное волновым процессом.*
- *Волновые поверхности – поверхности, проведенные через равновесные положения частиц, колеблющихся в одинаковой фазе. Волновые поверхности неподвижны. По форме волновых поверхностей различают волны плоские, сферические, цилиндрические и т.п.*
- *Фронт волны – граница, разделяющая область пространства, охваченную волновым процессом, от остального пространства. Фронт волны перемещается в пространстве.*
- *Фазовая скорость волны  $V$  – скорость распространения данной фазы колебаний.*
- *Период волны  $T$  – минимальный промежуток времени, в течение которого частицы среды совершают одно полное колебание.*
- *Частота волны  $\nu$  – число полных колебаний, совершаемых частицами среды в единицу времени:*

$$v = \frac{1}{T}. \quad (4.1)$$

- Угловая частота волны  $\omega$ .

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi v. \quad (4.2)$$

- Длина волны  $\lambda$  – расстояние, на которое перемещается фронт волны за время, равное периоду.

$$\lambda = vT. \quad (4.3)$$

- Волновое число  $k$ .

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}. \quad (4.4)$$

- Волновой вектор  $\vec{k}$  – вектор, направление которого совпадает с направлением распространения волны, а его модуль равен волновому числу (т.е.  $|\vec{k}| = k$ ).

- Групповая скорость  $\mathbf{u} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$  – скорость движения группы или цуга волн, образующих в данный момент времени локализованный в пространстве волновой пакет. Она определяет скорость переноса в пространстве энергии. В случае распространения волны в линейной среде (такая среда, свойства которой не изменяются под воздействием колебаний) групповая скорость совпадает с фазовой скоростью.

4.2. Уравнение плоской гармонической механической волны. Принцип суперпозиции

*Уравнение волны*

$$S = S(x, y, z, t) \quad (4.5)$$

*является периодической функцией координат равновесных положений частиц и времени.*

Это уравнение позволяет определить смещение от положения равновесия любой частицы упругой среды в любой момент времени.

В простейшем случае, когда волна является плоской, уравнение (4.5) упрощается и  $S$  является периодической функцией координат волновых поверхностей, которым принадлежат частицы, и времени:

$$S = S(x,t). \quad (4.6)$$

Получим уравнение плоской гармонической механической волны, которая распространяется вдоль оси  $X$  в среде, не поглощающей энергию.

Пусть частицы упругой среды, принадлежащие волновой поверхности с координатой  $X = 0$ , совершают гармонические колебания относительно своих положений равновесия, происходящие по закону  $S(0,t) = A \cos \omega t$  (рис. 4.1).

Частицы, принадлежащие волновой поверхности с координатой  $X$ , придут в колебательное движение только через некоторое время  $\tau = \frac{X}{v}$ .

Поэтому колебания этих частиц относительно положений равновесия происходят по закону:

$$S(x,t) = A \cos \omega(t - \tau) \Rightarrow S(x,t) = A \cos \left( \omega t - \frac{\omega x}{v} \right). \quad (4.7)$$

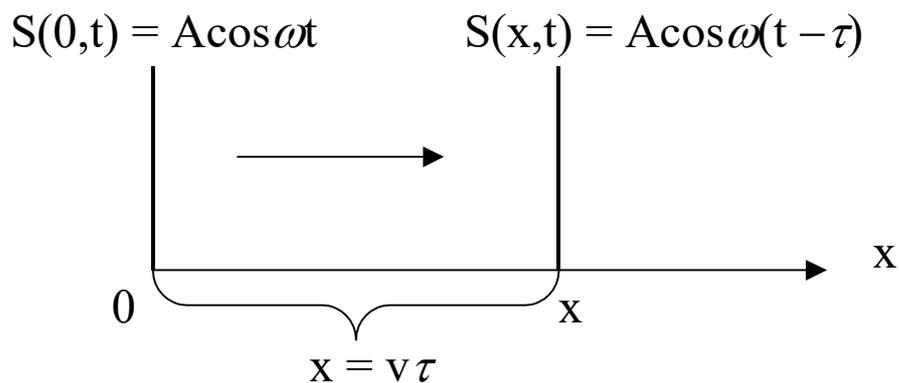


Рис. 4.1

Согласно (4.4)  $\frac{\omega}{v} = k$ , поэтому уравнение плоской гармонической механической волны, распространяющейся вдоль оси X, в среде, не поглощающей энергию, имеет следующий вид:

$$S(x, t) = A \cos(\omega t - kx), \quad (4.8)$$

где  $A$  – амплитуда волны;  $(\omega t - kx)$  – фаза волны.

Если волна распространяется в направлении, противоположном направлению оси X, то

$$S(x, t) = A \cos(\omega t + kx). \quad (4.9)$$

В случае распространения плоской гармонической механической волны вдоль или против направления  $\vec{r}$  уравнения (4.8) и (4.9) приобретают вид:

$$S(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}). \quad (4.10)$$

$$S(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t + \vec{k}\vec{r}). \quad (4.11)$$

Для комплексных чисел согласно формуле Эйлера справедливо выражение:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad (4.12)$$

где  $i = \sqrt{-1}$ . Поэтому уравнение плоской гармонической волны, например, (4.10) можно записать в виде:

$$S(\vec{r}, t) = \operatorname{Re} A e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}. \quad (4.13)$$

В ряде случаев представляют интерес сферические волны.

*Сферические волны – это такие волны, волновыми поверхностями которых являются концентрические сферы.*

Если произвести аналогичные расчеты, то получим, что сферическая гармоническая волна, распространяющаяся вдоль направления  $\vec{r}$ , описывается уравнением

$$S(\mathbf{r}, t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \quad (4.14)$$

или уравнением

$$S(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \frac{A}{r} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}. \quad (4.15)$$

*Если в линейной среде одновременно распространяются несколько волн, то при наложении волн выполняется принцип суперпозиции: колебания частиц среды, вызванные данной волной, происходят независимо от колебаний, вызванных другими волнами.*

В этом случае результирующее смещение данной частицы среды от своего положения равновесия в любой момент времени определяется геометрической суммой смещений, которые получает эта частица, участвуя в каждом волновом процессе.

#### 4.3. Волновое уравнение

При решении задачи о распространении волн в какой-либо среде необходимо первоначально решить волновое уравнение.

Решением этого уравнения является уравнение волны, соответствующее условиям задачи.

Для плоской гармонической волны волновое уравнение связывает между собой вторые частные производные по координатам и времени от функции (4.8).

Найдем вид волнового уравнения для этого частного случая.

После дифференцирования уравнения (4.8) имеем:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = -k^2 A \cos(\omega t - kx), \quad (4.16)$$

$$а \quad \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t - kx). \quad (4.17)$$

Из этих уравнений получаем, что

$$\frac{\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}}{\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}} = \frac{k^2}{\omega^2} = \frac{1}{v^2}, \quad (4.18)$$

откуда искомое волновое уравнение в случае плоской гармонической механической волны имеет вид:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} . \quad (4.19)$$

В общем случае волновое уравнение записывается следующим образом:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} . \quad (4.20)$$

Уравнение (4.20) представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных относительно  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $t$ .

Любая функция  $S(x, y, z, t)$ , являющаяся решением этого дифференциального уравнения, соответствует уравнению волны.

Вид уравнения волны зависит от начальных и граничных условий, накладываемых на решение волнового уравнения (4.20).

#### 4.4. Стоячие волны

Стоячие волны возникают при наложении двух встречных волн одинаковой амплитуды и частоты.

Подобная ситуация наблюдается при отражении волн вблизи границ раздела сред.

Получим уравнение стоячей волны для случая наложения двух встречных плоских гармонических механических волн одинаковой амплитуды и фазы, которые распространяются вдоль оси  $x$  в среде, не поглощающей энергию.

Уравнения встречных волн в рассматриваемом случае имеют вид:

$$\begin{aligned} S_1 &= A \cos(\omega t - kx), \\ S_2 &= A \cos(\omega t + kx). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Если сложить эти уравнения, то получим уравнение стоячей волны:

$$S(x, t) = S_1 + S_2 = 2A \cos kx \cos \omega t . \quad (4.22)$$

Из уравнения (4.22) следует, что в случае стоячей волны все частицы упругой среды совершают гармонические колебания относительно своих

положений равновесия с частотой  $\omega$ , однако амплитуда этих колебаний  $A_0$  является функцией координат частиц:

$$A_0(x) = |2A \cos kx|. \quad (4.23)$$

В стоячей волне различают узлы (точки, в которых амплитуда колебаний частиц равна нулю) и пучности (точки, в которых амплитуда колебаний частиц максимальна и равна  $2A$ ).

Найдем координаты узлов и пучностей.

- Узлы ( $A_0 = 0$ )

Согласно формуле (4.23), координаты узлов можно найти из условия:

$$kx = \pm \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi, \text{ где } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.24)$$

Так как  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , то узлы стоячей волны имеют координаты:

$$x_{\text{узел}} = \pm \frac{\left( n + \frac{1}{2} \right) \lambda}{2}, \text{ где } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.25)$$

- Пучности ( $A_0 = A_0^{\max} = 2A$ )

Координаты пучностей находятся из формулы (4.23) при выполнении условия:

$$kx = \pm n\pi, \text{ где } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.26)$$

откуда 
$$x_{\text{пуч}} = \pm \frac{n\lambda}{2}, \text{ где } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.27)$$

Для стоячих волн характерно следующее:

- 1) расстояние между двумя соседними узлами или пучностями равно  $\frac{\lambda}{2}$ ;
- 2) частицы, расположенные между двумя соседними узлами, совершают колебания в одинаковой фазе;
- 3) при переходе через узел фаза колебаний частиц скачком изменяется на  $\pi$ ;

- 4) прямая и встречная волны, имея равные амплитуды, переносят одинаковую энергию колебаний в противоположных направлениях; в результате, при стоячих волнах перенос энергии в пространстве отсутствует; по этой причине стоячие волны называют волнами условно.

На рис. 4.2. представлены фотографии стоячей волны для моментов времени  $t = 0$  и  $t = T/2$  (конец стрелки указывает смещение от положения равновесия соответствующей частицы упругой среды).

В том случае, когда среда ограничена размером  $L$ , возникновение стоячих волн возможно, если  $L = n\lambda/2$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

При отражении волны от среды более плотной, чем та в которой она распространялась первоначально, на границе раздела сред образуется узел и отраженная от этой границы волна скачком изменяет свою фазу на  $\pi$ .

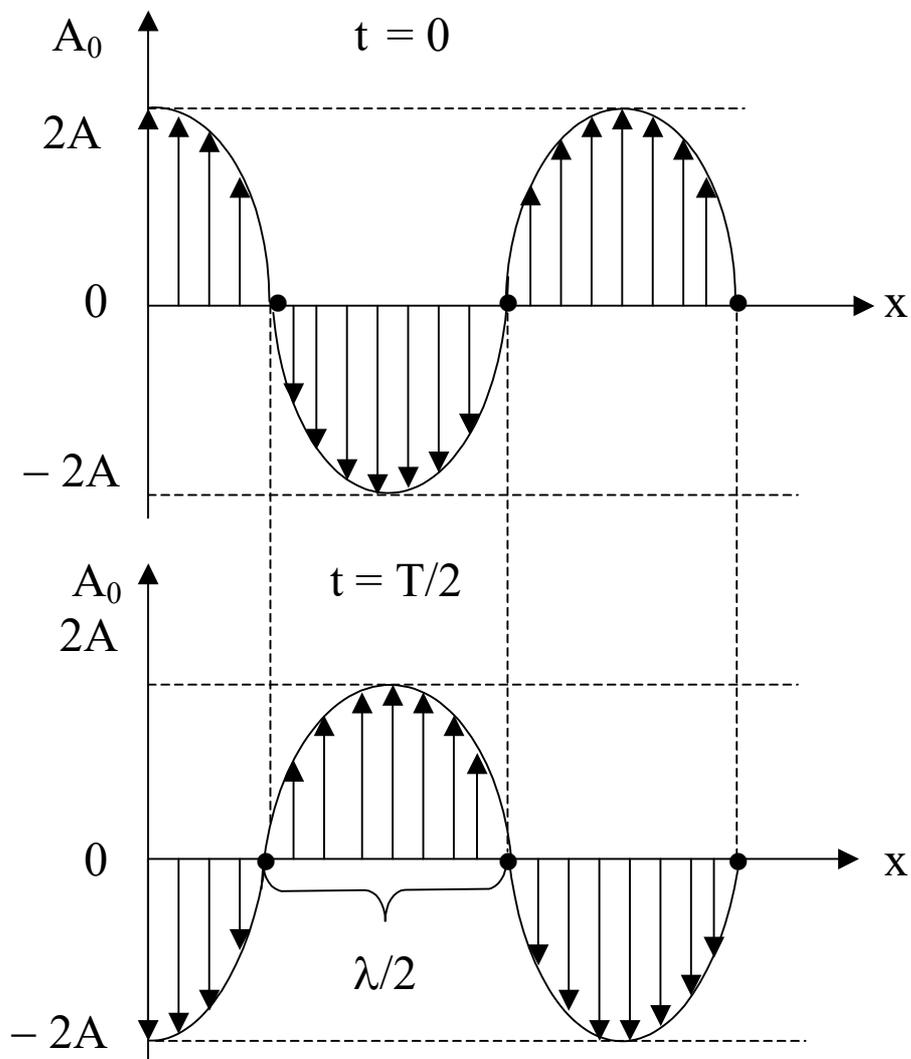


Рис. 4.2

#### 4.5. Интерференция механических волн

Складываться могут не только колебания, но и волны.

Наложение волн может быть простым и интерференционным.

*Интерференция – это такое наложение волн, при котором колебания, вызванные этими волнами, в одних точках волнового поля максимально взаимно усиливают друг друга, а в других точках волнового поля максимально взаимно ослабляют друг друга.*

*Интерферировать могут только когерентные волны – волны, разность фаз которых в каждой точке волнового поля с течением времени не изменяется.*

*Источники когерентных волн называются когерентными источниками.*

Рассмотрим две плоские когерентные гармонические механические волны, которые при наложении в некоторой точке волнового поля создают колебания частиц упругой среды одинакового направления.

В точке наложения волн происходит сложение двух гармонических колебаний одинаковой частоты и одинакового направления. Поэтому квадрат амплитуды результирующей волны в этой точке определяется выражением (3.26):

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\alpha. \quad (4.28)$$

Так как для когерентных волн разность фаз  $\Delta\alpha = \text{const}$ , то результат интерференции волн зависит от величины  $\Delta\alpha$ .

В точках волнового поля, для которых

$$\Delta\alpha = \pm(2n + 1)\pi, \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.29)$$

$$\cos\Delta\alpha = -1$$

амплитуда результирующей волны минимальна:

$$A^{\min} = |A_1 - A_2|. \quad (4.30)$$

В данном случае волны при наложении максимально взаимно ослабляют друг друга, и в рассматриваемых точках волнового поля возникает интерференционный минимум.

Если  $A_1 = A_2$ , то  $A = 0$ , и волны при наложении полностью взаимно гасят друг друга.

Условие (4.29) называется условием минимумов для интерференции волн.

В точках волнового поля, для которых

$$\Delta\alpha = \pm 2n\pi, \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.31)$$

$$\cos\Delta\alpha = + 1$$

амплитуда результирующей волны максимальна:

$$A^{\max} = A_1 + A_2. \quad (4.32)$$

В этом случае волны при наложении максимально взаимно усиливают друг друга. В указанных точках волнового поля возникает интерференционный максимум.

Условие (4.31) называется условием максимумов для интерференции волн.

#### 4.6. Дифракция механических волн

*Дифракция – явление взаимодействия волны с препятствием на ее пути, в результате которого волна огибает препятствие, т.е. попадает в область геометрической тени.*

Расчет дифракционной картины является сложной математической задачей.

Качественно объяснить явление дифракции позволяет *принцип Гюйгенса: все точки фронта волны являются источниками вторичных волн.*

Используя этот принцип, можно найти положение фронта волны в любой последующий момент времени, если известно положение фронта волны в данный момент времени.

Рассмотрим случай, когда плоская механическая волна встречает на своем пути препятствие в виде плоской щели (см. рис. 4.3).

В некоторый момент времени фронт волны достигнет щели. Каждая точка этого фронта является источником вторичных волн (точечные источники создают сферические волны). Если построить огибающую фронта волны, то установим, что после прохождения щели фронт волны вблизи краев щели перестает быть плоским.

Согласно принципу Гюйгенса, точечные источники, находящиеся на этих участках фронта волны, создают волны, которые попадают в область геометрической тени.

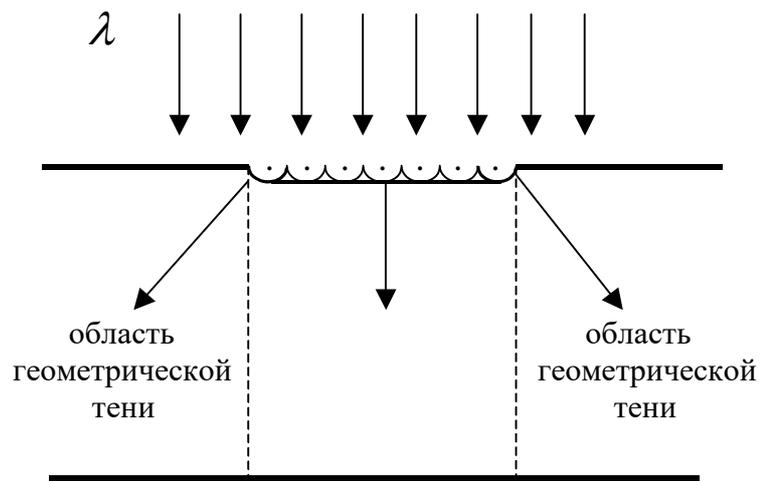


Рис. 4.3

## 5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ТЕОРИЯ МАКСВЕЛЛА

5.1. Основные экспериментальные и теоретические работы, которые привели к созданию электромагнитной теории Максвелла

- 1785 г. – Ш. Кулон экспериментально установил закон, позволяющий определить силу взаимодействия двух точечных электрических зарядов.

Несколько позднее им также был установлен закон взаимодействия двух магнитных полюсов. С этого времени электрические и магнитные явления стали изучаться независимо друг от друга.

- 1820 г. – В этом году Х. Эрстед впервые обнаружил магнитное действие тока, которое указывало на взаимосвязь электрических и магнитных явлений.

- 1820-1830 гг. – Проанализировав опыты Эрстеда, А. Ампер высказал гипотезу о том, что магнитные свойства веществ обусловлены некоторыми молекулярными токами, которые протекают в веществе.

Природа этих токов в то время была неизвестна, так как было неизвестно строение атома и влияние электронной системы атома на магнитные свойства вещества.

- 1831 г. – В этом году М. Фарадей открыл явление электромагнитной индукции, устанавливающее прямую взаимосвязь между электрическими и магнитными явлениями.

- 1860-е гг. – В результате обобщения работ Кулона, Эрстеда, Ома, Фарадея, Гаусса, Ампера и других ученых, Дж. Максвелл создал теорию, которая описывала электрические и магнитные явления с единых позиций.

Основу этой теории составляют четыре фундаментальных уравнения классической электродинамики, которые содержат в себе основные законы электричества и магнетизма.

Роль уравнений Максвелла в электродинамике аналогична роли начал термодинамики или законов динамики в классической механике.

5.2. Переменное магнитное поле – источник вихревого электрического поля. Первое уравнение Максвелла

В основе этого уравнения Максвелла лежит явление электромагнитной индукции и закон Фарадея  $\mathcal{E}_i = -\frac{d\psi}{dt}$ , записанный в более общем виде.

Согласно выражению (2.132) эдс, действующая в замкнутой цепи, равна циркуляции вектора напряженности поля сторонних сил  $\mathcal{E} = \oint_l \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l}$ .

В случае эдс индукции этим вектором напряженности является напряженность вихревого электрического поля  $\vec{E}_{\text{вих}}$ .

Поэтому

$$\mathcal{E}_i = \oint_l \vec{E}_{\text{вих}} d\vec{l}, \quad (5.1)$$

т.е. эдс индукции равна циркуляции вектора напряженности вихревого электрического поля.

В отличие от вихревого электрического поля электростатическое поле является потенциальным полем. Поэтому согласно теореме о циркуляции вектора напряженности электростатического поля (2.61)

$$\oint_l \vec{E}_{\text{эл}} d\vec{l} = 0. \quad (5.2)$$

Поток вектора индукции магнитного поля, через произвольную поверхность определяется выражением (см. формулу (2.203)):

$$\psi = \int_s \vec{B} d\vec{s}. \quad (5.3)$$

С учетом выражений (5.1) и (5.3) закон Фарадея имеет вид:

$$\oint_l \vec{E}_{\text{вих}} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \left( \int_s \vec{B} d\vec{s} \right). \quad (5.4)$$

Если прибавить к левой части этого соотношения ноль в виде выражения (5.2), то получим:

$$\oint_l \vec{E}_{\text{эл}} d\vec{l} + \oint_l \vec{E}_{\text{вих}} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \left( \int_s \vec{B} d\vec{s} \right). \quad (5.5)$$

После преобразований левой части (5.5)

$$\oint_l (\vec{E}_{\text{эл}} + \vec{E}_{\text{вих}}) d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \left( \int_s \vec{B} d\vec{s} \right). \quad (5.6)$$

В пространстве одновременно могут существовать как потенциальное, так и вихревое электрические поля. Поэтому в общем случае под

напряженностью электрического поля следует понимать вектор напряженности полного электрического поля:

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{эл}} + \vec{E}_{\text{вих}}. \quad (5.7)$$

Тогда из (5.6) получаем, что

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \left( \int_s \vec{B} d\vec{s} \right), \quad (5.8)$$

т.е. циркуляция вектора напряженности полного электрического поля равна с обратным знаком скорости изменения магнитного потока, пронизывающего поверхность  $S$ , которая опирается на контур интегрирования  $l$ .

Формула (5.8) представляет собой первое уравнение Максвелла.

Таким образом, переменное магнитное поле является источником вихревого электрического поля. Это электрическое поле является вихревым потому, что циркуляция вектора напряженности полного электрического поля в общем случае не равна нулю.

Линии напряженности вихревого электрического поля всегда замкнуты. Электрических зарядов, создающих вихревые электрические поля, в природе не существует.

Источниками вихревых электрических полей являются движущиеся электрические заряды (или токи).

На рис. 5.1 показаны все основные элементы, входящие в первое уравнение Максвелла, для случая, когда  $\frac{dB}{dt} > 0$ .

Направление единичного вектора нормали  $\vec{n}$  к поверхности  $S$  связано с направлением обхода контура  $l$  правилом “правого буравчика”;  $d\vec{s} = \vec{n} ds$ ; вектор  $d\vec{l}$  направлен по обходу контура, а модуль  $|d\vec{l}| = dl$ .

Так как индукция магнитного поля возрастает ( $\frac{dB}{dt} > 0$ ), то, согласно (5.8),  $\oint_l \vec{E} d\vec{l} < 0$  и угол  $\alpha$  между векторами  $\vec{E}$  и  $d\vec{l}$  должен быть тупым.

На первом уравнении Максвелла основана работа ускорителей заряженных частиц, которые называются бетатронами.

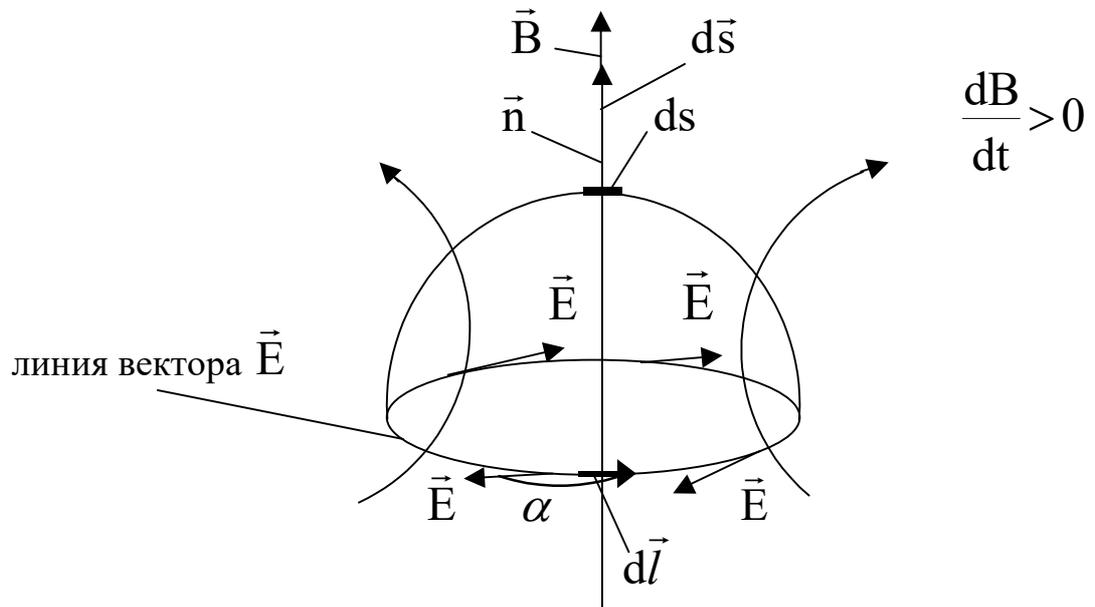


Рис. 5.1

### 5.3. Третье уравнение Максвелла

Этим уравнением является теорема Гаусса для электростатического поля

$$\oint_S \vec{D} d\vec{s} = \sum_i q_i, \quad (5.9)$$

записанная для общего случая, когда электрические заряды, охватываемые замкнутой поверхностью  $S$ , распределены по объему непрерывно.

Если обозначить объемную плотность электрических зарядов как  $\rho$ , то результирующий электрический заряд, заключенный в объеме  $V$ , который охватывает замкнутая поверхность  $S$ , равен

$$\int_V \rho dv. \quad (5.10)$$

С учетом (5.10) теорема Гаусса имеет следующий вид:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{s} = \int_V \rho dv. \quad (5.11)$$

Соотношение (5.11) является третьим уравнением Максвелла: *поток вектора индукции электрического поля через произвольную замкнутую поверхность равен электрическому заряду, охватываемому этой поверхностью.*

Электрическое поле, рассматриваемое в уравнении (5.11), является потенциальным полем.

Линии вектора  $\vec{D}$  разомкнуты.

Уравнение (5.11) доказывает существование в природе электрических зарядов.

#### 5.4. Четвертое уравнение Максвелла

Четвертым уравнением является теорема Гаусса для магнитного поля:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{s} = 0. \quad (5.12)$$

*Поток вектора индукции магнитного поля через произвольную замкнутую поверхность равен нулю.*

В данном случае теорема Гаусса доказывает отсутствие в природе магнитных зарядов.

5.5. Переменное электрическое поле – источник вихревого магнитного поля. Второе уравнение Максвелла

В отличие от рассмотренных трех уравнений это уравнение было получено самим Максвеллом как следствие предложенной им гипотезы.

Эта гипотеза заключается в следующем: *если переменное магнитное поле создает вихревое электрическое поле, то должен существовать и обратный эффект, т.е. переменное электрическое поле должно являться источником вихревого магнитного поля.*

С каждым магнитным полем обязательно связан электрический ток. *Электрический ток, ответственный за указанное выше магнитное поле, был назван Максвеллом током смещения.*

Рассмотрим природу тока смещения на примере процесса заряда плоского конденсатора с тонкими обкладками (рис. 5.2).

В процессе заряда конденсатора в пространстве между его обкладками возникает переменное электрическое поле.

Согласно гипотезе Максвелла, переменное электрическое поле должно создавать в указанном пространстве вихревое магнитное поле.

Максвелл предположил, что *это магнитное поле такое же, как если бы в пространстве между обкладками протекал ток смещения  $I_{см}$ , равный току проводимости  $I_{пр}$  в подводящих проводниках.*

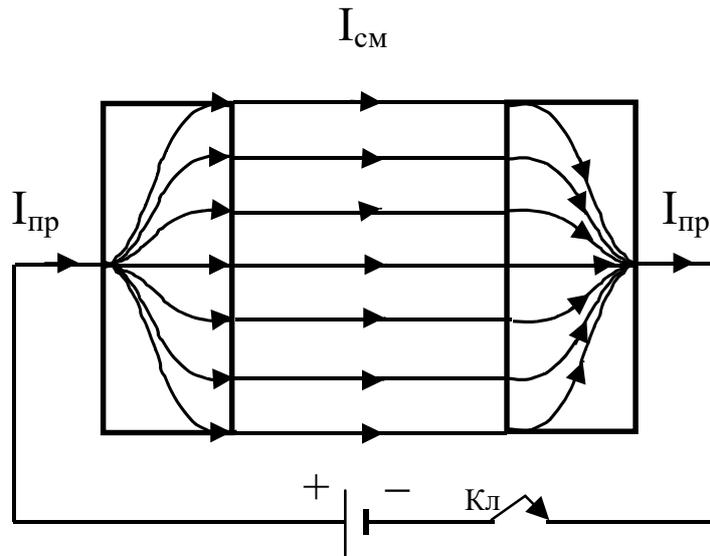


Рис. 5.2

Так как обкладки конденсатора тонкие, то из этого равенства токов следует, что вблизи краев обкладок должно выполняться также и равенство для плотности тока смещения и тока проводимости:

$$\dot{j}_{см} = \dot{j}_{пр} \cdot \quad (5.13)$$

Плотность тока проводимости

$$\dot{j}_{пр} = \frac{I_{пр}}{s} = \frac{1}{s} \frac{dq}{dt} = \frac{d\sigma}{dt}, \quad (5.14)$$

где  $\sigma = q/s$  – поверхностная плотность электрических зарядов на обкладках конденсатора.

Напряженность электрического поля внутри плоского заряженного конденсатора равна (см. (2.24)):

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0}. \quad (5.15)$$

Между напряженностью и индукцией электрического поля существует взаимосвязь:

$$D = \varepsilon \varepsilon_0 E. \quad (5.16)$$

Поэтому поверхностная плотность электрических зарядов на обкладках конденсатора

$$\sigma = D, \quad (5.17)$$

а выражение (5.14) имеет вид:

$$\dot{j}_{\text{пр}} = \frac{dD}{dt}. \quad (5.18)$$

Из равенства (5.13) получаем, что плотность тока смещения

$$\dot{j}_{\text{см}} = \frac{dD}{dt}. \quad (5.19)$$

Если учесть направления векторов  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$  и  $\vec{j}_{\text{пр}}$ , то

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{d\vec{D}}{dt}. \quad (5.20)$$

Таким образом, *согласно Максвеллу, ток смещения – это переменное электрическое поле.*

На рис. 5.3 и 5.4 показано направление линий напряженности магнитного поля, обусловленного током смещения, для процессов заряда (рис. 5.3) и разряда (рис. 5.4) конденсатора. Направление этих линий можно найти, применяя к току смещения широко используемое в электромагнетизме правило “правого буравчика”.

В общем случае, в среде могут одновременно существовать как токи проводимости, так и токи смещения.

Максвелл был первым, кто обратил внимание на этот важный вывод.

Он ввел понятие полного тока, вектор плотности которого

$$\vec{j}_{\text{пол}} = \vec{j}_{\text{пр}} + \vec{j}_{\text{см}}. \quad (5.21)$$

*Согласно теории Максвелла, линии полного тока всегда замкнуты (см. рис. 5.2).*

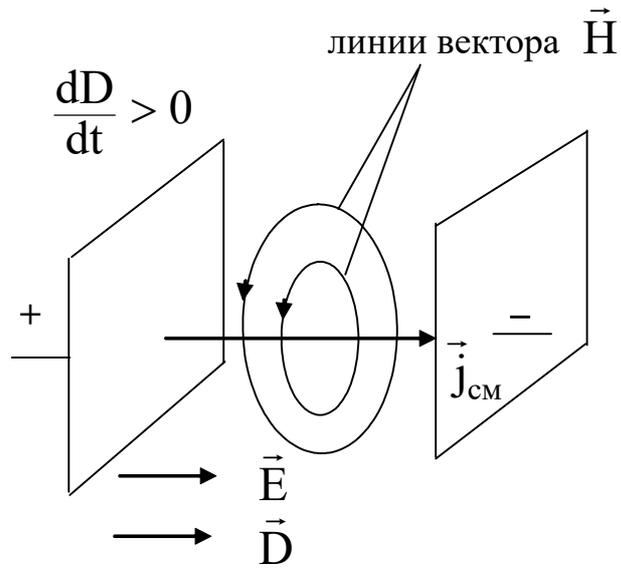


Рис. 5.3

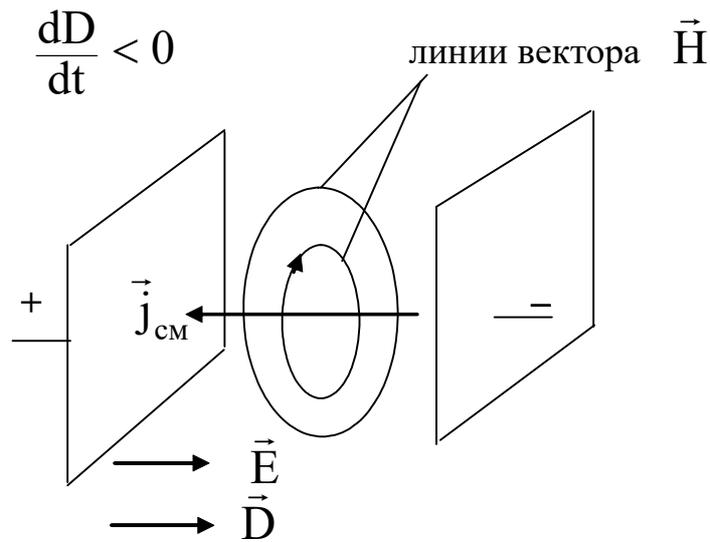


Рис. 5.4

В зависимости от электропроводности среды и частоты переменного тока слагаемые в формуле (5.21) вносят разный вклад в плотность полного тока.

В металлах при низких частотах  $\dot{j}_{\text{пр}} \gg \dot{j}_{\text{см}}$ . Поэтому током смещения в металлах можно пренебречь, и магнитное поле в этом случае обусловлено, в основном, током проводимости.

В диэлектриках при высоких частотах  $\dot{j}_{см} \gg \dot{j}_{пр}$ , и магнитное поле в этих средах обусловлено, в основном, током смещения.

Так как ток проводимости не может протекать в вакууме, то за магнитное поле в вакууме ответственен ток смещения.

Условия возникновения и существования токов проводимости и смещения различны (например, в отличие от тока проводимости наличие тока смещения не приводит к выделению джоулевой теплоты). Эти токи равноправны только по способности создавать магнитное поле.

Для токов проводимости и токов смещения справедлива теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля (выражение (2.168)):

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \mu \mu_0 \sum_i I_i,$$

которую с учетом соотношения  $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$  можно записать и для напряженности магнитного поля:

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \sum_i I_i. \quad (5.22)$$

Применяя эту теорему для токов проводимости и токов смещения, имеем:

$$\oint_l \vec{H}_{пр} d\vec{l} = \sum_i I_{i пр}; \quad (5.23)$$

$$\oint_l \vec{H}_{см} d\vec{l} = \sum_i I_{i см}. \quad (5.24)$$

В общем случае токи проводимости и токи смещения непрерывно распределены по поверхности, через которую они протекают.

Поэтому результирующие токи, протекающие через поверхность  $S$ , которая опирается на замкнутый контур  $l$ , следует вычислять, используя плотности тока:

$$\sum_i I_{i пр} \rightarrow \int_s \vec{j}_{пр} d\vec{s}; \quad (5.25)$$

$$\sum_i I_{i\text{см}} \rightarrow \int_s \vec{j}_{\text{см}} d\vec{s}. \quad (5.26)$$

Выполним сложение левых и правых частей уравнений (5.23) и (5.24) с учетом (5.25) и (5.26):

$$\oint_l \vec{H}_{\text{пр}} d\vec{l} + \oint_l \vec{H}_{\text{см}} d\vec{l} = \int_s \vec{j}_{\text{пр}} d\vec{s} + \int_s \vec{j}_{\text{см}} d\vec{s}. \quad (5.27)$$

После преобразований получаем:

$$\oint_l (\vec{H}_{\text{пр}} + \vec{H}_{\text{см}}) d\vec{l} = \int_s (\vec{j}_{\text{пр}} + \vec{j}_{\text{см}}) d\vec{s}. \quad (5.28)$$

Сумма напряженностей магнитных полей токов проводимости и токов смещения определяет напряженность результирующего магнитного поля  $\vec{H}$ .

Если использовать выражение (5.20) для плотности тока смещения, то из (5.28) получаем уравнение, которое и выражает собой второе уравнение Максвелла:

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \int_s \left( \vec{j}_{\text{пр}} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right) d\vec{s}. \quad (5.29)$$

Таким образом, *циркуляция вектора напряженности результирующего магнитного поля равна полному току, протекающему через поверхность S, которая опирается на контур интегрирования l.*

*Переменное электрическое поле создает вихревое магнитное поле.*

*Это магнитное поле является вихревым потому, что циркуляция вектора напряженности результирующего магнитного поля не равна нулю.*

По этой причине линии вектора напряженности  $\vec{H}$  всегда замкнуты.

5.6. Полная система уравнений Максвелла. Значение электромагнитной теории Максвелла

Полная система уравнений Максвелла состоит из четырех основных уравнений, которые были рассмотрены выше, а также трех уравнений, учитывающих индивидуальные свойства среды, в которой существуют электрические и магнитные поля.

В общем случае эти уравнения (их называют материальными) сложны. Однако для слабых электромагнитных полей, медленно изменяющихся в

пространстве и во времени, распространяющихся в изотропных не ферромагнитных и не сегнетоэлектрических средах, материальные уравнения просты:

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}; \quad (5.30)$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}; \quad (5.31)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (5.32)$$

где  $\sigma$  – удельная электропроводность среды.

Уравнение (5.32) является законом Ома, записанным в дифференциальной форме.

Таким образом, полная система уравнений Максвелла имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \left( \int_s \vec{B} d\vec{s} \right); \\ \oint_l \vec{H} d\vec{l} = \int_s \left( \vec{j}_{\text{пр}} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right) d\vec{s}; \\ \oint_s \vec{D} d\vec{s} = \int_v \rho dv; \\ \oint_s \vec{B} d\vec{s} = 0; \\ \vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}; \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}. \end{array} \right. \quad (5.33)$$

Система уравнений (5.33) обладает следующими свойствами.

1. Эта система уравнений является полной, т.е. к этим уравнениям нельзя добавить хотя бы одно уравнение относительно  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{B}$ , которое бы не являлось одним из указанных уравнений или их суперпозицией.

2. Она содержит в себе все основные законы электричества и магнетизма и описывает все явления электричества и магнетизма с единых позиций.

3. Уравнения Максвелла линейны, так как содержат только первые производные от  $\vec{D}$  и  $\vec{B}$ .

4. Уравнения Максвелла релятивистски инвариантны и выполняются во всех инерциальных системах отсчета.

5. Уравнения Максвелла не симметричны относительно электрического и магнитных полей, что является следствием существования в природе электрических зарядов и отсутствия магнитных зарядов.

6. Уравнения Максвелла – уравнения классической электродинамики для неподвижных сред, описывающие свойства электрических и магнитных полей, создаваемых макроскопическими зарядами и токами. По этой причине теория Максвелла является макроскопической.

Из уравнений Максвелла вытекала возможность существования ряда новых явлений, которые были экспериментально обнаружены значительно позднее создания электромагнитной теории.

Например, из первого и второго уравнений следует возможность существования в природе электромагнитных волн – распространяющихся в пространстве электромагнитных полей, а также электромагнитная природа света.

Электромагнитная теория позволила Максвеллу описать все основные свойства электромагнитных волн задолго до того, как их экспериментально обнаружил Герц и детально изучили другие ученые.

Уравнения Максвелла лежат в основе радиотехники, электроники, оптики, электротехники, науки о трении, геофизики, астрофизики.

Эти уравнения нельзя использовать только при очень больших частотах электромагнитных волн, так как в этом случае существенны квантовые эффекты, для описания которых классическая макроскопическая теория электромагнитного поля неприменима. Для указанного случая необходимо использовать квантовую электродинамику, созданную во второй четверти XX века.

## 6. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

6.1. Электромагнитные волны как следствие электромагнитной теории Максвелла

Идея существования в природе электромагнитных волн принадлежит Максвеллу. Этот вывод следует из анализа двух первых уравнений системы (5.33).

Рассмотрим однородный изотропный бесконечный диэлектрик (рис. 6.1).

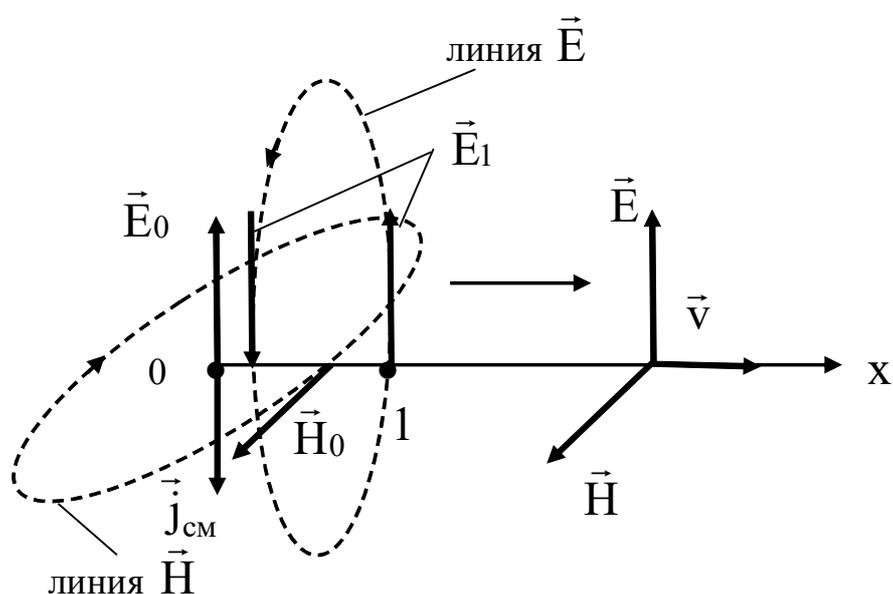


Рис. 6.1

Пусть в некоторой точке  $0$  создали электрическое поле  $\vec{E}_0$ .

Так как внутри диэлектрика нет электрических зарядов, которые бы поддерживали это электрическое поле, то напряженность электрического поля в точке  $0$  с течением времени будет уменьшаться.

Согласно второму уравнению Максвелла, это переменное электрическое поле и соответствующий ему ток смещения  $\vec{j}_{см}$  создадут вихревое магнитное поле  $\vec{H}_0$ .

Так как внутри диэлектрика нет электрических токов, которые бы поддерживали это магнитное поле, то напряженность  $\vec{H}_0$  со временем уменьшается.

В соответствии с первым уравнением Максвелла переменное магнитное поле  $\vec{H}_0$  создает вихревое электрическое поле  $\vec{E}_1$ . Это

электрическое поле компенсирует электрическое поле  $\vec{E}_0$  в точке 0, однако появится в точке 1, удаленной от точки 0.

В дальнейшем рассмотренные процессы будут повторяться во времени – электрические и магнитные поля, взаимно поддерживая друг друга, перемещаются в пространстве вдоль оси X со скоростью  $\vec{V}$ .

*Процесс распространения в пространстве электрических и магнитных полей называется электромагнитной волной.*

Из рис. 6.1 следует, что вектора  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{V}$  образуют правовинтовую тройку взаимно перпендикулярных векторов ( $\vec{E} \perp \vec{H} \perp \vec{V}$ ).

По этой причине электромагнитные волны являются поперечными волнами.

Используя правило “правого буравчика” (поворачивая буравчик от  $\vec{E}$  к  $\vec{H}$  по наименьшему углу), можно определить направление фазовой скорости электромагнитной волны.

## 6.2. Волновое уравнение для электромагнитных волн

Согласно выражению (4.20) общий вид волнового уравнения для механических волн имеет вид:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}, \quad (6.1)$$

где  $v$  – фазовая скорость волны.

Для электромагнитных волн необходимо учитывать распространение в пространстве как электрического, так и магнитного полей. Волновое уравнение в этом случае представляет собой следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \end{array} \right. \quad (6.2)$$

Из сравнения (6.1) и (6.2) следует, что  $\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 = 1/v^2$ . Поэтому фазовая скорость электромагнитных волн

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}}. \quad (6.3)$$

Так как

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c, \quad (6.4)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме, то фазовая скорость электромагнитных волн зависит от диэлектрической и магнитной проницаемости среды и равна:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}. \quad (6.5)$$

### 6.3. Уравнение плоской гармонической электромагнитной волны

При определенных граничных и начальных условиях решение системы уравнений (6.2) приводит к уравнению плоской гармонической электромагнитной волны.

В отличие от плоской гармонической механической волны (см. выражение (4.8)) уравнение плоской гармонической электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси  $X$ , состоит из системы уравнений:

$$\begin{cases} \vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx), \\ \vec{H}(x,t) = \vec{H}_0 \cos(\omega t - kx). \end{cases} \quad (6.6)$$

В этой системе уравнений

$$\vec{E}_0 = \vec{i} E_0, \quad \vec{H}_0 = \vec{j} H_0,$$

где  $E_0$  и  $H_0$  – амплитуды колебания напряженностей электрического и магнитного полей, а  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$  единичные векторы вдоль соответствующих направлений.

На рис. 6.2 приведена мгновенная фотография плоской гармонической электромагнитной волны.

Как следует из рис. 6.2 и уравнений (6.6), колебания векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  происходят синфазно.

Согласно (4.1), (4.3) и формуле (6.5) длина электромагнитной волны с учетом влияния среды равна:

$$\lambda = \frac{c}{\nu \sqrt{\epsilon \mu}}. \quad (6.7)$$

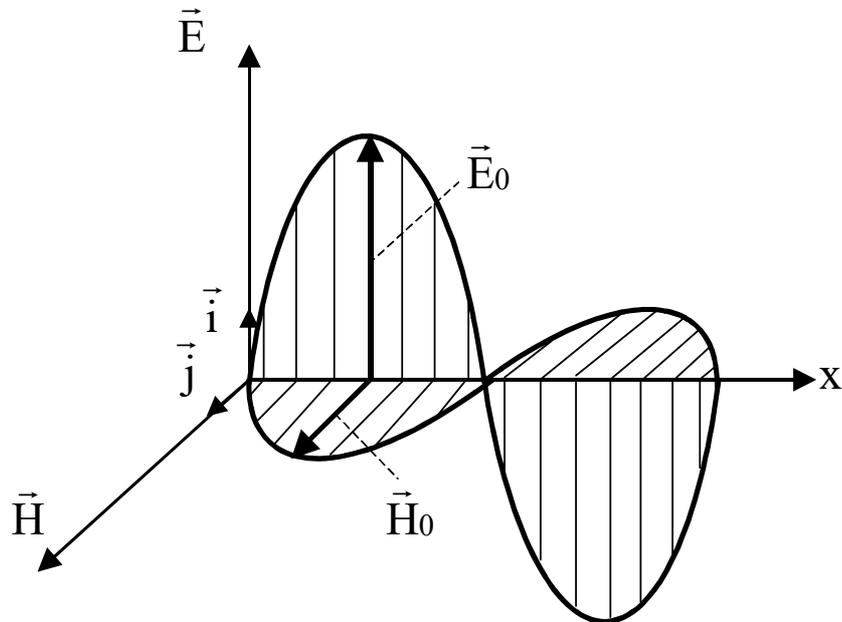


Рис. 6.2

#### 6.4. Свойства электромагнитных волн

Электромагнитные волны материальны: они обладают массой, энергией и импульсом.

Массу электромагнитной волны можно вычислить по формуле теории относительности

$$W = mc^2. \quad (6.8)$$

Однако для электромагнитной волны принято рассматривать не массу, а среднюю плотность материи в электромагнитной волне  $d$  (или массу, заключенную в единице объема):

$$d = \frac{m}{V} = \frac{W}{Vc^2} = \frac{\langle \omega \rangle}{c^2}, \quad (6.9)$$

где  $\langle \omega \rangle$  – средняя объемная плотность энергии электромагнитной волны.

Энергия электромагнитной волны складывается из энергий электрического и магнитных полей. Поэтому объемная плотность энергии электромагнитной волны

$$\omega = \omega_{\text{эл}} + \omega_{\text{м}}, \quad (6.10)$$

где объемная плотность энергии электрического поля

$$\omega_{\text{эл}} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2}, \quad (6.11)$$

а объемная плотность энергии магнитного поля

$$\omega_{\text{м}} = \frac{\mu \mu_0 H^2}{2}. \quad (6.12)$$

После подстановки (6.11) и (6.12) в (6.10) получаем, что объемная плотность энергии электромагнитной волны равна:

$$\omega = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu \mu_0 H^2}{2}. \quad (6.13)$$

Расчеты показывают, что в случае непроводящей среды для любого момента времени и для любой точки этой среды выполняется условие:

$$\omega_{\text{эл}} = \omega_{\text{м}}, \quad (6.14)$$

откуда

$$\frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\mu \mu_0 H^2}{2}. \quad (6.15)$$

Эта формула позволяет получить следующие важные соотношения для взаимосвязи напряженностей электрического и магнитных полей:

$$E = H \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\varepsilon \varepsilon_0}}; \quad H = E \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}}. \quad (6.16)$$

Преобразуем выражение (6.13):

$$\omega = \frac{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}{2} \left( \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} \right). \quad (6.17)$$

Используя формулы (6.16) и выражение (6.3) для фазовой скорости электромагнитной волны из соотношения (6.17) получаем, что

$$\omega v = \mathbf{E} \cdot \mathbf{H}. \quad (6.18)$$

*Произведение  $\omega v$  определяет плотность потока энергии электромагнитного поля или энергию, переносимую электромагнитной волной за единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны.*

Для электромагнитных волн важное значение имеет вектор  $\vec{\Pi}$ , называемый вектором Пойнтинга, который определяет плотность потока энергии электромагнитной волны.

Направление вектора  $\vec{\Pi}$  совпадает с направлением фазовой скорости электромагнитной волны  $\vec{V}$ .

Модуль вектора Пойнтинга равен произведению  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}$ , т.е. плотности потока энергии электромагнитной волны.

Если учесть значение модуля вектора Пойнтинга (см. (6.18)), а также взаимное направление векторов  $\vec{\Pi}$ ,  $\vec{V}$ ,  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , то для вектора  $\vec{\Pi}$  справедливо соотношение:

$$\vec{\Pi} = [\vec{E} \times \vec{H}]. \quad (6.19)$$

Векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{\Pi}$  образуют правовинтовую систему.

Иногда вектор (6.19) называют вектором Умова-Пойнтинга в честь Н.А. Умова, который впервые ввел общее понятие о потоке энергии в сплошной среде.

Поток энергии электромагнитного поля через произвольную поверхность  $S$  равен:

$$\phi = \int_S \vec{\Pi} d\vec{s}. \quad (6.20)$$

Импульс  $\vec{P}$  электромагнитной волны массы  $m$  в вакууме

$$\vec{P} = mc, \quad (6.21)$$

а в среде

$$\vec{P} = m\vec{v}. \quad (6.22)$$

Если электромагнитная волна встречает на своем пути тела, то эти тела испытывают давление.

Рассмотрим случай, когда плоская электромагнитная волна падает перпендикулярно на плоскую поверхность тела (рис. 6.3).

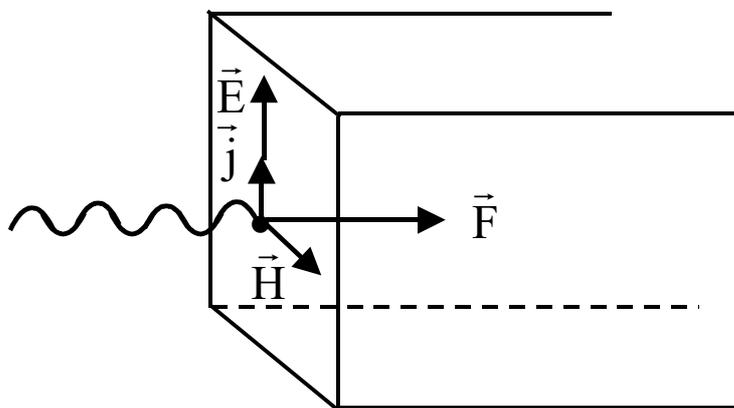


Рис. 6.3

Если среда электропроводящая, то электрическое поле создает в ней ток проводимости, а если диэлектрическая – то ток поляризации. Магнитное поле действует на этот ток  $\vec{j}$  с силой  $\vec{F}$ . Сила  $\vec{F}$  перпендикулярна плоскости падения волны, т.е. ее направление совпадает с направлением распространения электромагнитной волны.

Наличие силы  $\vec{F}$  и обеспечивает давление электромагнитной волны на тело.

Расчеты, впервые выполненные Максвеллом, показывают, что для рассмотренного случая падения электромагнитных волн на тело давление равно:

$$D = (1+k) \langle \omega \rangle, \quad (6.23)$$

где  $k$  – коэффициент отражения тела.

Если тело является абсолютно отражающим телом, то коэффициент  $k = 1$  и давление электромагнитной волны равно:

$$D = 2 \langle \omega \rangle. \quad (6.24)$$

При произвольном угле падения  $i$  электромагнитной волны

$$D = (1+k) \langle \omega \rangle \cos i. \quad (6.25)$$

Угол  $i$  отсчитывается от нормали, проведенной к поверхности тела в точке падения волны.

Как следует из формул (6.23) – (6.25), давление электромагнитных волн пропорционально средней объемной плотности энергии этих волн.

Экспериментально измерить величину давления электромагнитных волн чрезвычайно трудно. Впервые это удалось сделать в 1899 году П.Н. Лебедеву.

На границах разделов сред электромагнитные волны испытывают преломление.

Для этих волн наблюдаются явления интерференции, дифракции и поляризации.

#### 6.5. Экспериментальное доказательство существования электромагнитных волн (опыты Герца)

Впервые экспериментально электромагнитные волны обнаружил в 1888 году Г. Герц, применив для излучения электромагнитных волн открытый колебательный контур.

Первоначально для излучения этих волн использовали закрытый колебательный контур (рис. 6.4), в котором электрическое поле сосредоточено внутри конденсатора, а магнитное – внутри катушки индуктивности. Таким образом, в закрытом колебательном контуре электрическое и магнитное поля существуют обособленно одно от другого. По этой причине закрытый колебательный контур слабо излучает электромагнитные волны.

Если в закрытом колебательном контуре раздвигать обкладки конденсатора и одновременно растягивать провод катушки индуктивности, то получим открытый колебательный контур (рис. 6.5).

В открытом колебательном контуре электрические и магнитные поля заполняют окружающее пространство, что значительно повышает интенсивность излучения такой системой электромагнитных волн.

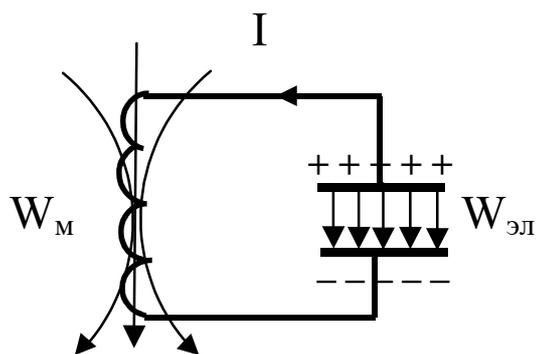


Рис. 6.4.

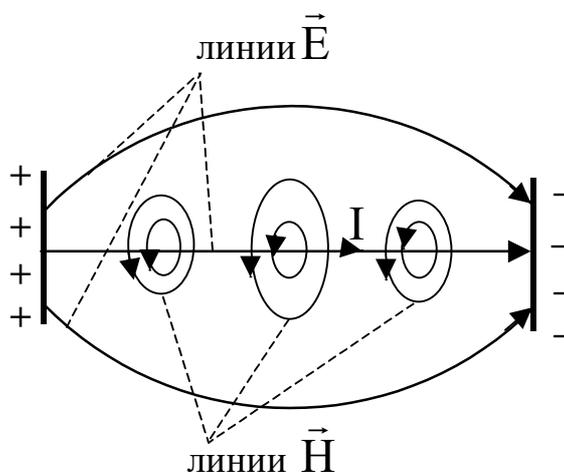


Рис. 6.5

Установка, использованная Герцем для излучения и приема электромагнитных волн, представлена на рис. 6.6.

Открытый колебательный контур в этой установке (вibrator Герца) реализован в виде двух проводящих стержней, разделенных искровым промежутком. При достижении пробивной разности потенциалов в искровом промежутке возникает искра, приводящая к возникновению электромагнитных волн.

Чтобы высокочастотные токи не замыкались в источнике высокого напряжения, использовались дроссели  $Dp\ 1$  и  $Dp\ 2$ , представляющие собой катушки с большой индуктивностью.

В качестве приемника электромагнитных волн Герц использовал аналогичный vibrator.

Регистрация электромагнитных волн производилась по наличию искры в искровом промежутке приемника. Так как при распространении электромагнитных волн неизбежны потери энергии, то размер этого искрового промежутка у приемника был меньше.

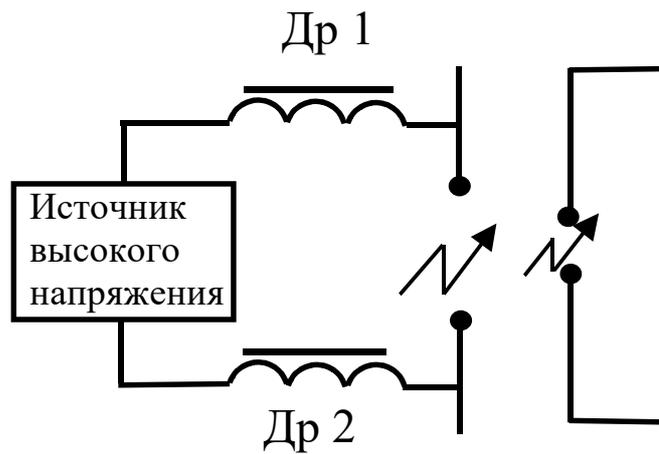


Рис. 6.6

Диапазон частот (или длин волн) электромагнитных волн широк. В зависимости от частоты их свойства, а также способы генерации и регистрации, различны.

Различают следующие виды электромагнитных волн: радиоволны, инфракрасное излучение, световые волны, ультрафиолетовое излучение, рентгеновское излучение,  $\gamma$ -излучение.

Границы между различными видами электромагнитных волн условны.

## 7. ОПТИКА

*Оптика – раздел физики, в котором изучаются оптическое излучение (свет), процессы его распространения и явления, наблюдаемые при взаимодействии света и вещества. Оптическое излучение представляет собой электромагнитные волны. По этой причине оптика является частью учения об электромагнитном поле.*

Оптический диапазон длин волн ограничен, с одной стороны рентгеновскими лучами, а с другой – микроволновым диапазоном радиоизлучения.

Оптика состоит из двух частей: геометрическая оптика и физическая оптика (рис. 7.1).

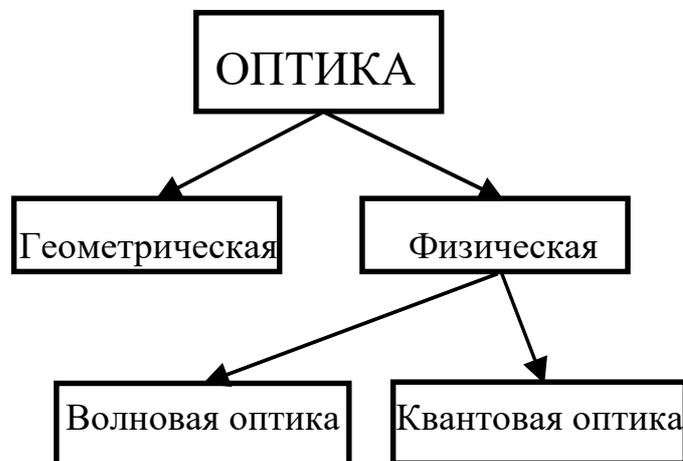


Рис. 7.1

Геометрическая оптика пренебрегает явлениями интерференции и дифракции света. Геометрическая оптика, подробно изучаемая в средней школе, фактически является приближенным способом построения изображения в оптических системах.

В дальнейшем будут изучаться законы физической оптики.

*Деление физической оптики на волновую и квантовую обусловлено двойственностью природы электромагнитного излучения и света в частности. В одних явлениях (например, интерференция, дифракция, поляризация) проявляется волновая природа света, а в других (например, фотоэффект, эффект Комптона) – квантовая природа света.*

## 7.1. Волновая оптика

### 7.1.1. Уравнение плоской гармонической световой волны

Так как световая волна является электромагнитной волной, то уравнение плоской гармонической световой волны, распространяющейся вдоль оси X, в общем случае имеет вид (см. (6.6)):

$$\begin{cases} \vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx), \\ \vec{H}(x,t) = \vec{H}_0 \cos(\omega t - kx). \end{cases} \quad (7.1)$$

Для световых волн уравнение (7.1) можно упростить.

Опыт показывает, что физическое, химическое, биологическое и другие действия света в основном определяются колебаниями вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$ . Колебания вектора напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  в случае световой волны можно не учитывать.

Поэтому в дальнейшем под колебаниями светового вектора будем подразумевать только колебания вектора напряженности электрического поля.

*Закон, по которому изменяется в пространстве и времени проекция светового вектора на направление, вдоль которого происходят его колебания, называется уравнением световой волны.*

Учитывая свойства световых волн, уравнение (7.1) существенно упрощается:

$$E = A \cos(\omega t - kx), \quad (7.2)$$

где  $A$  – амплитуда колебаний светового вектора.

Отметим характерные особенности световых волн.

- Длина световых волн  $\lambda \approx (0,4 \div 0,8) \cdot 10^{-6}$ , м.
- Скорость световых волн с учетом влияния среды

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (7.3)$$

- Абсолютный показатель преломления среды

$$n = \sqrt{\epsilon\mu}. \quad (7.4)$$

Из (7.3) и (7.4) следует, что

$$n = \frac{c}{v}, \quad (7.5)$$

т.е. абсолютный показатель преломления среды показывает, во сколько раз скорость света в вакууме больше, чем в данной среде ( $n \geq 1$ ).

Для большинства оптически прозрачных сред  $\mu \approx 1$  и

$$n \approx \sqrt{\epsilon}. \quad (7.6.)$$

Соотношение (7.6) указывает на взаимосвязь между оптическими и электрическими свойствами сред.

• Интенсивность световой волны  $I$  определяется модулем вектора Пойнтинга (6.19):

$$I = E \cdot H \sim E^2 \sim A^2,$$

т.е. 
$$I \sim A^2. \quad (7.7)$$

Интенсивность световой волны пропорциональна квадрату амплитуды колебаний светового вектора.

• Закон отражения света: угол падения света равен углу отражения (рис. 7.1).

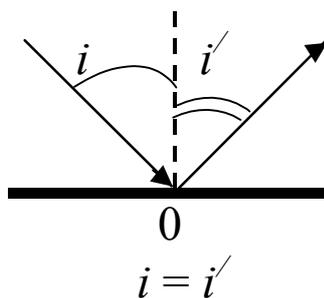


Рис. 7.1

• Закон преломления света: луч падающий, луч преломленный и перпендикуляр, восстановленный к границе раздела сред в точке падения луча, лежат в одной плоскости (рис. 7.2).

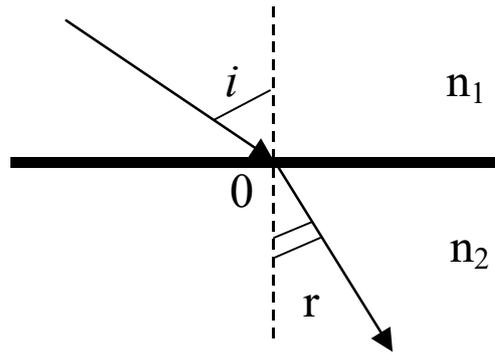


Рис. 7.2

Если  $n_2 > n_1$ , то  $i > r$ .

*Среда с большим абсолютным показателем преломления является оптически более плотной средой.*

- Показатель преломления второй среды относительно первой (относительный показатель преломления сред)

$$n_{21} = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (7.8)$$

Формула (7.8) выражает геометрический смысл относительного показателя преломления сред.

### 7.1.2. Интерференция света

*Интерференция света – явление наложения когерентных световых волн, приводящее к перераспределению в пространстве энергии этих волн, в результате которого в одних точках пространства возникают устойчивые максимумы, а в других точках – устойчивые минимумы интенсивности света.*

*Когерентные световые волны – это такие волны, которые при наложении в каждой точке волнового поля вызывают колебания светового вектора, разность фаз которых с течением времени не изменяется.*

Рассмотрим две плоские гармонические световые волны одинаковой частоты, которые при наложении вызывают колебания светового вектора одинакового направления:

$$E_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_{01}),$$

$$E_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_{02}).$$

В результате сложения таких колебаний результирующий световой вектор в точках наложения волн будет совершать гармонические колебания того же направления и той же частоты, что и в случае складываемых колебаний. Амплитуда колебаний находится из условия (3.26):

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_{01} - \alpha_{02}). \quad (7.9)$$

Обобщим этот результат для случая, когда число складываемых колебаний  $N$  велико:

$$A^2 = \sum_{i=1}^N A_i^2 + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ (i < k)}}^N A_i A_k \cos(\alpha_{0i} - \alpha_{0k}). \quad (7.10)$$

Из (7.10) следует, что результирующая интенсивность света в точках наложения волн (см. (7.7)) равна:

$$I = \sum_{i=1}^N I_i + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \sqrt{I_i} \sqrt{I_k} \cos(\alpha_{0i} - \alpha_{0k}). \quad (7.11)$$

Проанализируем выражение (7.11) для наложения некогерентных и когерентных световых волн.

1) Волны некогерентные.

Если число волн велико, а волны некогерентные, то при наложении волн разность фаз непрерывно изменяется и  $\cos(\alpha_{0i} - \alpha_{0k})$  принимает любые значения, лежащие в интервале  $-1 \div +1$ .

Поэтому среднее по времени значение  $\langle \cos(\alpha_{0i} - \alpha_{0k}) \rangle = 0$ , а результирующая интенсивность света в точках наложения волн, согласно (7.11), равна сумме интенсивностей накладывающихся волн:

$$I = \sum_{i=1}^N I_i. \quad (7.12)$$

Таким образом, в данном случае никакого перераспределения светового потока в пространстве не происходит.

2) Волны когерентные.

В точках наложения когерентные волны создают колебания светового вектора, разность фаз которых не изменяется. В каждой точке волнового поля среднее по времени значение  $\langle \cos(\alpha_{0i} - \alpha_{0k}) \rangle \neq 0$ .

Поэтому вторым слагаемым в выражении (7.11) пренебречь нельзя.

Это свидетельствует о том, что при наложении когерентных световых волн происходит пространственное перераспределение их интенсивности.

В точках волнового поля, где

$$\cos\Delta\alpha = +1, \quad (7.13)$$

результатирующая интенсивность света

$$I = \sum_{i=1}^N I_i + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \sqrt{I_i} \sqrt{I_k} \Rightarrow I \gg \sum_{i=1}^N I_i. \quad (7.14)$$

В этих точках пространства происходит максимальное взаимное усиление колебаний светового вектора, и возникают интерференционные максимумы (яркие светлые точки).

Соотношение (7.13) выполняется тогда, когда

$$\Delta\alpha_{\max} = \pm 2\pi k, \text{ где } k = 0, 1, 2, \dots \quad (7.15)$$

Условия (7.15) называются условиями максимумов для интерференции света.

В тех точках волнового поля, для которых

$$\cos\Delta\alpha = -1, \quad (7.16)$$

результатирующая интенсивность света

$$I = \sum_{i=1}^N I_i - 2 \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \sqrt{I_i} \sqrt{I_k} \Rightarrow I \ll \sum_{i=1}^N I_i. \quad (7.17)$$

В этих точках пространства происходит максимальное взаимное ослабление колебаний светового вектора, и возникают интерференционные минимумы (темные точки).

Условия минимумов для интерференции света, согласно (7.16), имеют вид:

$$\Delta\alpha_{\min} = \pm(2k+1)\pi, \text{ где } k = 0, 1, 2, \dots \quad (7.18)$$

Источники когерентных волн называются когерентными источниками. Однако особенностью световых волн является то, что когерентных источников световых волн не существует.

Это обусловлено атомным строением вещества и тем, что каждый атом вещества излучает электромагнитные волны независимо от излучения других атомов.

При наблюдении интерференции света реализуются условия, при которых волна интерферирует сама с собой.

Для этого волну, излучаемую одним источником, делят на части, которые после прохождения разных оптических путей накладывают друг на друга.

Например, на рис. 7.3 световую волну от источника S делят на две части (1 и 2) при помощи границы раздела двух сред, абсолютные показатели преломления которых  $n_1$  и  $n_2$ . Применяя два плоских зеркала, волны накладывают друг на друга в точке В.

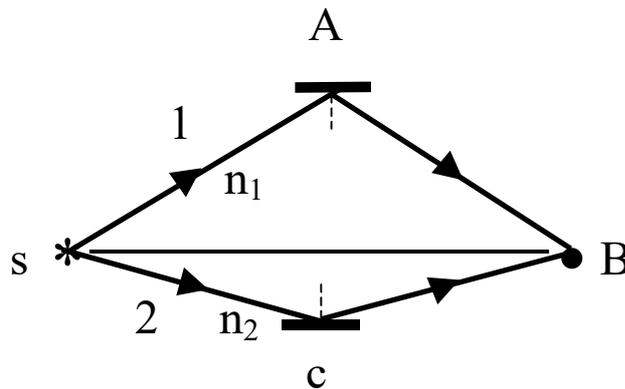


Рис. 7.3

Расстояние  $s_1 = sA + AB$ , которое проходит 1 световая волна от источника до точки наложения волн называется геометрическим путем первого луча.

Геометрический путь второго луча  $s_2 = sc + cB$ .

Величина

$$s_1 - s_2 = \Delta$$

называется геометрической разностью хода волн.

*Если геометрический путь луча умножить на абсолютный показатель преломления той среды, в которой он распространяется, то получим оптический путь этого луча.*

В нашем случае оптические пути лучей, соответственно, равны:  $S_1 n_1$  и  $S_2 n_2$ .

Их разность определяет оптическую разность хода волн

$$\delta = s_1 n_1 - s_2 n_2,$$

имеющую в оптике более важное значение, чем геометрическая разность хода волн  $\Delta$ .

Равенство  $\delta = \Delta$  возможно только в случае распространения волн в вакууме.

Условия максимумов и минимумов для интерференции световых волн (7.15) и (7.18) удобно записывать не через разность фаз  $\Delta\alpha$ , а через оптическую разность хода волн  $\delta$ .

Используем взаимосвязь между этими величинами:

$$\delta = \frac{\lambda \Delta\alpha}{2\pi}, \quad (7.19)$$

где  $\lambda$  — длина световой волны.

Тогда из формул (7.15) и (7.18) следует, что условия максимумов и минимумов для оптической разности хода волн имеют вид:

$$\delta_{\max} = 2k \frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (7.20)$$

$$\delta_{\min} = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7.21)$$

*Если оптическая разность хода волн в точке их наложения равна четному числу полуволен, то волны максимально взаимно усиливают друг друга и в этой точке возникает интерференционный максимум (светлая точка).*

*Если оптическая разность хода волн равна нечетному числу полуволен, то волны максимально взаимно ослабляют друг друга, и в точке наложения волн возникает интерференционный минимум (темная точка).*

### 7.1.2.1. Методы наблюдения интерференции света

Чтобы получить когерентные световые волны, используют различные приемы, позволяющие разделить световые лучи, идущие от одного источника, а затем наложить эти световые лучи друг на друга. Для этих целей применяются экраны, щели, преломляющие тела, зеркала и т.п.

В качестве примера рассмотрим некоторые способы наблюдения интерференции света.

#### 1. Метод Юнга (рис. 7.4)

Свет из точечного источника  $S$  (ярко освещенное малое отверстие в экране  $A$ ) проходит через два равноудаленных отверстия  $S_1$  и  $S_2$  в экране  $B$ , расположенном параллельно экрану  $A$ .

Эти отверстия являются как бы двумя действительными когерентными источниками света.

Если в области наложения световых волн, идущих от отверстий  $S_1$  и  $S_2$ , разместить экран  $C$ , то на этом экране будет наблюдаться интерференционная картина.

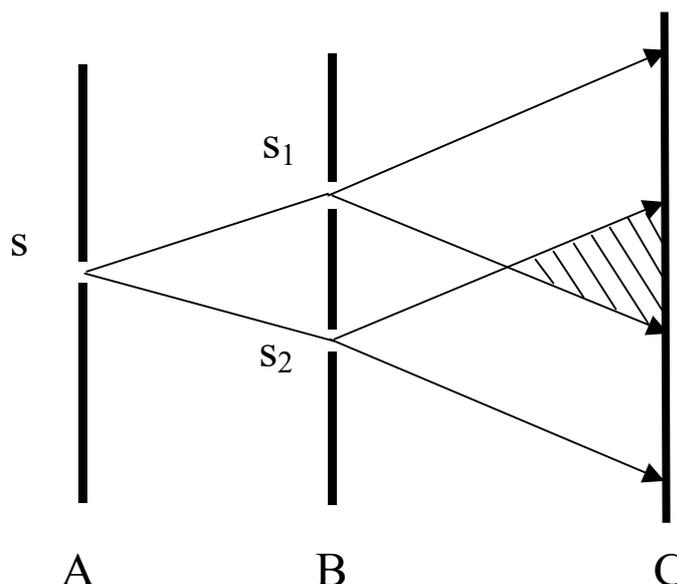


Рис. 7.4

#### 2) Зеркала Френеля (рис. 7.5)

В этом методе получения когерентных световых волн используют два плоских зеркала (1 и 2), расположенные под очень малым углом  $\alpha$  друг к другу.

Световые волны от источника  $S$  отражаются от обоих зеркал. Применяя закон отражения для плоского зеркала, можно установить, что лучи, отраженные от первого зеркала, исходят от мнимого источника  $S_1$ , а от

второго зеркала – от мнимого источника  $S_2$ . Эти источники света являются когерентными.

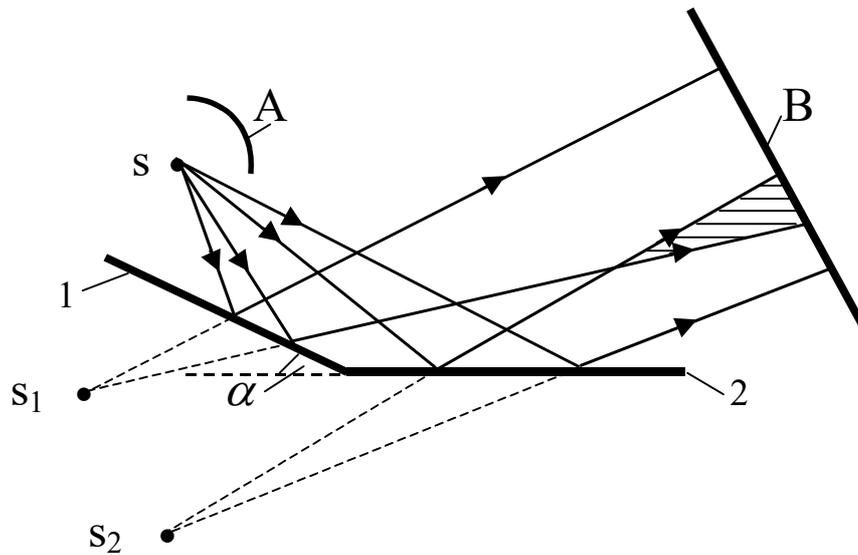


Рис. 7.5

Интерференция наблюдается в той области пространства, где происходит наложение световых волн, испущенных мнимыми источниками.

Кожух А защищает экран В, на котором наблюдается интерференционная картина, от прямого попадания света от источника S.

### 3) Бипризма Френеля (рис. 7.6)

В данном случае мнимые когерентные источники света  $S_1$  и  $S_2$  возникают в результате преломления в бипризме световых лучей, идущих от источника S. Бипризма Френеля имеет малый угол  $\alpha$ .

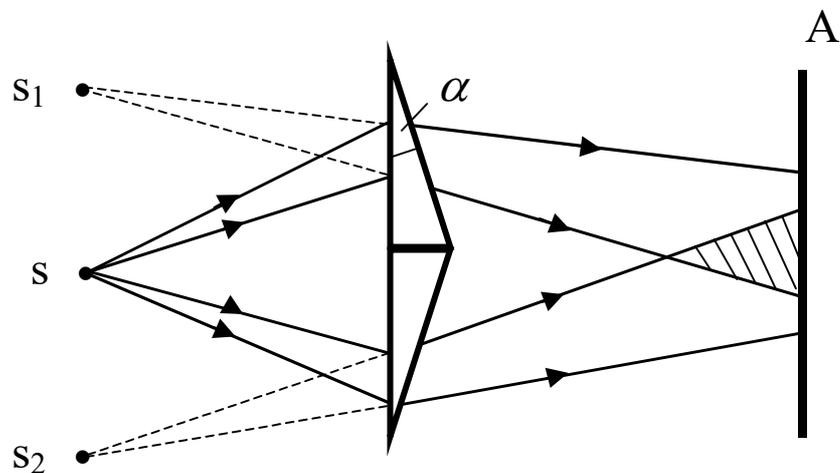


Рис. 7.6

### 7.1.2.2. Расчет интерференционной картины от двух источников

Расчет интерференционной картины заключается в определении на экране координат максимумов и минимумов интенсивности света.

Этот расчет для всех трех описанных выше способов получения когерентных световых волн аналогичен.

Расчет интерференционной картины можно значительно упростить, если источники света  $S_1$  и  $S_2$  считать не точечными, а линейными и представляющими собой узкие, параллельные и близко расположенные щели (рис. 7.7).

Пусть когерентные линейные источники  $S_1$  и  $S_2$  расположены в вакууме перпендикулярно плоскости чертежа.

Расстояние между источниками  $d$ . Экран, на котором наблюдается интерференционная картина, также перпендикулярен плоскости чертежа и удален от источников на расстояние  $L$ , причем  $L \gg d$ .

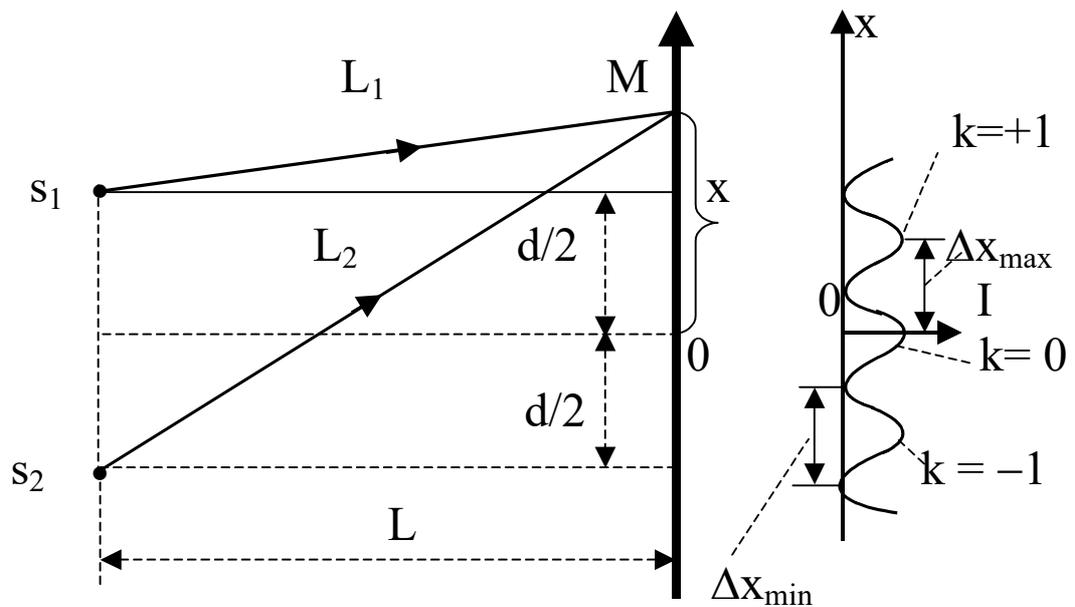


Рис. 7.7

Рассмотрим на экране произвольную точку  $M$ , в которой происходит наложение когерентных световых волн от источников  $S_1$  и  $S_2$ . Точка  $M$  расположена на расстоянии  $X$  от центра экрана.

Из рис. 7.7 следует, что

$$L_2^2 = L^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2$$

-

$$L_1^2 = L^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2$$

---


$$L_2^2 - L_1^2 = 2xd . \quad (7.22)$$

Так как световые волны распространяются в вакууме, а расстояния  $L_1$  и  $L_2$  мало отличаются от  $L$  (в силу того, что  $L \gg d$ ), то из (7.22) имеем:

$$\underbrace{(L_2 - L_1)}_{\Delta = \delta} \underbrace{(L_2 + L_1)}_{2L} = 2xd , \quad (7.23)$$

откуда оптическая разность хода световых волн в точке  $M$  равна:

$$\delta = \frac{xd}{L} . \quad (7.24)$$

Координаты максимумов и минимумов интенсивности света на экране определяются из формулы (7.24) с учетом соотношений (7.20) и (7.21):

$$x_{\max} = \pm \frac{kL\lambda}{d} ; \quad (7.25)$$

$$x_{\min} = \pm \frac{(2k+1)L\lambda}{2d} , \quad (7.26)$$

где  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Расстояние между двумя соседними максимумами  $\Delta x_{\max}$  называется шириной интерференционной полосы.

Из (7.25) и (7.26) следует, что  $\Delta X_{\max}$  равно также и расстоянию между двумя соседними интерференционными минимумами интенсивности света:

$$\Delta X_{\max} = \Delta X_{\min} = \frac{\lambda L}{d}. \quad (7.27)$$

Таким образом, на экране будет наблюдаться чередование светлых и темных интерференционных полос.

В соответствии с формулой (7.25), при  $k = 0$  интерференционный максимум имеет координату  $X_{\max} = 0$ , т.е. в центре экрана (точка 0) интенсивность света максимальна.

На рис. 7.7 приведена зависимость интенсивности света  $I$  на экране от координаты  $X$ .

При использовании немонохроматических источников света (например, источников белого света) координаты максимумов и минимумов для разных длин волн будут различны, и на экране возникнет интерференционный спектр.

Согласно формуле (7.27), если известны значения  $L$  и  $d$ , то, измеряя на экране расстояния  $\Delta X_{\max}$  или  $\Delta X_{\min}$ , можно по виду интерференционной картины определить длину световой волны  $\lambda$ .

### 7.1.2.3. Интерференция света в тонких пластинках и пленках в отраженном свете

Этот случай интерференции света имеет важное практическое применение.

Рассмотрим тонкую прозрачную, плоскопараллельную пластинку с показателем преломления  $n$  и толщиной  $d$ , на которую из вакуума под углом  $i$  падает плоская монохроматическая световая волна  $1$  (см. рис. 7.8).

В точке  $A$  часть световой волны  $1$  отражается от верхней поверхности пластинки (луч  $1'$ ), а часть преломляется веществом пластинки.

В точке  $B$  преломленная волна (луч  $AB$ ) частично отражается в пластинку (луч  $BC$ ) и частично преломляется в вакуум.

В точке  $C$  луч  $BC$  частично отражается от верхней поверхности пластинки и частично преломляется в вакуум (луч  $1''$ ).

Световые волны  $1'$  и  $1''$  когерентны и могут интерферировать.

За счет частичного преломления и отражения интенсивность световых волн  $1'$  и  $1''$  меньше, чем у луча  $1$ .

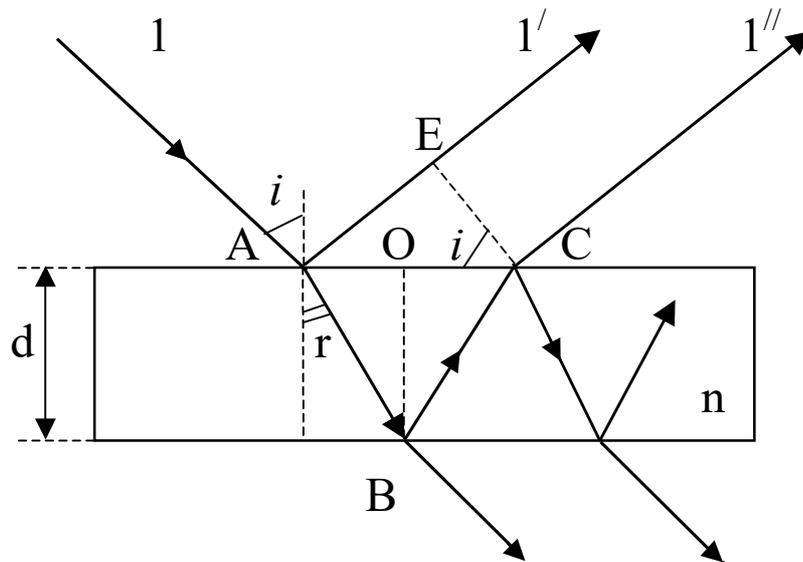


Рис. 7.8

Оптическая разность хода волн между лучами  $1'$  и  $1''$  возникает за счет того, что от точки  $A$  до плоскости  $EC$  эти лучи проходят разные пути в разных средах.

Кроме того, в точке  $A$  световая волна  $1$  отражается от среды более оптически плотной (пластинка), чем та, в которой она распространялась первоначально (вакуум). В результате такого отражения у луча  $1'$  возникает дополнительный оптический путь, равный  $\lambda/2$ .

Этот эффект аналогичен тому, что имеет место и при отражении механических волн от границ раздела сред (см. раздел 4.4.). Однако следует иметь в виду, что в отличие от механических волн в данном случае рассматривается оптическая плотность сред, а не их весовая плотность.

Согласно рис. 7.8 оптическая разность хода световых волн  $1'$  и  $1''$  равна:

$$\delta = (AB + BC)n - AE + \frac{\lambda}{2}. \quad (7.28)$$

Рассчитаем

$$(AB + BC)n - AE. \quad (7.29)$$

Из  $\Delta AOB$  следует, что  $AB = d/\cos r$ . Так как  $AB = BC$ , то

$$(AB+BC)n = \frac{2dn}{\cos r} . \quad (7.30)$$

Из  $\Delta AEC$  значение  $AE = AC \cdot \sin i = 2AO \cdot \sin i$ . Учитывая, что  $AO = d \cdot \operatorname{tgr}$  имеем:

$$AE = 2d \operatorname{tgr} \cdot \sin i . \quad (7.31)$$

Подставляя (7.30) и (7.31) в (7.29) и производя преобразования, получаем, что

$$(AB+BC)n - AE = \frac{2dn}{\cos r} \left(1 - \frac{\sin i \cdot \sin r}{n}\right) . \quad (7.32)$$

Так как  $n = \frac{\sin i}{\sin r}$ , то из (7.32) следует:

$$(AB+BC)n - AE = 2dn \cos r = 2dn \sqrt{1 - \sin^2 r} ,$$

откуда

$$2dn \sqrt{1 - \sin^2 r} = 2d \sqrt{n^2 - n^2 \sin^2 r} = 2d \sqrt{n^2 - \frac{\sin^2 i}{\sin^2 r} \sin^2 r}$$

и 
$$(AB+BC)n - AE = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i} . \quad (7.33)$$

Из (7.28) следует, что искомая оптическая разность хода волн равна:

$$\delta = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \lambda/2 . \quad (7.34)$$

Лучи  $1'$  и  $2'$  параллельны и сходятся в одной точке в бесконечности. Поэтому для наблюдения интерференции этих лучей используют собирающую линзу, а экран, на котором наблюдается интерференционная картина, располагают в фокальной плоскости этой линзы.

Следует отметить, что результат интерференции параллельных когерентных световых волн можно наблюдать и без использования собирающей линзы. В этом случае роль линзы выполняет хрусталик глаза, а экрана – его сетчатка.

Проанализируем формулу (7.34).

1) Если для оптической разности хода волн  $\delta$  выполняется условие максимумов, то поверхность пластинки будет светлой, а если условие минимумов – то темной.

2) Так как рассматриваются только однородные оптически прозрачные среды, для которых показатель преломления  $n = \text{const}$ , то оптическая разность хода волн  $\delta = \delta(d, i, \lambda)$ .

Рассмотрим влияние каждого из этих параметров.

- $d \neq \text{const}$

Если пластинка или пленка не имеют постоянной толщины (например, пленка клинообразной формы), то условия максимумов для интерференции света будут выполняться при определенных толщинах пластинки:  $d_1, d_2, \dots, d_k, \dots$  (рис. 7.9).

При этом на поверхности пластинки будут возникать интерференционные полосы, которые называются полосами равной толщины.

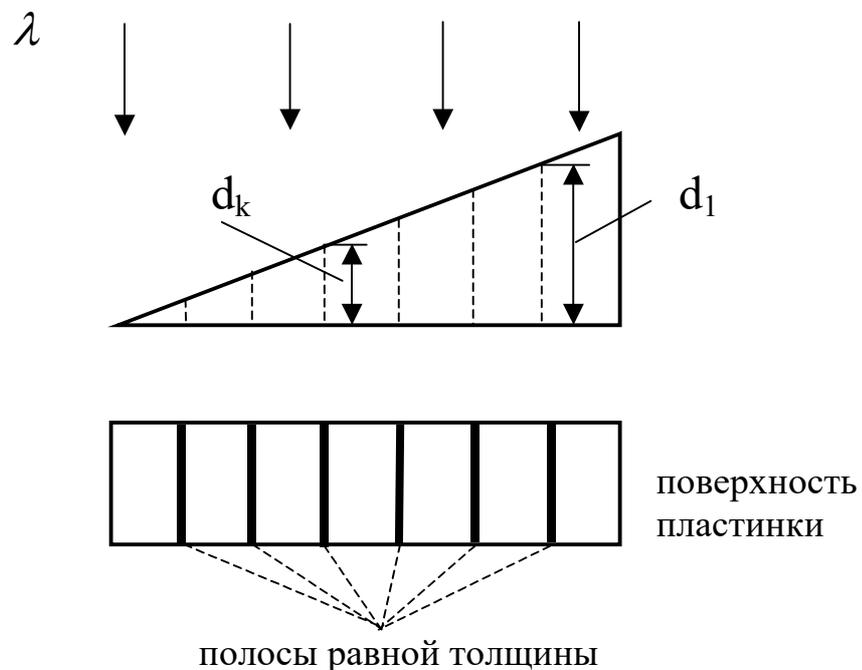


Рис. 7.9

- $i \neq \text{const}$

В данном случае условия максимумов будут выполняться при определенных углах падения лучей и возникающие на поверхности пленки или пластинки интерференционные полосы носят название полос равного наклона.

- $\lambda \neq \text{const}$

Если пластинка освещается не монохроматическим светом, а, например, белым светом, то условие максимумов будет выполняться для определенной длины волны, и поверхность пластинки окрасится в соответствующий цвет.

#### 7.1.2.4. Практическое применение интерференции света

Явление интерференции световых волн используется для решения многих важных практических задач.

- 1) Измерение толщин тонких пленок.
- 2) Определение длины световой волны.
- 3) Определение качества обработки зеркальных поверхностей.
- 4) Улучшение качества оптических приборов.

Современный оптический прибор представляет собой сложную многослойную систему, состоящую из многих линз. При прохождении света через такие системы на границах раздела сред происходит частичное отражение света, что уменьшает интенсивность света, прошедшего оптическую систему. Кроме того, отраженные лучи приводят к появлению бликов. Это ухудшает, например, качество фотографий. Блики демаскируют положение оптических приборов, применяемых в военной технике.

Чтобы исключить эти недостатки, применяют простой способ, заключающийся в том, что на поверхность линз наносят тонкие прозрачные пленки, которые называют “просветляющими пленками” (рис. 7.10).

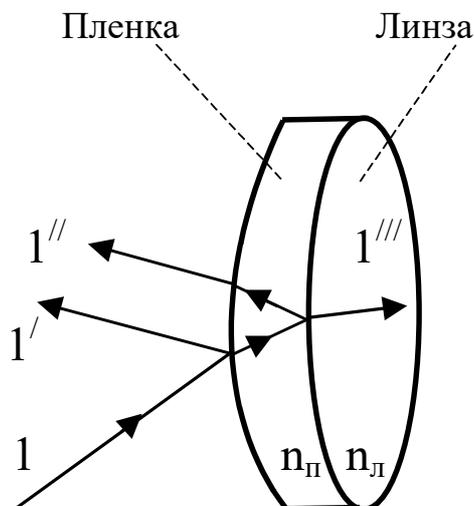


Рис. 7.10

Исходный луч  $1$  после распространения в воздушной среде падает на границу раздела воздух-пленка. Луч  $1$  частично отражается от этой границы (луч  $1'$ ), а частично преломляется в пленку. На границе пленка-линза часть исходного луча преломляется в линзу (луч  $1'''$ ), а часть этого луча за счет отражения и преломления выходит в воздушную среду (луч  $1''$ ). Волны  $1'$  и  $1''$  являются когерентными. Пленку подбирают так, чтобы лучи  $1'$  и  $1''$  в результате интерференции полностью взаимно гасили друг друга.

В результате этого отраженные лучи (блики) исчезают, а интенсивность луча  $1'''$ , прошедшего оптическую систему, возрастает.

Наибольший эффект достигается в том случае, когда абсолютный показатель преломления пленки

$$n_{\text{п}} \approx \sqrt{n_{\text{л}}}. \quad (7.35)$$

Расчет необходимой толщины пленки производят для длины волны  $\lambda \approx 0,55$  мкм, которая наиболее восприимчива для человеческого глаза. Так как указанная длина волны соответствует голубому цвету, то объективы с просветляющими пленками кажутся окрашенными в этот цвет.

5) Измерение малых угловых и линейных перемещений.

Эти измерения выполняют при помощи интерферометров. Существуют различные конструкции интерферометров.

Рассмотрим упрощенную схему интерферометра Майкельсона (рис. 7.11).

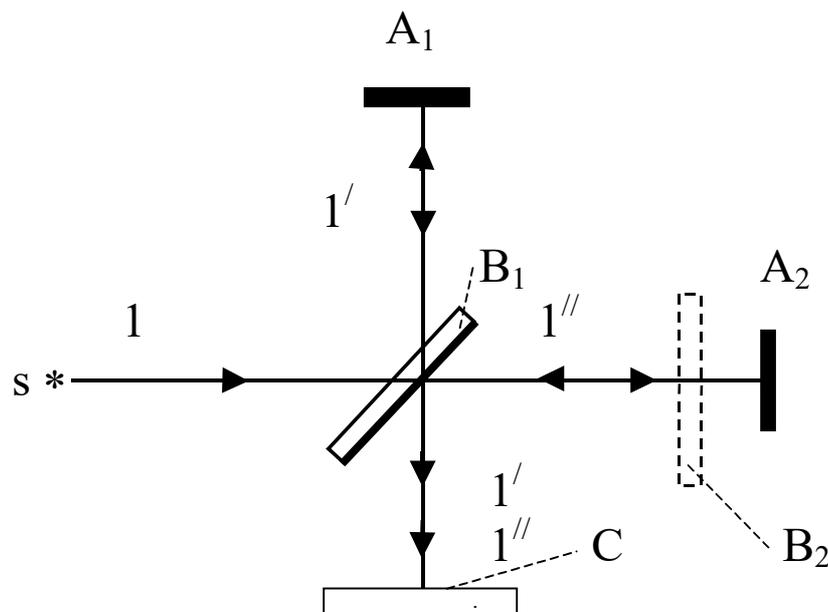


Рис. 7.11

Монохроматическая световая волна  $1$  от источника  $S$  падает на плоскопараллельную стеклянную пластинку  $B_1$ , противоположная сторона которой покрыта тонким полупрозрачным слоем серебра. Часть световой волны (луч  $1'$ ) отражается от этого слоя, а часть (луч  $1''$ ) – проходит полупрозрачный слой. Затем луч  $1'$  отражается от плоского зеркала  $A_1$  проходит полупрозрачную пластинку  $B_1$  и достигает экрана  $C$ . Луч  $1''$  отражается от плоского зеркала  $A_2$ , затем отражается от полупрозрачной пластики  $B_1$ , идет вдоль луча  $1'$  и также достигает экрана  $C$ .

Лучи  $1'$  и  $1''$  когерентны, поэтому на экране  $C$  будет наблюдаться интерференция этих лучей.

Как следует из рис. 7.11, луч  $1'$  проходит полупрозрачную пластинку  $B_1$  дважды. Для компенсации возникающей в результате этого оптической разности хода между интерферирующими лучами на пути луча  $1''$  помещают плоскопараллельную стеклянную пластинку  $B_2$ , аналогичную пластинке  $B_1$ , только не покрытую слоем серебра.

Если одно из зеркал совершает линейное или угловое перемещения, то интерференционная картина на экране  $C$  изменяется. Таким образом, по смещению этой картины можно определить величину этого перемещения зеркала.

Интерферометры обладают очень высокой чувствительностью. Например, интерферометр Майкельсона позволяет выполнять измерения линейных размеров с точностью до  $0,005$  мкм.

В сочетании с микроскопом по виду интерференционной картины можно измерять величину отступлений от плоскости и форму микронеровностей металлических поверхностей.

#### 7.1.2.5. Длина и время когерентности

Если увеличивать размер какого-либо плеча в интерферометре Майкельсона, то можно обнаружить, что при некоторой разности длин этих плеч интерференционная картина на экране исчезнет.

Эту длину  $\Delta L_0$  называют длиной когерентности. Длина когерентности

$$\Delta L_0 = c\Delta t_0, \quad (7.36)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме;  $\Delta t_0$  – время когерентности.

Атомная структура источников световых волн приводит к тому, что волны, испущенные атомами, имеют приблизительно постоянные фазы колебаний в течение очень короткого интервала времени, составляющего

примерно  $10^{-8}$  с. Атомы излучают электромагнитные волны в виде отдельных коротких импульсов, называемых волновым цугом.

Поэтому немонохроматический свет можно представить в виде совокупности сменяющих друг друга независимых гармонических цугов.

Средняя продолжительность одного цуга определяется временем, за которое случайное изменение фазы волны достигает значения, равного  $\pi$ .

Это время и называется временем когерентности  $\Delta t_0$ .

Для обычных источников немонохроматического света  $\Delta t_0 \approx 10^{-8}$  с. Согласно (7.36), длина когерентности для таких источников  $\Delta L_0 \approx 3$  м.

Таким образом, если разность длин плеч в интерферометре Майкельсона начинает превышать 3 м, то на экране будут накладываться световые волны, принадлежащие разным цугам излучений атомов, которые уже не являются когерентными. Интерференционная картина на экране интерферометра будет отсутствовать.

Можно показать, что если степень монохроматичности световых волн повышается, то время когерентности возрастает.

Для лазерных источников света, имеющих высокую степень монохроматичности, время когерентности  $\Delta t_0 \approx 10^{-2}$  с. Поэтому для таких источников  $\Delta L_0 \approx 3 \cdot 10^6$  м. Однако на практике из-за влияния земной атмосферы такой длины когерентности получить не удастся (обычно в этом случае  $\Delta L_0 \approx 10^3$  м).

### 7.1.3. Дифракция света

*Дифракция света – совокупность явлений, наблюдаемых при распространении света в средах с резкими неоднородностями и заключающихся в отклонении от законов геометрической оптики. В результате взаимодействия с этими неоднородностями (препятствиями) световые волны огибают их, т.е. попадают в область геометрической тени.*

Принципиального отличия между интерференцией и дифракцией нет. Суть этих явлений состоит в наложении когерентных волн.

Если накладываются волны, испущенные когерентными источниками, расположенными дискретно, то имеют дело с интерференцией волн, а если рассматривается наложение волн, испущенных когерентными источниками, расположенными непрерывно, то – с дифракцией волн. Поэтому *дифракция всегда сопровождается интерференцией волн.*

Различают два вида дифракции: дифракция в параллельных лучах (дифракция Фраунгофера) и дифракция в расходящихся лучах (дифракция Френеля).

1) Дифракция Фраунгофера (рис. 7.12).

В этом виде дифракции препятствие освещается параллельными световыми лучами. На рис. 7.12 для создания таких лучей точечный источник света S расположен в фокусе линзы  $L_1$ . После прохождения этой линзы

параллельные световые лучи освещают неоднородность, которая в данном случае представляет собой экран  $C$ , в котором имеется отверстие.

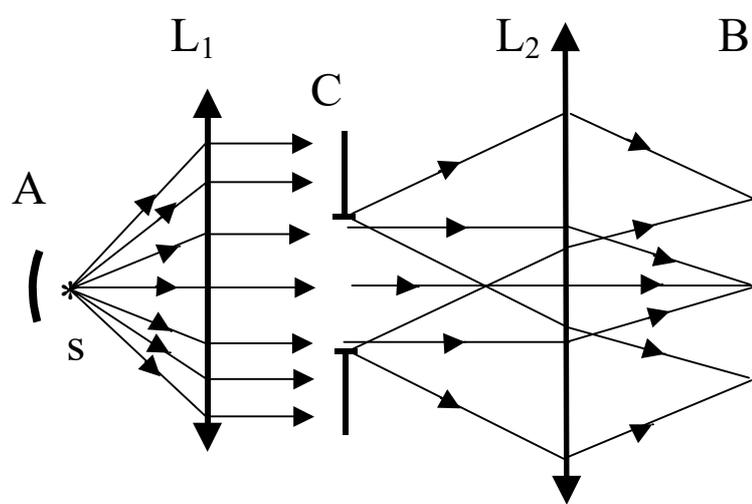


Рис. 7.12

В результате дифракции после прохождения волнами препятствия кроме лучей, распространяющихся в первоначальном направлении, возникают лучи, отклоняющиеся от этого направления.

Дифракционная картина наблюдается на экране  $B$ , расположенном в фокальной плоскости линзы  $L_2$ .

2) Дифракция Френеля (рис. 7.13).

В дифракции Френеля на препятствие  $C$  падают расходящиеся световые лучи, испущенные, например, точечным источником  $S$ . Дифракционная картина наблюдается на экране  $B$ , расположенном в фокальной плоскости линзы  $L$ .

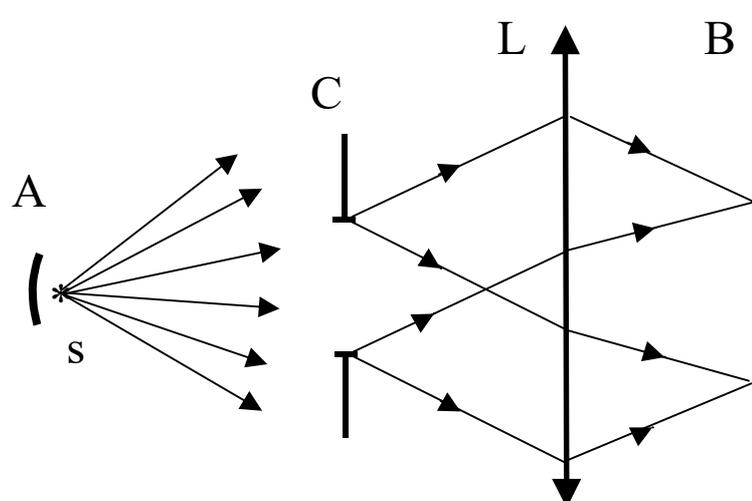


Рис. 7.13

### 7.1.3.1. Принцип Гюйгенса – Френеля

Качественно объяснить явление дифракции волн можно, используя принцип Гюйгенса (см. раздел (4.6.)).

Для расчета дифракционной картины Френель предложил дополнить принцип Гюйгенса законом интерференции вторичных волн. В результате возник новый принцип, который носит название принципа Гюйгенса – Френеля: *все точки фронта волны являются вторичными когерентными источниками света, в результате чего волны, испущенные этими источниками, в точке наложения могут интерферировать.*

Получим аналитическое выражение для принципа Гюйгенса – Френеля.

Пусть в данный момент времени фронт световой волны  $S$  занял положение относительно точки наблюдения  $p$ , изображенное на рис. 7.14.

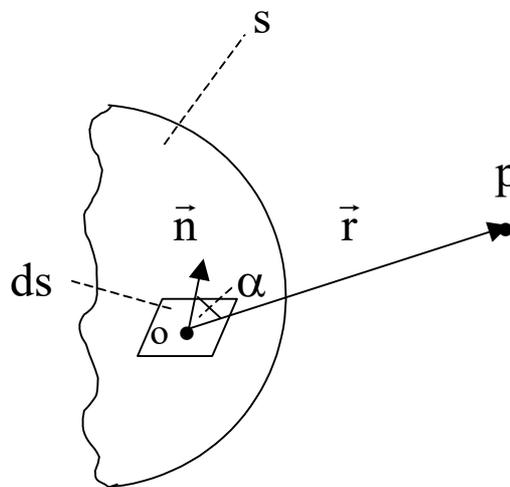


Рис. 7.14

Выберем на этом фронте произвольную точку  $O$ . Будем считать, что колебания светового вектора от этого точечного источника изменяются с течением времени по закону

$$E_o = A_o \cos \omega t. \quad (7.37)$$

Сферическая световая волна, испущенная точечным источником  $O$ , в точке наблюдения  $p$  создает колебания светового вектора, происходящие по закону

$$E_{po} = \frac{A_o}{r} \cos(\omega t - kr). \quad (7.38)$$

Согласно принципу суперпозиции все точечные когерентные источники, расположенные на элементарном участке фронта волны  $ds$ , в точке наблюдения создают колебания светового вектора

$$dE = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kr) ds. \quad (7.39)$$

Результирующие колебания светового вектора, создаваемые в точке наблюдения  $P$  всеми точечными источниками фронта волны, определяются соотношением:

$$E_P = \int_S \varphi(\alpha) \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kr) ds. \quad (7.40)$$

Функция  $\varphi(\alpha)$  в выражении (7.40) определяет положение элементарных площадок фронта волны  $ds$  относительно точки наблюдения ( $\vec{n}$ -вектор единичной нормали к площадке  $ds$ ).

Формула (7.40) является аналитическим выражением принципа Гюйгенса - Френеля.

Хотя формула (7.40) и позволяет рассчитать дифракционную картину в любой произвольной точке пространства, ее практическое использование является сложной математической задачей.

### 7.1.3.2. Метод зон Френеля

Для тех случаев, когда фронт волны обладает каким-либо видом симметрии, Френель предложил простой метод, существенно упрощающий расчет дифракционной картины по сравнению с использованием выражения (7.40).

Этот метод заключается в том, что фронт волны относительно точки наблюдения специальным способом разбивается на зоны, причем так, что световые волны, испущенные двумя соседними зонами Френеля, в точке наблюдения полностью взаимно гасят друг друга.

Расчет дифракционной картины в точке наблюдения сводится к подсчету числа зон Френеля, на которое разбит фронт волны.

Предположим, что фронт световой волны  $S$ , испущенный точечным источником  $S_0$ , относительно точки наблюдения  $P$  занял положение, изображенное на рис. 7.15.



где  $A_i$  – амплитуда колебаний светового вектора, возбуждаемая в точке  $\mathbf{p}$  вторичными когерентными точечными источниками, расположенными в  $i$ -ой зоне.

Каждая последующая зона все дальше и дальше находится от точки  $\mathbf{p}$ . По этой причине интенсивность световых волн в этой точке с увеличением  $i$  уменьшается. Поэтому

$$A_1 > A_2 > A_3 > A_4 > \dots \quad (7.42)$$

Общее число зон Френеля, на которое разбивается фронт волны, обычно очень велико (может достигать  $10^4$ - $10^5$ ). Это позволяет в качестве допустимого приближения считать, что амплитуда колебаний светового вектора в точке  $\mathbf{p}$  от  $i$ -ой зоны Френеля равна среднему арифметическому от амплитуд колебаний этого вектора, создаваемых в точке наблюдения примыкающими к ней  $i-1$  и  $i+1$  зонами:

$$A_i = \frac{A_{i-1} + A_{i+1}}{2}. \quad (7.43)$$

С учетом (7.43) формула (7.41) для амплитуды результирующего колебания светового вектора в точке  $\mathbf{p}$  может быть представлена в виде:

$$A_p = \frac{A_1}{2} + \left( \frac{A_1}{2} - \cancel{A_2} + \frac{A_3}{2} \right) + \left( \frac{A_3}{2} - \cancel{A_4} + \frac{A_5}{2} \right) + \dots \quad (7.44)$$

Из выражения (7.44) следует, что результирующая амплитуда колебаний светового вектора, создаваемая в точке наблюдения  $\mathbf{p}$  сферической волновой поверхностью такая же, как если бы действовала половина вторичных когерентных точечных источников центральной зоны Френеля:

$$A_p = \frac{A_1}{2}. \quad (7.45)$$

Поместим на пути луча  $S_0\mathbf{p}$  в точке  $O$  экран высотой  $h$  (см. рис. 7.15) и постепенно будем увеличивать его размеры.

Пусть экран имеет бесконечно малые размеры.

Если бы свет всегда распространялся прямолинейно, то наличие на луче  $S_0P$  экрана указанных размеров приводило бы к тому, что точка  $P$  была бы темной.

Однако в точку наблюдения приходят волны не только от точки  $O$ , но и от всех других вторичных точечных источников фронта волны  $S$ . Поэтому точка  $P$  будет светлой.

По мере увеличения размеров экрана  $h$  этот экран будет перекрывать все большую и большую часть фронта волны  $S$ . При этом интенсивность света в точке  $P$  будет уменьшаться.

При некоторых размерах экрана, когда он перекроет относительно большое число зон Френеля, точка наблюдения  $P$  станет темной. Начиная с этих размеров экрана  $h$ , выполняется положение геометрической оптики о прямолинейности распространения света.

Таким образом, дифракция света ярко выражена в тех случаях, когда размеры препятствия (неоднородности)  $h$  много меньше как расстояния от источника света до препятствия, так и расстояния от препятствия до точки наблюдения (см. рис. 7.15):

$$or \gg h \ll s_0o. \quad (7.46)$$

Из соотношений (7.46) следует, что дифракцию света можно наблюдать от тел любых размеров, а не только в том случае, когда размеры препятствия соизмеримы с длиной волны ( $h \approx \lambda$ ).

### 7.1.3.3. Дифракция Фраунгофера от одной щели

Дифракция Фраунгофера, или дифракция в параллельных лучах, имеет большое практическое значение.

Для получения параллельных световых лучей можно использовать, например, точечный источник света, расположенный в фокусе собирающей линзы.

В случае дифракции Фраунгофера экран, на котором наблюдается дифракционная картина, помещают в фокальной плоскости другой собирающей линзы, находящейся за неоднородностью.

Рассмотрим длинную узкую щель, на которую нормально падает плоская монохроматическая световая волна (рис. 7.16).

Если ширина щели  $a$  много больше ее длины, то такую щель можно считать бесконечно длинной.

После того как фронт волны, достигнув щели, займет положение  $AB$ , все его точки можно рассматривать как когерентные источники, создающие волны, распространяющиеся во все стороны вперед от щели.

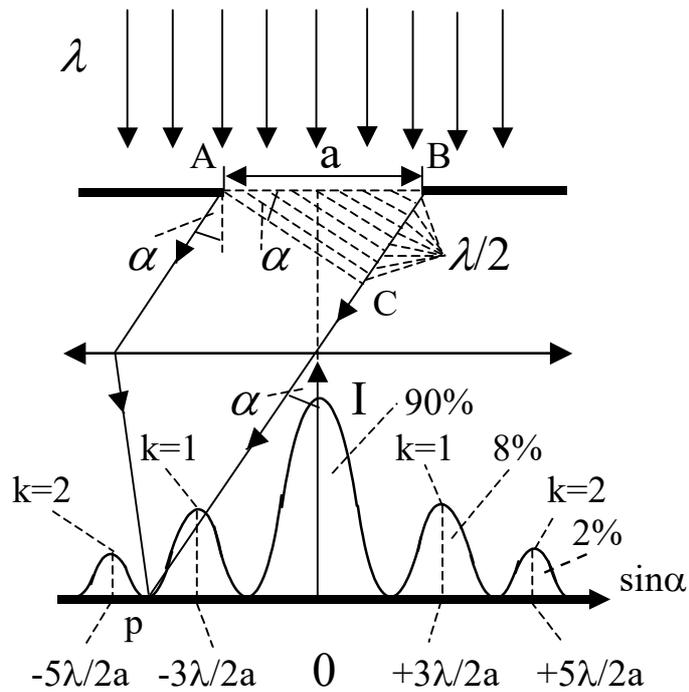


Рис. 7.16

Рассмотрим два крайних луча, идущих после прохождения щели под некоторым произвольным углом  $\alpha$  и собирающихся с помощью линзы на экране в точке  $p$ . Экран расположен в фокальной плоскости линзы.

Рассчитаем дифракционную картину в произвольной точке  $p$ , используя метод зон Френеля.

Оптическая разность хода между рассматриваемыми крайними лучами равна длине катета  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$ .

Чтобы разбить фронт волны  $AB$  относительно точки наблюдения  $p$  на зоны Френеля, поступают следующим образом. Предварительно разбивают катет  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  на отрезки длиной  $\lambda/2$ . Для получения зон Френеля эти отрезки проектируют на фронт волны  $AB$ .

Таким образом, число зон Френеля  $Z$ , на которое разобьется фронт волны, равно числу отрезков длиной  $\lambda/2$  на катете  $BC$ :

$$Z = \frac{BC}{\frac{\lambda}{2}} = \frac{a \sin \alpha}{\frac{\lambda}{2}}. \quad (7.47)$$

Точка  $p$  будет светлой, если фронт волны разбился на нечетное число зон Френеля, и темной, если фронт разбился на четное число этих зон.

Поэтому условия максимумов и минимумов для дифракции света в данном случае с учетом симметричности дифракционной картины на экране относительно центра экрана (точка  $O$  на рис. 7.16) имеют вид:

$$\begin{aligned} a \sin \alpha_{\max} &= \pm(2k+1) \frac{\lambda}{2}; \\ a \sin \alpha_{\min} &= \pm 2k \frac{\lambda}{2}; \\ k &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (7.48)$$

Распределение интенсивности света  $I$  на экране, получаемое вследствие дифракции Фраунгофера на длинной плоской щели, изображено на рис. 7.16.

На этом же рисунке нанесены координаты максимумов интенсивности света, установленные с помощью соотношений (7.48).

Расчеты показывают, что в центральном максимуме сосредоточено примерно 90% энергии света, в максимумах первого порядка ( $k = 1$ ) около 8%, а в максимумах второго порядка ( $k = 2$ ) примерно 2% этой энергии.

Если щель освещать не монохроматическим, а, например, белым светом, то условия максимумов для разных длин волн будут выполняться под разными углами  $\alpha$ . Дифракционные максимумы различных цветов разойдутся, и на экране возникнут дифракционные спектры.

Согласно условиям (7.48), с увеличением длины волны возрастает угол, под которым расположен дифракционный максимум. Поэтому красные лучи отклоняются на большие углы дифракции, чем фиолетовые лучи (рис. 7.17).

В центре экрана лучи всех цветов накладываются, в результате чего центральная область экрана будет белой (слегка красноватой по краям).

Особенностью дифракционных спектров является то, что положение линий в этих спектрах не зависит от того, из каких материалов изготовлены щели, линзы, экраны и т.п., а полностью определяется спектральным составом падающего на щель излучения и геометрией установки.

Эти дифракционные спектры составляют основу спектрального анализа.

Однако для спектрального анализа одна щель не используется. Причиной этого является очень слабая интенсивность спектральных линий и плохая их разрешающая способность.

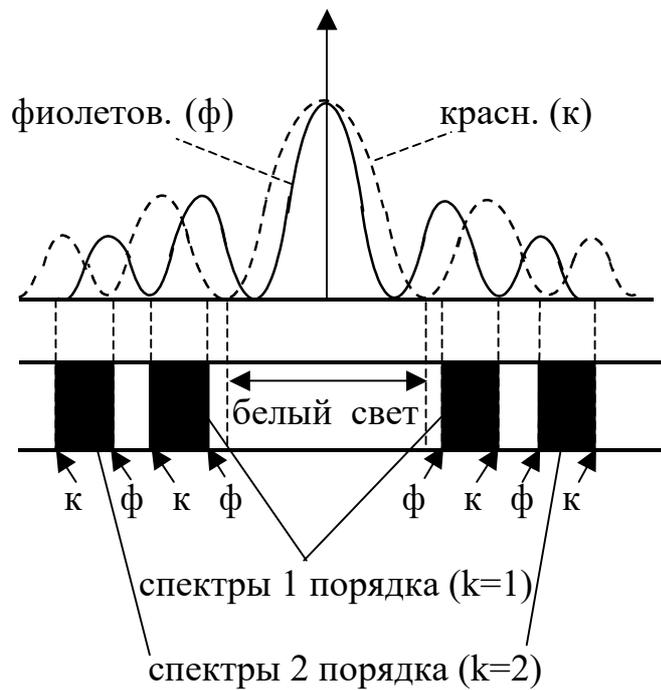


Рис. 7.17

#### 7.1.3.4. Дифракционная решетка

Для спектрального анализа применяются дифракционные решетки.

В случае оптического диапазона дифракционные решетки представляют собой устройства с упорядоченной структурой, состоящие из большого числа параллельных щелей одинаковой ширины  $a$ , которые лежат в одной плоскости и разделены непрозрачными промежутками шириной  $b$  (рис. 7.18).

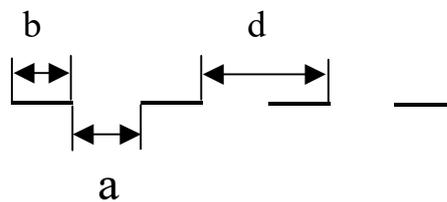


Рис. 7.18

Сумма

$$a + b = d \quad (7.49)$$

называется постоянной дифракционной решетки.

Величина

$$m = \frac{1}{d} \quad (7.50)$$

определяет число щелей на единице длины дифракционной решетки.

При изготовлении дифракционных решеток размеры  $a$  и  $b$  выдерживаются с высокой точностью.

Общее число щелей  $N$  в современных дифракционных решетках может достигать  $10^4 - 10^5$ .

В результате этого спектральные линии от дифракционной решетки имеют во много раз большую интенсивность, чем от одной щели:

$$I \approx N^2 I_0, \quad (7.51)$$

где  $I_0$  – интенсивность линий в случае использования одной щели.

Это является результатом интерференции дифрагировавших лучей, происходящей при дифракции на упорядоченной структуре. Если бы щели располагались хаотически, то суммарная интенсивность была бы пропорциональна числу щелей неправильной структуры.

Важной характеристикой дифракционных решеток является безразмерная физическая величина, называемая разрешающей способностью:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}, \quad (7.52)$$

где  $\Delta\lambda$  – минимальное расстояние в длинах волн между двумя соседними линиями  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , при котором эти линии регистрируются отдельно (т.е. не сливаются в одну линию);  $\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$ .

Значение  $R$  можно определить и по следующему соотношению:

$$R = kN, \quad (7.53)$$

где  $k$  – порядок спектра.

Из сравнения формул (7.52) и (7.53) следует, что чем больше число щелей в дифракционной решетке, тем больше ее разрешающая способность и меньше  $\Delta\lambda$ .

Для современных дифракционных решеток разрешающая способность может достигать значений до  $2 \cdot 10^5$ .

Получим условия максимумов и минимумов для дифракционной решетки.

Пусть плоская монохроматическая световая волна падает нормально к плоскости дифракционной решетки. Для простоты рассмотрим только часть дифракционной решетки (рис. 7.19).

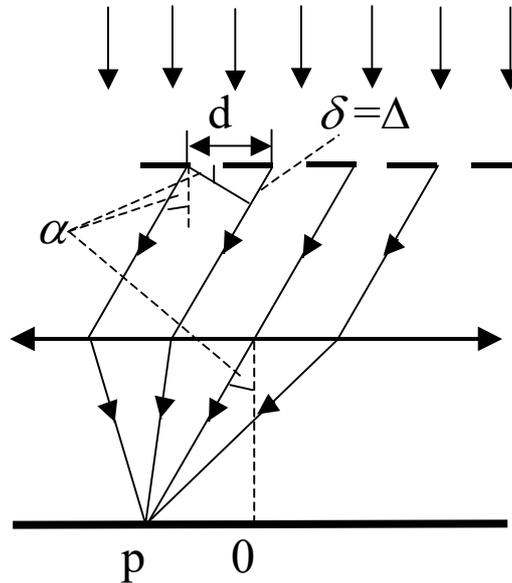


Рис. 7.19

Будем считать, что световые волны распространяются в вакууме. Поэтому оптическая разность хода волн  $\delta$  равна их геометрической разности хода  $\Delta$ .

Выберем на экране, расположенном в фокальной плоскости линзы, произвольную точку наблюдения  $p$ .

Вследствие того, что щели находятся на одинаковом расстоянии, оптическая разность хода лучей  $\delta$ , идущих от двух соседних щелей, в точке  $p$  при равных углах дифракции  $\alpha$  будет одинакова для всей дифракционной решетки.

Из рис. 7.19 следует, что

$$\delta = d \sin \alpha. \quad (7.54)$$

Углы, под которыми на экране будут наблюдаться дифракционные максимумы, определяются из условия:

$$d \sin \alpha_{\max} = \pm 2k \frac{\lambda}{2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (7.55)$$

В тех направлениях, в которых ни одна из щелей не распространяет свет, он не будет распространяться и от всех щелей дифракционной решетки. По этой причине углы, под которыми наблюдаются дифракционные минимумы, для щели и дифракционной решетки одинаковы:

$$a \sin \alpha_{\min} = \pm k \lambda \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (7.56)$$

где  $a$  – ширина щели дифракционной решетки.

Соотношения (7.55) и (7.56) определяют положения так называемых главных максимумов и минимумов дифракционной решетки.

С увеличением числа щелей в дифракционной решетке ширина главных максимумов уменьшается, что дополнительно повышает четкость дифракционной картины (рис. 7.20).

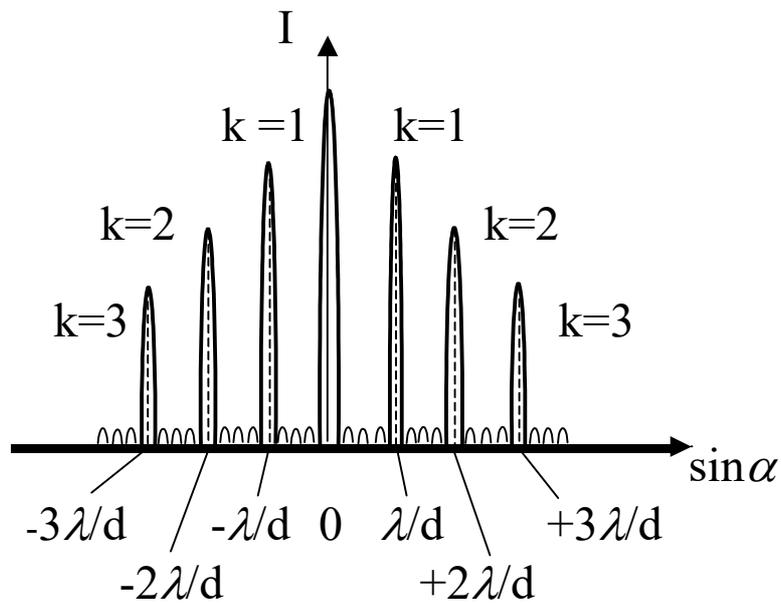


Рис. 7.20

Точные расчеты показывают, что в случае  $N$  щелей между двумя соседними главными максимумами располагается  $N-1$  дополнительный минимум (см. рис. 7.20). Эти минимумы разделены побочными максимумами, интенсивность которых во много раз меньше интенсивности главных максимумов. С повышением числа щелей интенсивность побочных максимумов уменьшается.

Если на дифракционную решетку падает белый свет, то все максимумы, кроме центрального ( $k = 0$ ), разложатся в спектр. Фиолетовая область этих спектров будет обращена к центру дифракционной картины, а красная – наружу. Однако качество этих спектров существенно выше, чем в случае использования одной щели.

#### 7.1.4. Поляризация света

*Поляризация света – свойство света, обусловленное пространственно-временной упорядоченностью колебаний светового вектора (т.е. вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$ ).*

Поляризация света обусловлена поперечностью электромагнитных волн (рис. 7.21).

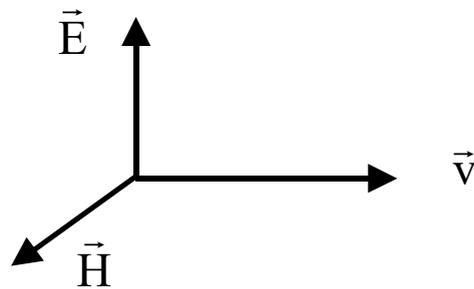


Рис. 7.21

Исторически плоскость, в которой происходят колебания вектора  $\vec{E}$ , называется плоскостью колебаний, а плоскость, в которой происходят колебания вектора  $\vec{H}$  – плоскостью поляризации.

Свет, испускаемый отдельно взятым атомом вещества, всегда является поляризованным. Вследствие того, что атомы вещества излучают электромагнитные волны независимо друг от друга, направления световых векторов атомных излучателей распределены в пространстве хаотически.

Любой источник света состоит из огромного числа атомов, поэтому в излучении источника присутствуют колебания световых векторов атомных излучателей практически всех направлений (рис. 7.22).

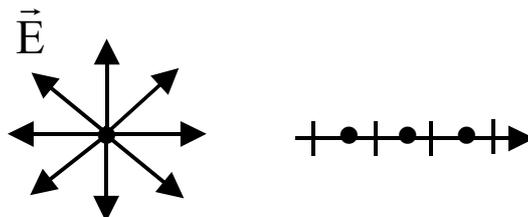


Рис. 7.22

Такой свет называется естественным или полностью неполяризованным светом.

Для естественного света принято обозначение, указанное на рис. 7.22.

С помощью специальных устройств или способов можно получить свет, у которого колебания светового вектора строго упорядочены. Такой свет называется полностью поляризованным.

На рис. 7.23 в качестве примера представлен плоскополяризованный (или линейно поляризованный) свет и два способа его обозначения в зависимости от направления колебаний светового вектора.

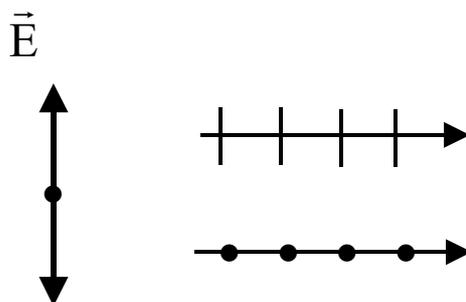


Рис. 7.23

В том случае, когда наряду с преимущественным направлением колебаний светового вектора присутствуют и другие направления, свет является частично поляризованным (рис. 7.24).

Степень поляризации света  $P$  определяется соотношением:

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (7.57)$$

где  $I_{\max}$  и  $I_{\min}$  – максимальная и минимальная интенсивности света в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

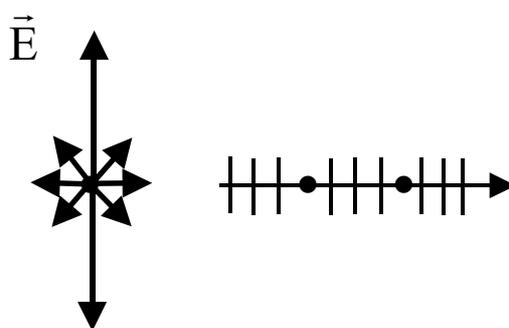


Рис. 7.24

Для полностью поляризованного света  $I_{\min} = 0$  и степень поляризации  $P = 1$ . В случае естественного света  $I_{\max} = I_{\min}$ , поэтому  $P = 0$ . Для частично поляризованного света  $0 < P < 1$ .

7.1.4.1. Поляризация света при отражении и преломлении на границе двух диэлектриков. Закон Брюстера

Опыт показывает, что отраженный и преломленный свет всегда частично поляризован. Степень поляризации луча зависит от угла падения луча на границу раздела сред и относительного показателя преломления сред.

Брюстер установил, что при некотором угле падения луча  $i_6$  (угол Брюстера) на диэлектрик отраженный луч будет полностью поляризован.

При этом отражается только та компонента светового вектора, у которой колебания вектора  $\vec{E}$  происходят параллельно поверхности диэлектрика (рис. 7.25).

Преломленный луч при угле падения  $i_6$  становится частично поляризованным.

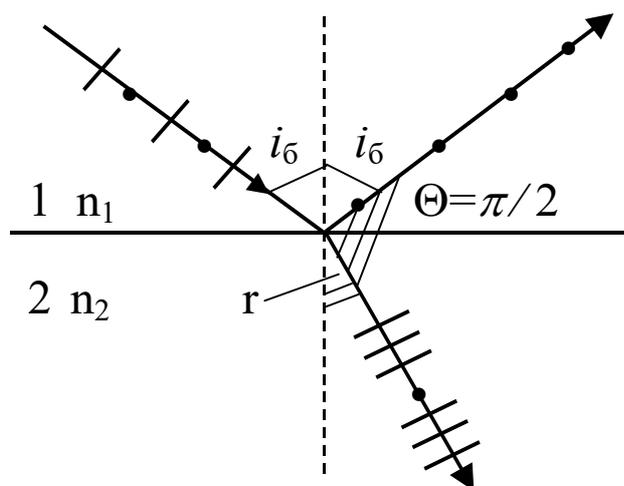


Рис. 7.25

Угол  $i_6$  (или угол полной поляризации) определяется законом Брюстера:

$$\operatorname{tg} i_6 = n_{21}, \quad (7.58)$$

где  $n_{21}$  – показатель преломления второй среды относительно первой.

Из закона (7.58) следует, что

$$\frac{\sin i_{\text{б}}}{\cos i_{\text{б}}} = \frac{\sin i_{\text{б}}}{\sin r} \Rightarrow \cos i_{\text{б}} = \sin r \Rightarrow i_{\text{б}} + r = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Theta = \frac{\pi}{2},$$

т.е. при падении светового луча на границу раздела диэлектриков под углом полной поляризации отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны.

Отраженный луч можно сделать практически полностью поляризованным за счет его многократного преломления на границах раздела сред при условии, что каждый раз падение этого луча происходит под углом Брюстера. С этой целью преломленный луч пропускают через стопу – набор наложенных друг на друга плоских стеклянных пластинок.

На практике закон Брюстера выполняется неточно.

При отражении света от металлических поверхностей этот закон вообще не выполняется.

#### 7.1.4.2. Поляризация света при двойном лучепреломлении

*Явление двойного лучепреломления наблюдается для оптически прозрачных кристаллов, не относящихся к кубической системе.*

*Это явление заключается в том, что даже при нормальном падении светового луча на кристалл, внутри кристалла этот луч разделяется на два луча, распространяющихся в разных направлениях с разными скоростями.*

Причиной двойного лучепреломления является анизотропия физических свойств кристаллов – в разных направлениях внутри кристалла его физические свойства различны.

Различают одноосные и двуосные кристаллы.

1) Одноосные кристаллы (кварц, турмалин, исландский шпат).

Внутри таких кристаллов падающий луч разделяется на два луча (рис. 7.26): обыкновенный и необыкновенный.

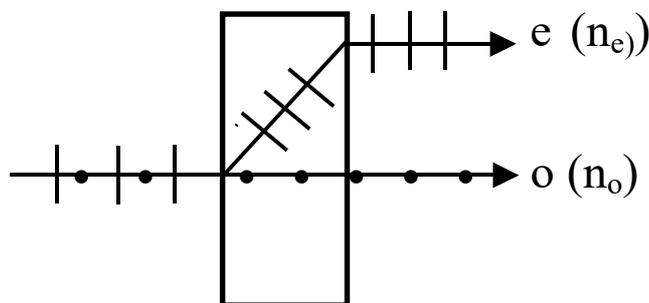


Рис. 7.26

Для обыкновенного луча (o) выполняется закон преломления, а для необыкновенного луча (e) этот закон не выполняется. Как правило, эти лучи не лежат в одной плоскости.

Обыкновенный и необыкновенный лучи полностью поляризованы в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

У одноосных кристаллов есть направление, вдоль которого обыкновенный и необыкновенный лучи распространяются не разделяясь и с одинаковой скоростью. Это направление определяет оптическую ось кристалла. Любая прямая, параллельная указанному направлению, также является оптической осью кристалла.

Любая плоскость, проходящая через оптическую ось, называется главным сечением или главной плоскостью кристалла.

2) Двуосные кристаллы (слюда, гипс).

У двуосных кристаллов оба луча являются необыкновенными.

#### 7.1.4.3. Поляриды. Закон Малюса

Поляриды бывают двух типов: поляризаторы (П) и анализаторы (А).

Поляризаторы используются для получения поляризованного света. Анализаторы применяются для того, чтобы установить, что свет поляризован (глаз человека не различает поляризованный и неполяризованный свет).

При изготовлении поляридов используют явление *дихроизма* – способность веществ по-разному поглощать обыкновенные и необыкновенные лучи.

Например, в турмалине на толщине в 1 мм полностью поглощается обыкновенный луч. Если из кристалла турмалина изготовить пластинку, толщиной превышающей 1 мм, то из нее выйдет только полностью поляризованный необыкновенный луч.

Пусть на поляриод (П) падает естественный свет (рис. 7.27).

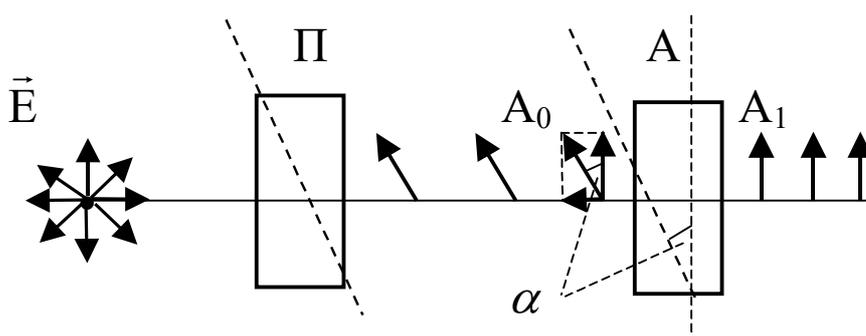


Рис. 7.27

Угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора  $\alpha$ .

После поляризатора свет становится полностью поляризованным, причем колебания светового вектора  $A_0$  будут происходить параллельно главной плоскости поляризатора.

Анализатор пропустит только ту составляющую светового вектора  $A_0$ , колебания которой происходят параллельно главной плоскости этого поляроида:

$$A_1 = A_0 \cos \alpha . \quad (7.59)$$

Интенсивность световой волны пропорциональна квадрату амплитуды колебаний светового вектора. Поэтому интенсивность света после анализатора

$$I_1 = I_0 \cos^2 \alpha , \quad (7.60)$$

где  $I_0$  – интенсивность света до анализатора.

Формула (7.60) носит название закона Малюса.

Этот закон позволяет определить интенсивность света после анализатора, если известна его интенсивность до анализатора.

Из закона Малюса следует, что интенсивность света после анализатора зависит от угла  $\alpha$ . Если угол между главными плоскостями поляроидов равен  $\pi/2$  (поляроиды скрещены), то  $I_1 = 0$ .

Можно показать, что интенсивность естественного света, прошедшего через поляризатор и анализатор, равна:

$$I_1 = \frac{1}{2} I_{\text{естест}} \cos^2 \alpha . \quad (7.61)$$

## 7.2. Квантовая оптика

### 7.2.1. Тепловое излучение

#### 7.2.1.1. Равновесность теплового излучения

В природе и технике существует большое многообразие различных видов свечения тел, например:

- хемлюминесценция – свечение за счет энергии химических реакций окисления;
- электролюминесценция – свечение за счет энергии электрического поля;
- катодоллюминесценция – свечение твердых тел при их облучении электронами;
- тепловое излучение – самое распространенное в природе свечение, происходящее за счет энергии теплового движения атомов и молекул вещества (т.е. за счет внутренней энергии вещества).

*Тепловое излучение – электромагнитное излучение, источниками которого являются все тела, температура которых превышает 0 К.*

При низких температурах тела излучают длинноволновое инфракрасное излучение.

Рассмотрим, чем тепловое излучение принципиально отличается от всех других видов свечения тел (люминесценций).

Для этого поместим нагретое тело в полость, ограниченную идеально отражающей оболочкой, и создадим в этой полости вакуум (рис. 7.28).

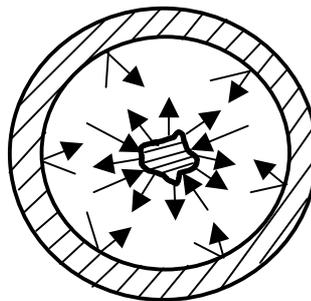


Рис. 7.28

В полости непрерывно будет происходить обмен энергией между телом и заполняющим эту полость тепловым излучением. Через некоторое время в рассматриваемой системе наступит состояние термодинамического равновесия между телом и тепловым излучением: в единицу времени тело будет излучать столько же энергии, сколько и поглощать.

*Теория и опыт свидетельствуют о том, что из всех видов свечений тел только тепловое излучение является равновесным, т.е. только тепловое излучение может находиться в равновесии с излучающими телами.*

Все остальные виды свечения являются неравновесными.

### 7.2.1.2. Основные понятия и определения

Интегральной характеристикой теплового излучения тела является его энергетическая светимость (или лучеиспускательная способность)

$$R_{\varepsilon} = \frac{\phi}{S}, \quad (7.62)$$

где  $\phi$  – поток теплового излучения, излучаемый телом по всем направлениям во всем интервале длин волн;  $S$  – площадь поверхности тела.

*Энергетическая светимость тела численно равна энергии, излучаемой в единицу времени по всем направлениям с единицы площади поверхности тела во всем интервале длин волн.*

Рассмотрим поток  $d\phi_{\lambda}$ , излучаемый с элемента площади поверхности тела  $ds$ , в интервале длин волн  $d\lambda$ , который расположен вблизи длины волны  $\lambda$ . Величина этого потока

$$d\phi_{\lambda} = r_{\lambda} \cdot d\lambda \cdot ds, \quad (7.63)$$

где  $r_{\lambda}$  – спектральная плотность энергетической светимости тела.

Из соотношения (7.63) следует, что

$$r_{\lambda} = \frac{d\phi_{\lambda}}{d\lambda ds}. \quad (7.64)$$

*Спектральная плотность энергетической светимости тела численно равна энергии теплового излучения, излучаемой с единицы поверхности тела по всем направлениям в единичном интервале длин волн, расположенном вблизи длины волны  $\lambda$ .*

Спектральная плотность энергетической светимости тела характеризует распределение энергии теплового излучения тела по спектру.

Теория и опыт показывают, что  $r_{\lambda}$  является функцией длины волны и температуры тела:

$$r_{\lambda} = r_{\lambda}(\lambda, T). \quad (7.65)$$

Если известна  $r_{\lambda}$ , то энергетическая светимость тела

$$R_{\text{э}} = \int_0^{\infty} r_{\lambda} d\lambda. \quad (7.66)$$

Пусть на тело падает поток энергии  $d\phi_{\lambda}^{\text{пад}}$ , образованный электромагнитными волнами, длина волны которых лежит в интервале длин волн от  $\lambda$  до  $\lambda+d\lambda$ . Часть этого потока  $d\phi_{\lambda}^{\text{пог}}$  поглощается телом.

Отношение

$$\frac{d\phi_{\lambda}^{\text{пог}}}{d\phi_{\lambda}^{\text{пад}}} = a_{\lambda} \quad (7.67)$$

определяет поглощательную способность этого тела.

Поглощательная способность  $a_{\lambda}$  является функцией длины волны и температуры тела:

$$a_{\lambda} = a_{\lambda}(\lambda, T). \quad (7.68)$$

Если  $d\phi_{\lambda}^{\text{пог}} = d\phi_{\lambda}^{\text{пад}}$ , то

$$a_{\lambda} = 1. \quad (7.69)$$

Тела, для которых выполняется соотношение (7.69), называются абсолютно черными.

*Абсолютно черное тело (АЧТ) это такое тело, которое полностью поглощает падающее на него излучение любой частоты.*

В природе абсолютно черных тел нет. Все тела являются “серыми телами”, для которых  $a_{\lambda} < 1$ .

Несмотря на то, что абсолютно черных тел в природе не существует, можно создать модель, которая по своим свойствам будет близка к АЧТ.

*Моделью абсолютно черного тела может являться замкнутая полость, имеющая небольшое отверстие (рис. 7.29).* Внутренняя поверхность полости зачернена. Если внутрь такой полости попадают электромагнитные волны, то за счет многократного отражения от стенок энергия этих волн будет практически полностью поглощаться этой полостью.

Расчеты показывают, что при диаметре полости, превышающем размеры отверстия в десять раз, падающее излучение для всех длин волн поглощается практически полностью, т.е. интенсивность выходящего из полости излучения будет равна нулю.

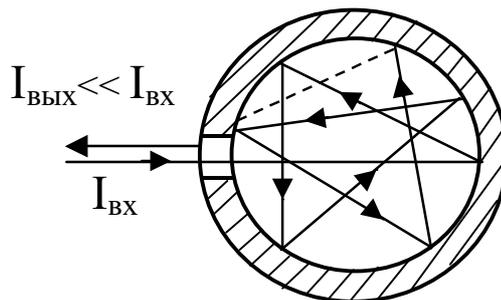


Рис. 7.29

### 7.2.1.3. Закон Кирхгофа

*Г.Р. Кирхгоф установил закон, согласно которому отношение спектральной плотности энергетической светимости тела к его поглощательной способности не зависит от физической природы тела и для всех тел выражается одной и той же универсальной функцией длины волны и температуры тела:*

$$\frac{r_{\lambda}}{a_{\lambda}} = f(\lambda, T). \quad (7.70)$$

Так как для абсолютно черного тела  $a_{\lambda} = 1$ , то из закона Кирхгофа следует, что

$$f(\lambda, T) = r_{0\lambda}, \quad (7.71)$$

где  $r_{0\lambda}$  – спектральная плотность энергетической светимости АЧТ.

Таким образом, эта универсальная функция является не чем иным, как спектральной плотностью энергетической светимости абсолютно черного тела.

*Из закона Кирхгофа следует, что при одной и той же температуре и длине волны спектральная плотность энергетической светимости АЧТ всегда больше спектральной плотности энергетической светимости любого тела, т.е.  $r_{0\lambda} > r_{\lambda}$ .*

### 7.2.1.4. Распределение энергии в спектре теплового излучения АЧТ. Законы излучения АЧТ

Согласно (7.71), все АЧТ при одной и той же температуре обладают одинаковым распределением энергии теплового излучения по спектру, причем с изменением температуры спектр теплового излучения всех АЧТ изменяется одинаковым образом.

Несмотря на то, что абсолютно черных тел в природе не существует, к началу XX века спектр их теплового излучения был очень хорошо изучен экспериментально. Исследования выполнялись с использованием моделей АЧТ.

В результате многочисленных исследований было установлено, что спектр теплового излучения абсолютно черного тела имеет вид, изображенный на рис. 7.30.

Из анализа результатов этих исследований следуют выводы:

- спектр теплового излучения АЧТ сплошной (т.е. в нем присутствуют все длины волн от 0 до  $\infty$ );
- распределение энергии в спектре теплового излучения АЧТ неравномерное;
- при некоторой длине волны  $\lambda_m$  спектральная плотность энергетической светимости АЧТ максимальна;
- если температура АЧТ повышается, то длина волны  $\lambda_m$  смещается в сторону более коротких длин волн.

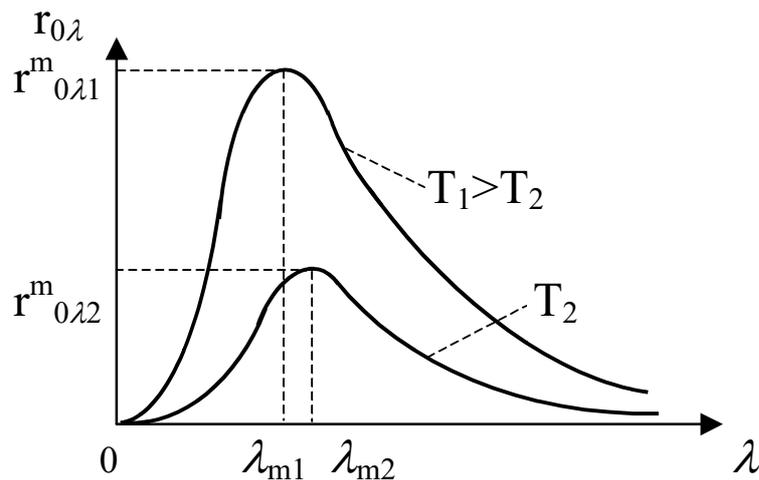


Рис. 7.30

Математическая обработка экспериментальных данных позволила установить следующие законы теплового излучения АЧТ:

- закон смещения Вина:

$$\lambda_m = \frac{c}{T}, \quad (7.72)$$

где  $c = 2,89 \cdot 10^{-3}$  м·К;

- второй закон Вина:

$$r_{0\lambda}^m \sim T^5; \quad (7.73)$$

- закон Стефана-Больцмана:

$$R_{0э} = \sigma T^4, \quad (7.74)$$

где  $\sigma$  – постоянная Стефана-Больцмана, равная  $5,6 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup>К<sup>4</sup>).

Для серых тел закон (7.74) имеет вид:

$$R_{0э} = a\sigma T^4, \quad (7.75)$$

где  $a$  – степень черноты серого тела ( $a < 1$ ).

Сравнение выражений (7.74) и (7.75) свидетельствует о том, что при одной и той же температуре абсолютно черное тело излучает энергию большую, чем серое тело.

Законы теплового излучения абсолютно черного тела широко используются для теплотехнических расчетов, а также в пирометрии – бесконтактном оптическом способе определения температуры нагретых тел.

Важным является то, что первоначально все законы теплового излучения АЧТ были получены эмпирически, т.е. обработкой экспериментальных данных.

#### 7.2.1.5. Объяснение спектра излучения АЧТ. Гипотеза Планка. Формула Планка

Все попытки теоретически объяснить спектр теплового излучения абсолютно черного тела, в основе которых лежали классические представления об излучении и, в частности, классический закон о равномерном распределении энергии по степеням свободы, потерпели неудачу.

Например, В. Вин смог теоретически объяснить только низкочастотный участок зависимости  $r_{0\lambda}(\lambda, T)$ , изображенной на рис. 7.30, а Д. Рэлей и Д. Джинс – длинноволновый. Причем результаты Д. Рэля и Д. Джинса приводили к абсурдному выводу, согласно которому энергетическая светимость АЧТ должна быть бесконечно большой:

$$R_{0э} = \int_0^{\infty} r_{0\lambda} d\lambda = \infty. \quad (7.76)$$

Результат (7.76) получил название “ультрафиолетовой катастрофы”.

Впервые теоретически объяснить спектр теплового излучения абсолютно черного тела удалось в 1900 г. М. Планку. Однако для этого ему

пришлось отказаться от одного из основных положений классической физики: энергия любой системы может изменяться только непрерывно.

Планк высказал гипотезу о квантовом характере излучения: тела испускают электромагнитное излучение в виде отдельных порций энергии (квантов), величина которых пропорциональна частоте излучения:

$$\varepsilon = h \cdot \nu, \quad (7.77)$$

где  $\nu$  – частота излучения;  $h$  – постоянная Планка, равная  $6,62 \cdot 10^{-34}$  Дж·с.

В рамках этой гипотезы Планком была получена формула, которая очень хорошо описывала экспериментально установленный спектр теплового излучения абсолютно черного тела:

$$r_{0\lambda} = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{\left( e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1 \right)}, \quad (7.78)$$

где  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К и носит название постоянной Больцмана.

Формула (7.78) позволяет получить все законы теплового излучения абсолютно черного тела.

В качестве примера получим из формулы Планка закон Стефана-Больцмана.

Согласно соотношению (7.66), энергетическая светимость АЧТ равна:

$$R_{0э} = \int_0^{\infty} r_{0\lambda} d\lambda. \quad (7.79)$$

С учетом формулы Планка (7.78) выражение (7.79) имеет вид:

$$R_{0э} = \int_0^{\infty} \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{\left( e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1 \right)} d\lambda. \quad (7.80)$$

Интегрирование будем производить методом замены переменной. Обозначим

$$z = \frac{k\lambda T}{hc} \Rightarrow \lambda = \frac{hc z}{kT}; dz = \frac{kT d\lambda}{hc} \Rightarrow d\lambda = \frac{hc dz}{kT}. \quad (7.81)$$

Учитывая, что при указанной замене переменной пределы интегрирования не изменяются, энергетическая светимость АЧТ равна:

$$R_{0\lambda} = \frac{2\pi k^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^\infty \frac{dz}{z^5 \left( e^{\frac{1}{z}} - 1 \right)}. \quad (7.82)$$

Так как интеграл

$$\int_0^\infty \frac{dz}{z^5 \left( e^{\frac{1}{z}} - 1 \right)} = \frac{\pi^4}{15}, \quad (7.83)$$

то из выражения (7.82) получаем не только закон Стефана-Больцмана

$$R_{0\lambda} = \sigma T^4,$$

но и теоретическое значение постоянной Стефана-Больцмана, равное

$$\sigma = \frac{2}{15} \pi^5 \frac{k^4}{h^3 c^2}. \quad (7.84)$$

Начиная с работы М. Планка, посвященной теоретическому объяснению спектра теплового излучения АЧТ, начинает развиваться квантовая физика.

#### 7.2.1.6. Фотоны и их свойства

*Квант электромагнитного излучения, относящийся к видимой части спектра, называется фотоном.*

Фотоны обладают энергией, массой и импульсом:

Энергия фотонов определяется формулой (7.77):

$$\varepsilon = h \cdot \nu.$$

С другой стороны, согласно законам теории относительности, энергия этих частиц

$$\varepsilon = m_\phi c^2. \quad (7.85)$$

Из формул (7.77) и (7.85) следует, что масса фотонов

$$m_{\phi} = \frac{h\nu}{c^2} . \quad (7.86)$$

*Фотоны – это частицы, которые всегда движутся со скоростью света. Поэтому они имеют нулевую массу покоя.*

Импульс фотонов равен:

$$p_{\phi} = \frac{h\nu}{c} . \quad (7.87)$$

### 7.2.2. Фотоэлектрический эффект

*Фотоэффект – явление испускания электронов веществом под действием света.*

Этот эффект был открыт в 1887 г. Г. Герцем, который установил, что ультрафиолетовое излучение в области искрового промежутка облегчает разряд.

Однако первые фундаментальные исследования фотоэффекта были выполнены в 1888-1890 гг. А.Г. Столетовым с помощью установки, изображенной на рис. 7.31.

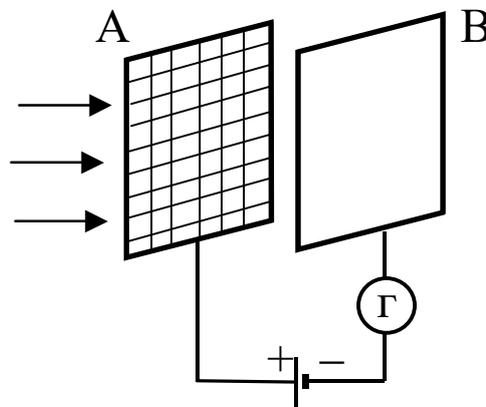


Рис. 7.31

Основным элементом этой установки являлся конденсатор. Обкладка А представляла собой металлическую сетку, а обкладка В – полированную цинковую пластинку.

С помощью батареи между обкладками этого конденсатора создавалась разность потенциалов.

При освещении светом обкладки А в цепи возникал электрический ток  $I_{\phi}$ , величина которого измерялась гальванометром Г.

В результате опытов Столетов установил следующее:

- частицы, покидающие пределы металла под действием света, имеют отрицательный знак;
- наибольшее действие оказывают ультрафиолетовые лучи;
- сила электрического тока пропорциональна световому потоку:

$$I_{\phi} \sim \Phi . \quad (7.88)$$

Соотношение (7.88) носит название закона Столетова.

В 1897 году английским физиком Дж. Дж. Томсоном был открыт электрон.

В 1898 году ему, совместно с немецким ученым Ф. Ленардом, по результатам измерения величины удельного заряда частиц, испускаемых металлами под действием света, удалось установить, что этими частицами являются электроны.

В 1899 году Ленард и Томсон изучили явление фотоэлектрического эффекта с помощью установки, изображенной на рис. 7.32.

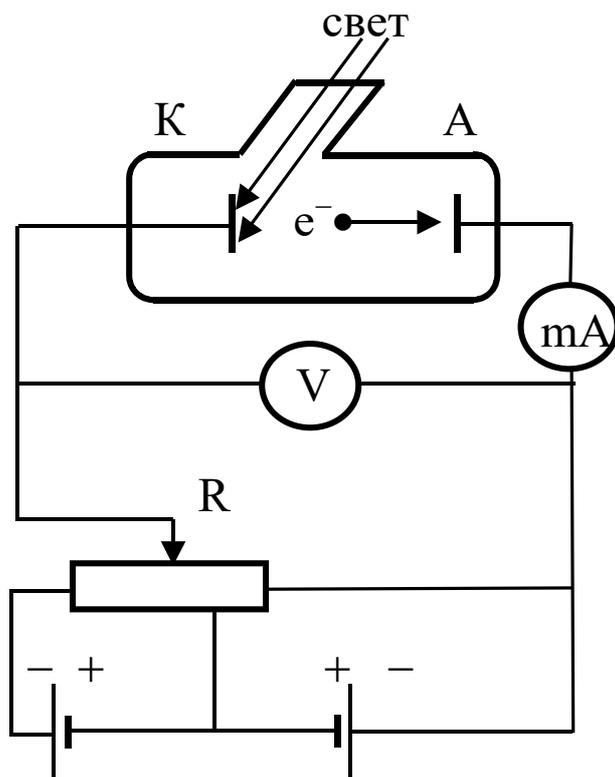


Рис. 7.32

На вакуумной трубке, имеющей катод К и анод А, с помощью батареи и потенциометра R создавалось напряжение.

Под действием света электроны покидают пределы металлического катода и устремляются к аноду. Изменяя напряжение на трубке и измеряя силу тока в ее цепи, можно построить ее вольт-амперную характеристику

(рис. 7.33). Фактически, эта трубка представляет собой вакуумный фотоэлемент.

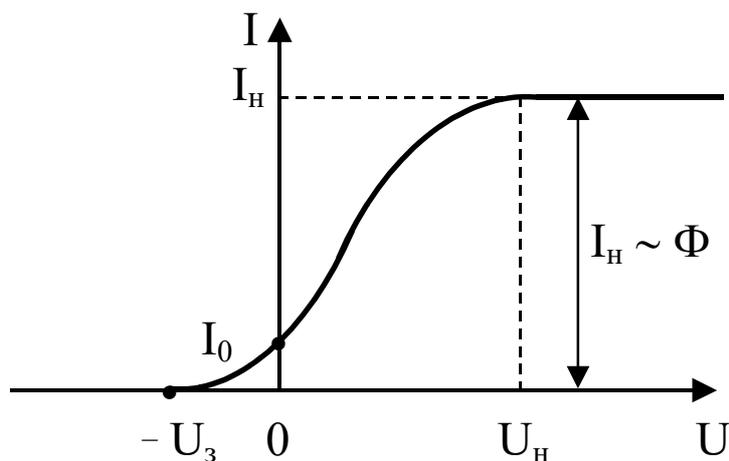


Рис. 7.33

Если проанализировать вольт-амперную характеристику, изображенную на рис. 7.33, то можно сделать следующие выводы:

- если  $U = 0$ , то  $I \neq 0$ ,  $I = I_0$  – это свидетельствует о том, что электроны, покидающие пределы катода под действием света, обладают ненулевой кинетической энергией, за счет которой они способны достигать анода даже при отсутствии напряжения на трубке;
- при  $U = U_H$  фототок  $I = I_H$  и дальнейшее повышение напряжения не приводит к изменению силы тока – это является следствием того, что при указанном напряжении все фотоэлектроны достигают анода; максимальное значение силы тока  $I_H$  называется фототоком насыщения;
- экспериментальные данные свидетельствуют о том, что фототок насыщения  $I_H \sim \Phi$  (закон Столетова);
- чтобы фототок отсутствовал, к трубке необходимо приложить отрицательное напряжение  $-U_3$ , при котором фотоэлектроны, обладающие даже максимальной кинетической энергией

$$\frac{mV_{\max}^2}{2} = eU_3, \quad (7.89)$$

катода не достигают.

Все попытки теоретически объяснить явление фотоэффекта, исходя из классических представлений об излучении, потерпели неудачу.

Например, экспериментальные данные свидетельствуют о том, что величина задерживающего напряжения зависит от частоты падающего на вещество излучения, т.е.

$$U_3 = U_3(\nu). \quad (7.90)$$

Согласно же классическим представлениям, это напряжение определяется величиной светового потока  $\Phi$ .

Впервые теоретически объяснить явление фотоэлектрического эффекта удалось в 1905 г. А. Эйнштейну, который для этих целей использовал гипотезу о квантовом характере электромагнитного излучения.

Им было получено уравнение, которое носит название уравнения Эйнштейна для фотоэффекта:

$$h\nu = A_{\text{ВЫХ}} + \frac{mV_{\text{max}}^2}{2}, \quad (7.91)$$

где  $h\nu$  – энергия кванта электромагнитного излучения, падающего на вещество;  $A_{\text{ВЫХ}}$  – работа выхода электронов из вещества;  $\frac{mV_{\text{max}}^2}{2}$  – максимальная энергия фотоэлектронов.

Работа выхода электронов определяется физическими свойствами вещества и является его характеристикой.

Уравнение (7.91) фактически выражает собой закон сохранения энергии при взаимодействии двух частиц: кванта электромагнитного излучения и электрона вещества. В этом уравнении предполагается, что нагрев вещества при его облучении электромагнитным излучением отсутствует.

Фотоэффект имеет место только в том случае, когда энергии кванта достаточно для того, чтобы электрон, получив эту энергию, совершил работу выхода:

$$h\nu = A_{\text{ВЫХ}}. \quad (7.92)$$

Соотношение (7.92) позволяет определить граничную частоту электромагнитного излучения  $\nu_k$  (красная граница фотоэффекта), начиная с которой для данного вещества возможен фотоэлектрический эффект:

$$\nu_k = \frac{A_{\text{ВЫХ}}}{h}. \quad (7.93)$$

Для возникновения фотоэффекта необходимо, чтобы  $\nu \geq \nu_k$ . Если  $\nu < \nu_k$ , то фотоэффект отсутствует.

С учетом соотношения (7.89), уравнение Эйнштейна (7.91) имеет вид:

$$h\nu = A_{\text{вых}} + eU_3. \quad (7.94)$$

Из (7.94) следует, что величина задерживающего напряжения зависит от частоты электромагнитного излучения:  $U_3 = U_3(\nu)$ . Это соответствует экспериментальным данным по фотоэлектрическому эффекту.

### 7.2.3. Эффект Комптона

*Наиболее ярко квантовая природа электромагнитного излучения проявляется в эффекте Комптона, заключающемся в упругом рассеянии рентгеновского или  $\gamma$ -излучения на свободных или слабо связанных электронах.*

В 1922 г. А. Комптон установил, что при облучении парафина рентгеновскими лучами в рассеянных лучах содержится не только излучение с первоначальной длиной волны  $\lambda$ , но и рентгеновские лучи с большей длиной волны  $\lambda'$ .

Этот результат противоречит волновым представлениям об электромагнитном излучении. Согласно волновой теории, длина волны электромагнитного излучения при рассеянии изменяться не должна.

Экспериментальные данные свидетельствовали о том, что разность длин волн  $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$  определяется только величиной угла рассеяния  $\Theta$  и не зависит от длины волны падающего излучения и природы рассеивающего вещества.

Объяснить эффект Комптона можно только в рамках квантовых представлений, рассматривая его как результат взаимодействия электронов с квантами электромагнитного излучения (рис. 7.34).

Вследствие того, что часть своей энергии квант передает электрону, энергия рассеянного кванта  $h\nu'$  меньше энергии первоначального кванта  $h\nu$ . Поэтому  $\lambda' > \lambda$ .

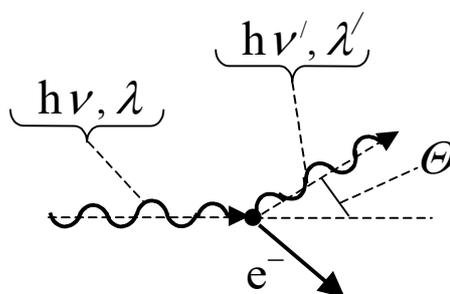


Рис. 7.34

Из законов сохранения энергии и импульса для взаимодействующих частиц следует, что

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta), \quad (7.95)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме;  $m$  – масса электрона.

Согласно формуле (7.95), если угол  $\theta = \pi$  (обратное рассеяние), то  $\Delta\lambda = \Delta\lambda^{\max} = \frac{2h}{mc}$ . При  $\theta = 0$  изменение длины волны кванта электромагнитного излучения в результате его рассеяния на электроне  $\Delta\lambda = 0$ .

К двадцатым годам XX века квантовая природа электромагнитного излучения была доказана экспериментально.

Таким образом, электромагнитное излучение одновременно обладает как волновыми, так и корпускулярными свойствами.

В квантовой механике установлено, что эта двойственность природы электромагнитного излучения (волна-частица) является универсальным свойством материи.

## 8. ФИЗИКА АТОМА

К началу двадцатого века в результате накопления многочисленных экспериментальных данных (электролиз, радиоактивность, фотоэффект, термоэлектронная эмиссия и т. д.) было установлено, что атом в целом является электронейтральной системой, состоящей из положительно и отрицательно заряженных частиц. На наличие внутри атома электрических зарядов также указывала способность атомов испускать и поглощать электромагнитные волны. Это послужило основой для разработки различных моделей атома.

### 8.1. Модели атома Томсона и Резерфорда

#### 8.1.1. Модель атома Томсона

Первая модель атома была создана Дж. Дж. Томсоном в 1903 г. В этой модели атом представлял собой равномерно заряженный по объему шар, имеющий радиус порядка  $10^{-10}$  м. Атом излучал энергию за счет того, что электроны, находящиеся внутри шара, совершали гармонические колебания относительно своих положений равновесия. Суммарный отрицательный заряд электронов был равен положительному заряду шара.

Модель атома Томсона была создана на основе классических представлений. В дальнейшем было установлено, что эта модель оказалась несостоятельной и представляет собой лишь исторический интерес, как первая модель атома.

#### 8.1.2. Модель атома Резерфорда

Эта модель была разработана Э. Резерфордом в 1911 г. на основе полученных им экспериментальных данных по рассеянию веществом  $\alpha$ -частиц, которые представляют собой дважды ионизированные атомы гелия, возникающие при радиоактивных превращениях. Заряд  $\alpha$ -частиц равен  $2e$ , а их масса превышает массу электрона примерно в 7300 раз.

В основе экспериментов лежал принцип зондирования, в котором роль зондов выполняли  $\alpha$ -частицы. Особенностью этих частиц является их высокая монохроматичность: все  $\alpha$ -частицы, вылетающие из атомов данного сорта, имеют близкие скорости. Из-за большой разности в массах,  $\alpha$ -частицы не могут отклоняться при столкновениях с электронами, содержащимися в атомах. Анализ результатов рассеяния  $\alpha$ -частиц в веществе позволяет получить информацию о распределении в атомах положительно заряженной материи, масса которой практически совпадает с массой всего атома.

На рис. 8.1 представлена схема установки, использованной Резерфордом.

Поток  $\alpha$ -частиц, испускаемых радиоактивным радием, направлялся на тонкую металлическую фольгу. После прохождения фольги рассеянные  $\alpha$ -частицы попадали на экран, покрытый флуоресцирующим веществом, и регистрировались по вспышкам света. С помощью специального устройства можно было наблюдать  $\alpha$ -частицы, рассеянные под углами до  $150^\circ$ .

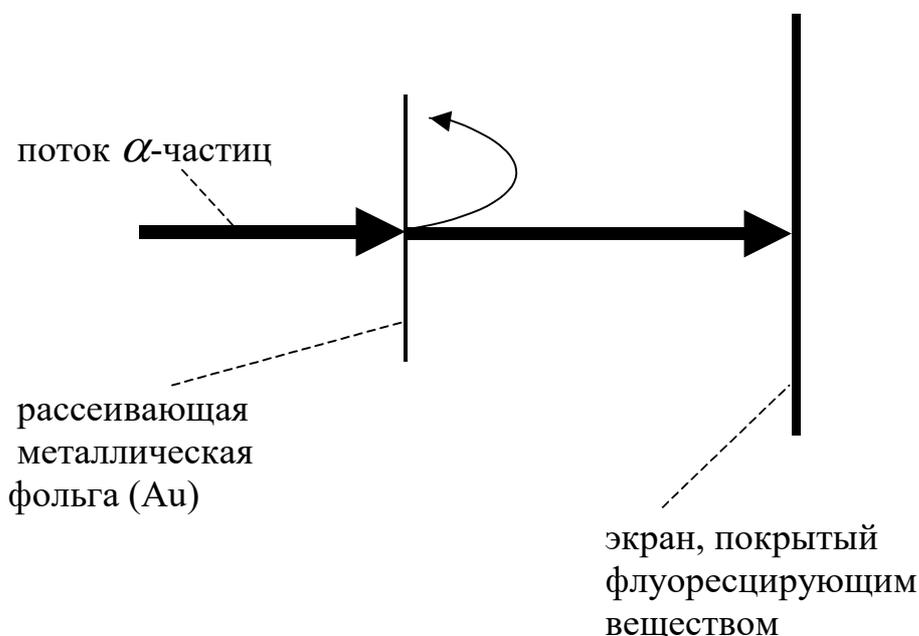


Рис.8.1

В результате опытов было установлено:

- большинство  $\alpha$ -частиц после прохождения фольги практически не изменяло направления первоначального движения (для этих  $\alpha$ -частиц фольга представляла собой как бы пустое пространство);
- относительно малое число  $\alpha$ -частиц после взаимодействия с фольгой отклонялось на большие углы, достигающие значения  $140\text{-}150^\circ$  (эти  $\alpha$ -частицы встречали на своем пути в фольге какие-то массивные положительно заряженные образования).

Для объяснения полученных экспериментальных данных Резерфорд предложил свою модель атома, согласно которой в центре атома находится положительно заряженное ядро. Масса ядра почти равна массе атома. Вокруг ядра под действием электрических сил движутся легкие электроны. Если в атоме содержится  $Z$  электронов, то заряд ядра равен  $eZ$ .

По своей структуре эта динамическая модель атома напоминает строение Солнечной системы. Поэтому разработанную Резерфордом модель атома называют планетарной моделью.

Резерфорд впервые высказал идею о существовании атомного ядра и оценил его размеры. Из экспериментальных данных, полученных им, следовало, что размер атомного ядра составляет  $10^{-14}$ – $10^{-15}$  м.

Несмотря на то, что планетарная модель атома была разработана на основе экспериментальных данных, она была чисто классической. По этой причине модель атома Резерфорда не являлась удовлетворительной.

Из модели Резерфорда следовало, что атом должен быть неустойчивой структурой. Согласно расчетам, электроны в атоме Резерфорда испытывают ускорение порядка  $10^{22}$  м/с<sup>2</sup>. При таких значениях ускорения энергия электронов быстро уменьшается за счет интенсивного излучения ими электромагнитных волн. Этот процесс должен сопровождаться непрерывным уменьшением радиусов электронных орбит. Вследствие чего атом должен перестать существовать в течение миллионных долей секунды. Однако было установлено, что время жизни атомов может достигать миллиарды лет.

Модель атома Резерфорда также приводит к выводу о том, что все вещества, вне зависимости от их агрегатного состояния, должны иметь сплошной спектр электромагнитного излучения. Согласно экспериментальным данным, газы обладают не сплошным, а линейчатым спектром излучения.

## 8.2. Закономерности в спектрах излучения атомарного водорода

К началу двадцатого века спектр излучения атомарного водорода был хорошо изучен экспериментально.

Было установлено, что этот спектр состоит из отдельных линий, которые можно сформировать в серии, причем положение линий в сериях подчиняется некоторым закономерностям. Например, в 1885 году И. Бальмеру удалось подобрать формулу, которая описывала положение всех спектральных линий в видимой части спектра излучения атомарного водорода (серия Бальмера). Имеются также серии линий, расположенные как в инфракрасной, так и ультрафиолетовой частях спектра. И. Ридберг и В. Риц обобщили имеющиеся экспериментальные данные и на основе формулы Бальмера получили эмпирическую формулу, которая позволяла определить значение длины волны  $\lambda$  любой линии в любой серии спектра электромагнитного излучения атомарного водорода:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right), \quad (8.1)$$

где  $R = 1,09 \cdot 10^7$  м<sup>-1</sup> – постоянная Ридберга, а  $n_1$  и  $n_2$  – целые числа, имеющие определенные значения для разных линий и серий.

Формула (8.1) носит название формулы Бальмера-Ридберга.

В таблице приведены значения параметров  $n_1$  и  $n_2$  для некоторых спектральных серий спектра излучения атомарного водорода.

$n_1$	$n_2$	Область спектра	Название серии
1	2,3,4,...	ультрафиолетовая	Лаймана
2	3,4,5,...	видимая	Бальмера
3	4,5,6,...	инфракрасная	Пашена
4	5,6,7,...	инфракрасная	Брэкета

Все попытки теоретически объяснить формулу Бальмера-Ридберга, в основе которых лежали классические представления об излучении атома, потерпели неудачу.

Впервые это удалось сделать Н. Бору в 1913 г., однако для этого ему пришлось разработать свою модель атома.

### 8.3. Модель атома Бора

В основу этой модели была положена модель атома Резерфорда. Бор дополнил планетарную модель атома двумя постулатами, в которых ярко проявлялся отход от классической механики Ньютона и предугадывался квантовый характер атомных структур.

*Первый постулат Бора: в обычном состоянии электроны в атоме находятся на стационарных орбитах; при этом атом не излучает и не поглощает энергии; возможны только такие стационарные орбиты, для которых момент импульса электрона кратен  $\hbar/2\pi$ , где  $\hbar$  - постоянная Планка:*

$$m \cdot v_n \cdot r_n = n \frac{\hbar}{2\pi}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.2)$$

*Второй постулат Бора: излучение испускается или поглощается атомом только в виде кванта излучения с энергией  $\hbar\nu$  при переходе электронов с одних стационарных орбит на другие:*

*а) атом излучает энергию*

$$\hbar\nu = W_{n_1} - W_{n_2} \quad (8.3)$$

*при переходе электрона с более удаленной от ядра стационарной орбиты на менее удаленную ( $n_1 > n_2$ );*

*б) при поглощении энергии электроны переходят с менее удаленной от ядра стационарной орбиты на более удаленную, при этом атом переходит в возбужденное состояние.*

Определим возможные значения радиусов стационарных орбит электронов  $r_n$  в атоме Бора и скорости  $v_n$  электронов на этих орбитах.

Для этого рассмотрим электрон, который находится на  $n$ -ой орбите атома Бора (рис. 8.2).

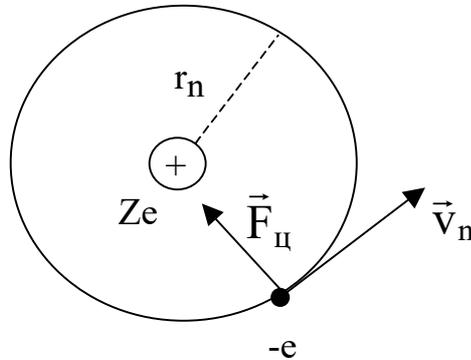


Рис. 8.2

Так как сила Кулона, действующая на электрон в атоме, является центростремительной силой, то из равенства  $F_{ц} = F_{к}$  получаем уравнение:

$$\frac{m v_n^2}{r_n} = \frac{Z e^2}{4 \pi \epsilon_0 r_n^2}, \quad (8.4)$$

откуда

$$v_n^2 = \frac{Z e^2}{4 \pi m \epsilon_0 r_n}. \quad (8.5)$$

Если к соотношению (8.4) добавить выражение для первого постулата Бора (8.2), то получим систему уравнений, позволяющую определить значения  $r_n$  и  $v_n$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{m v_n^2}{r_n} = \frac{Z e^2}{4 \pi \epsilon_0 r_n^2} \\ m \cdot v_n \cdot r_n = n \frac{h}{2 \pi} \end{array} \right. \quad (8.6)$$

Решая эту систему уравнений относительно  $r_n$  и  $v_n$ , получаем:

$$v_n = \frac{Ze^2}{2n\epsilon_0 h}, \quad (8.7)$$

$$r_n = \frac{\epsilon_0 h^2 n^2}{\pi m Z e^2}, \quad \text{где } n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.8)$$

Из соотношений (8.7) и (8.8) следует, что радиусы стационарных электронных орбит и скорости электронов на этих орбитах могут принимать только дискретный набор значений.

Рассчитаем полную энергию электрона, находящегося на  $n$ -ой орбите атома Бора:

$$W^{(n)} = W_K^{(n)} - W_{II}^{(n)}. \quad (8.9)$$

Кинетическая энергия такого электрона, согласно (8.5), равна:

$$W_K^{(n)} = \frac{mv_n^2}{2} = \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r_n}. \quad (8.10)$$

Для определения потенциальной энергии электрона необходимо выбрать начало отсчета этой энергии. Будем считать, что потенциальная энергия электрона в атоме Бора максимальна и равна нулю в том случае, если электрон находится на бесконечно удаленной от ядра стационарной орбите. В этом случае

$$W_{II}^{(n)} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n}. \quad (8.11)$$

Из соотношений (8.9) – (8.11) следует, что

$$W^{(n)} = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r_n}. \quad (8.12)$$

С учетом формулы (8.8), полная энергия электрона на  $n$ -ой орбите атома Бора равна:

$$W^{(n)} = -\frac{Z^2 e^4 m}{8 \varepsilon_0^2 h^2 n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.13)$$

Из (8.13) следует, что энергия электронов может принимать только определенные значения, т.е. энергетический спектр электронов в атоме Бора является не сплошным, а дискретным. Целое число  $n$  определяет энергетические уровни атома и называется главным квантовым числом.

Энергетическое состояние, соответствующее значению  $n=1$ , называется основным, а энергетические состояния, соответствующие значениям  $n > 1$ , являются возбужденными состояниями атома.

Так как

$$W^{(n)} \sim \frac{1}{n^2}, \quad (8.14)$$

то по мере увеличения значения  $n$  расстояние между соседними энергетическими уровнями уменьшается, т.е. энергетический спектр атома является сходящимся.

Получим формулу Бальмера-Ридберга, основываясь на модели атома Бора.

Пусть электрон в атоме Бора переходит со стационарной орбиты  $n_2$  на стационарную орбиту  $n_1$ . Тогда, согласно второго постулата Бора, формулы (8.3) и соотношения  $\nu = c/\lambda$ , получим, что

$$\frac{1}{\lambda} = R Z^2 \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right), \quad (8.15)$$

где  $R = \frac{e^4 m}{8 h^3 c \varepsilon_0^2}$  – постоянная Ридберга.

Так как для атома водорода  $Z=1$ , то

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right), \quad (8.16)$$

что соответствует формуле Бальмера-Ридберга (8.1).

Применительно к атому водорода ( $Z=1$ ) формула (8.13) имеет вид:

$$W^{(n)} = -\frac{e^4 m}{8 \varepsilon_0^2 h^2 n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.17)$$

Если  $W^{(n)}$  выразить в электрон-вольтах, то

$$W^{(n)} = -\frac{13,6}{n^2} (\text{эВ}) . \quad (8.18)$$

Из соотношения (8.18) следует, что при  $n = 1$  атом водорода обладает минимальной энергией  $-13,6$  эВ, а при  $n = \infty$  – максимальной энергией, равной нулю. Если электрону сообщить энергию  $13,6$  эВ, то этот электрон будет удален из атома. Поэтому эта энергия определяет энергию ионизации атома водорода.

На рис. 8.3 изображены возможные уровни энергии в атоме водорода и группы линий в спектре излучения атома водорода, возникающие при переходе электронов с одних стационарных орбит на другие, соответствующие сериям Лаймана, Бальмера, Пашена и Брэкета (см. формулу (8.1)).

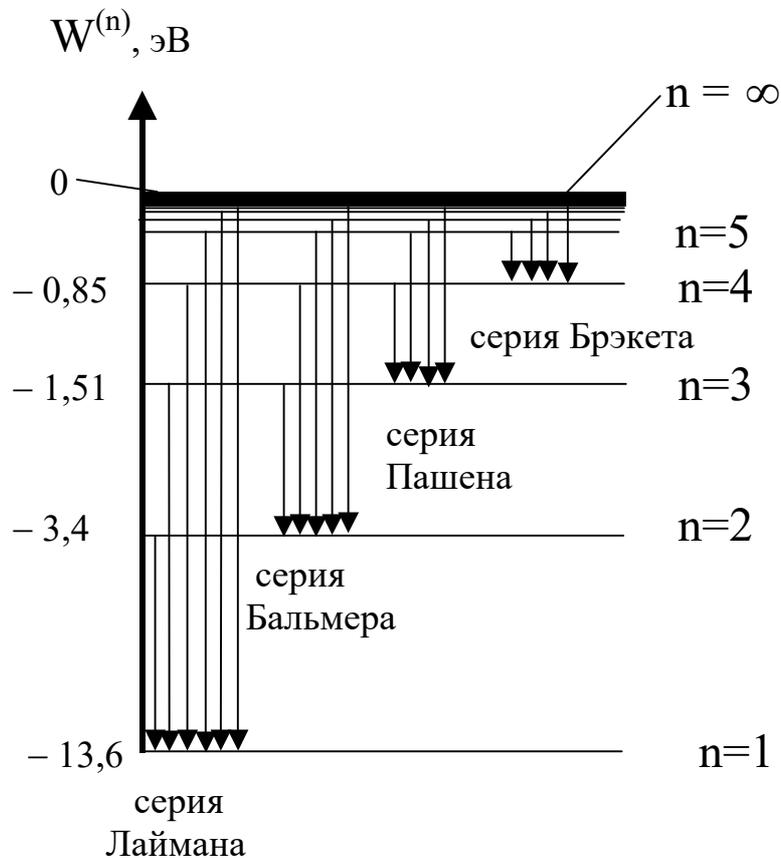


Рис. 8.3

Теория атома Бора сыграла большую роль в развитии науки об атоме и создании квантовой механики.

Объяснив некоторые свойства атома водорода, модель атома Бора оказалась несостоятельной при объяснении свойств многоэлектронных атомов, даже таких, как гелий и литий, расположенных в таблице Менделеева непосредственно за водородом.

Основным недостатком модели атома Бора была ее внутренняя логическая противоречивость – она основывалась как на законах классической физики, так и на квантовых постулатах.

Дальнейший прогресс атомной физики связан с достижениями квантовой механики.

#### 8.4. Рентгеновское излучение

Рентгеновское излучение (рентгеновские лучи) представляет собой электромагнитное излучение с длиной волны от  $10^{-8}$  до  $10^{-12}$  м, которое возникает при бомбардировке вещества высокоэнергетическими электронами. Это излучение было открыто В. К. Рентгеном в 1895 г.

Рентгеновское излучение получают с помощью рентгеновских трубок (рис. 8.4), в которых имеется накаливаемый катод (К), являющийся источником электронов, и анод (А). Между катодом и анодом прикладывается высокая разность потенциалов, достигающая  $10^4 - 10^5$  В. Для исключения взаимодействия электронов с молекулами воздуха, внутри рентгеновской трубки создается вакуум. Рентгеновское излучение возникает при резком торможении электронов в результате их соударения с атомами вещества анода.

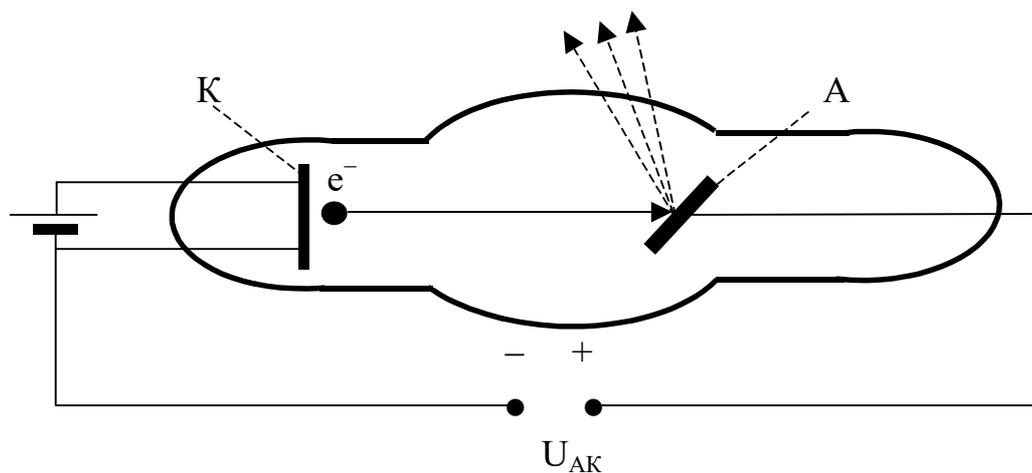


Рис. 8.4

Существует два вида рентгеновских спектров: тормозной (сплошной) и характеристический (линейчатый).

#### 8.4.1. Тормозной рентгеновский спектр

Природа тормозного излучения объясняется тем, что при соударении электрона с анодом происходит резкое торможение электрона. Ускоренное движение электрического заряда приводит к возникновению электромагнитного поля. Тормозное излучение имеет сплошной спектр (рис. 8.5).

Распределение спектральной интенсивности  $I$  по спектру имеет максимум при некоторой частоте. Значение  $I$  плавно уменьшается в сторону больших длин волн, асимптотически приближаясь к нулю при  $\lambda \rightarrow \infty$ . При уменьшении  $\lambda$  значение  $I$  уменьшается более круто.

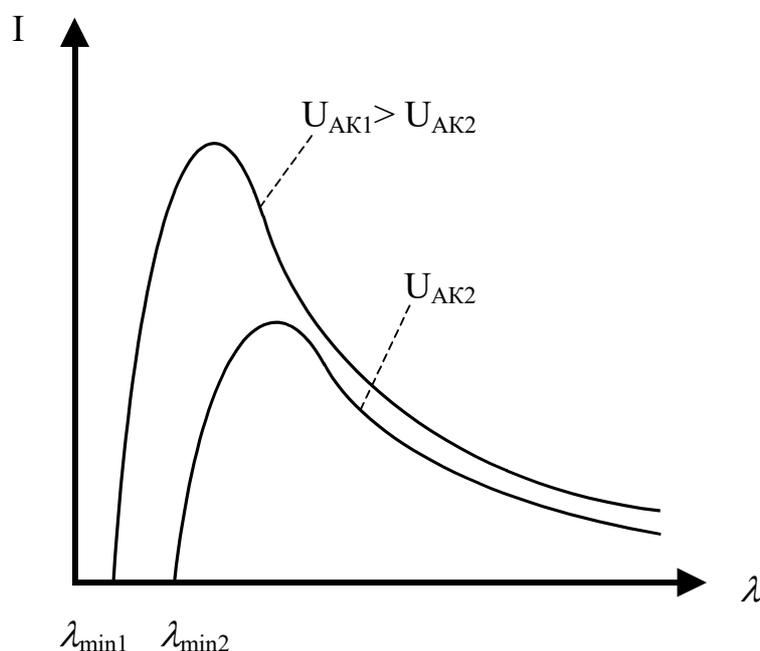


Рис. 8.5

Тормозной рентгеновский спектр имеет коротковолновую границу  $\lambda_{min}$ . Положение частоты  $\lambda_{min}$ , также как и характер распределения энергии тормозного излучения в спектре, не зависит от материала анода.

Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что значение  $\lambda_{min}$  определяется только величиной разности потенциалов  $U_{AK}$ , причем с повышением разности потенциалов  $U_{AK}$  значение  $\lambda_{min}$  уменьшается. Этот результат можно объяснить только в рамках квантовой природы электромагнитного излучения.

Длине волны  $\lambda_{min}$  соответствует квант электромагнитного излучения максимальной частоты  $\nu_{max} = c/\lambda_{min}$ , т.е. максимальной энергии  $h\nu_{max}$ . Рентгеновский квант с такой энергией возникает в том случае, когда энергия

электрона полностью расходуется на создание электромагнитного излучения (нагрев анода отсутствует), т. е.

$$eU_{AK} = h\nu_{\max} = h\frac{c}{\lambda_{\min}}, \quad (8.19)$$

откуда

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eU_{AK}}, \quad (8.20)$$

что соответствует экспериментальным данным.

#### 8.4.2. Характеристический рентгеновский спектр

Этот спектр возникает на фоне сплошного рентгеновского спектра в виде отдельных линий (рис.8.6).

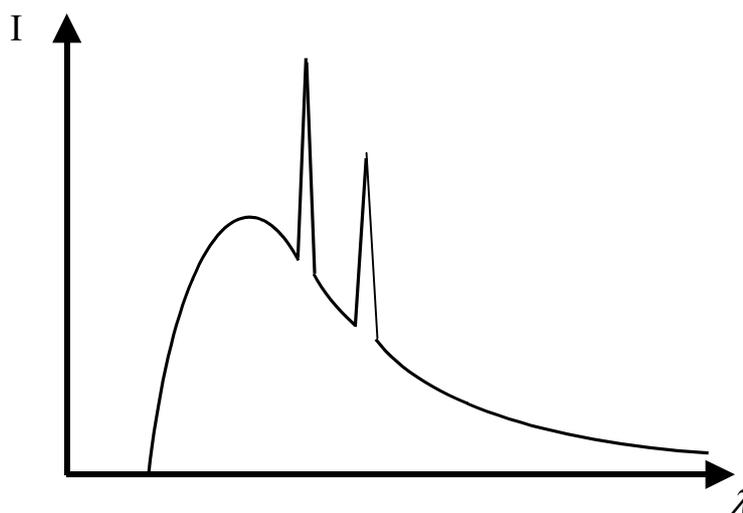


Рис. 8.6

Характеристический рентгеновский спектр обладает тем свойством, что положение линий в этом спектре не зависит от того, в каком химическом соединении присутствует в веществе катода данный элемент. Поэтому характеристический рентгеновский спектр обусловлен процессами, происходящими не на внешних, а на внутренних (застроенных) электронных оболочках атома. Этим линейчатый рентгеновский спектр принципиально отличается от оптического спектра.

В отличие от оптических спектров характеристические рентгеновские спектры элементов полностью однотипны. При увеличении номера химического элемента структура характеристического рентгеновского спектра остается неизменной, однако весь спектр смещается в сторону более коротких длин волн.

Спектральные линии характеристического рентгеновского излучения образуют закономерные последовательности, или серии. Самая коротковолновая серия обозначается буквой **К**, затем **Л**, **М**, **Н** (название серии совпадает с названием электронной оболочки атома, на которую переходят электроны после возбуждения атома вещества катода высокоэнергетическими электронами). Число серий растет с увеличением порядкового номера элемента в таблице Менделеева. Каждая серия содержит набор отдельных линий, обозначаемых в порядке убывания длины волны индексами  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  ( $K_\alpha, K_\beta, K_\gamma, \dots, L_\alpha, L_\beta, L_\gamma, \dots$ ).

Если катод рентгеновской трубки состоит из нескольких элементов, то характеристическое рентгеновское излучение представляет собой наложение спектров этих элементов.

Механизм возникновения серий линейчатого рентгеновского спектра показан на рис. 8.7.

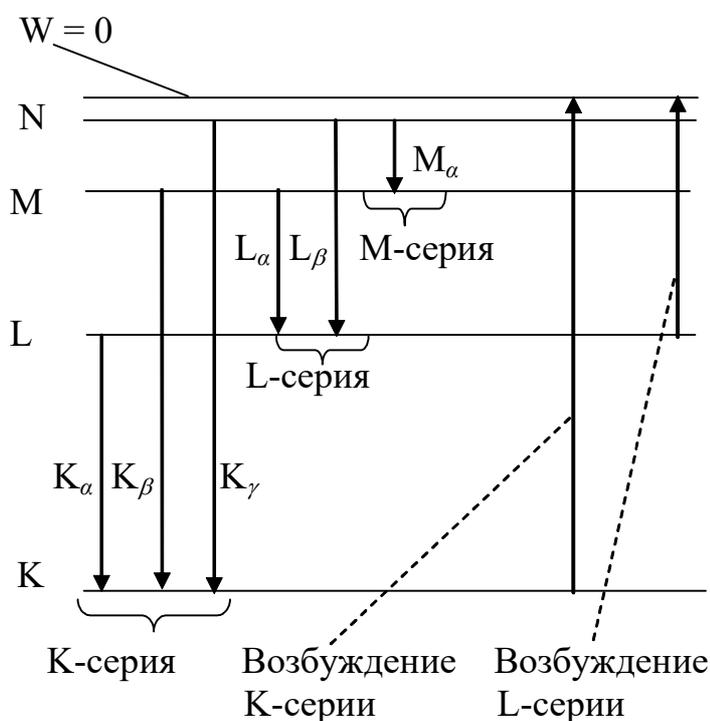


Рис. 8.7

Если под действием высокоэнергетического электрона перевести атом вещества анода в возбужденное состояние за счет удаления одного из двух внутренних электронов **К**-оболочки, то его место может быть занято электроном из какой-либо внешней оболочки (**Л**, **М**, **Н**,...). Этот процесс будет сопровождаться возникновением **К**-серии характеристического рентгеновского спектра. Аналогично возникают и другие серии.

Возникновение К-серии обязательно сопровождается появлением остальных серий, так как при испускании ее линий освобождаются энергетические уровни в выше расположенных электронных оболочках атома. Эти энергетические уровни будут в свою очередь заполняться электронами из еще более удаленных от ядра электронных оболочек атома.

В 1913 г. Г. Мозли установил, что для определения длин волн линейчатого рентгеновского спектра можно использовать формулу (8.15), являющуюся следствием теории атома Бора, если дополнить эту формулу поправкой на экранирование S:

$$\frac{1}{\lambda} = R(Z-s)^2 \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right). \quad (8.21)$$

Поправка S учитывает то, что электроны, совершая переходы, приводящие к возникновению рентгеновского излучения, находятся в поле ядра, ослабленном экранирующим действием других электронов.

Формула (8.21) носит название закона Мозли.

Из этого закона следует, что, измеряя длины волн линейчатого рентгеновского спектра, можно определить номер химического элемента Z в периодической таблице Менделеева. По этой причине линейчатый рентгеновский спектр называют характеристическим.

Например, для K<sub>α</sub>-линии (n<sub>1</sub> = 1, n<sub>2</sub> = 2, s = 1) закон Мозли имеет вид:

$$\frac{1}{\lambda_{K\alpha}} = \frac{3}{4}(Z-1)^2 R, \quad (8.22)$$

*т. е. каждому химическому элементу соответствует вполне определенное значение длины волны K<sub>α</sub>-линии характеристического рентгеновского спектра, причем с повышением атомного номера элемента длина волны этой линии смещается в область более коротких длин волн.*

Закон Мозли позволил не только проверить, но и уточнить расположение элементов в таблице Менделеева.

#### 8.4.3. Дифракция рентгеновских лучей. Формула Вульфа-Брэгга

Первые попытки определить длину волны рентгеновских лучей с помощью дифракционных решеток, предназначенных для видимой части спектра электромагнитного излучения, окончились неудачно. Была высказана гипотеза о том, что одной из возможных причин этого является малая длина волны рентгеновских лучей: для наблюдения дифракции рентгеновских лучей постоянная дифракционной решетки должна быть

много меньше, чем для волн оптического диапазона. Однако изготовить дифракционную решетку с расстояниями между щелями менее, чем  $10^{-7}$  м, невозможно.

В 1912 г. М. Лауэ предложил использовать в качестве дифракционной решетки для рентгеновских лучей периодическую структуру кристаллов, так как расстояние между атомами в кристаллах составляет порядка  $10^{-10}$  м.

Рассмотрим для простоты две параллельные плоскости, в которых лежат атомы кристалла (рис. 8.8). Расстояние между этими кристаллографическими плоскостями равно  $d$ .

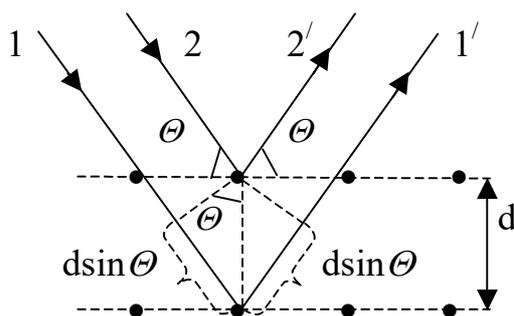


Рис. 8.8

Пусть рентгеновские лучи с длиной волны  $\lambda$  падают на кристалл так, что угол между направлением этих лучей и кристаллографической плоскостью составляет  $\Theta$  (угол скольжения). Лучи 1 и 2, взаимодействуя с атомами кристалла, возбуждают их. В результате эти атомы становятся источниками вторичных когерентных волн  $1'$  и  $2'$ , которые интерферируют.

Дифракционные максимумы будут наблюдаться в тех направлениях, для которых разность хода лучей  $1'$  и  $2'$  кратно целому числу длин волн рентгеновских лучей  $\lambda$ , т.е.

$$2d \sin \Theta = k\lambda, \quad k=1,2,3,\dots \quad (8.23)$$

Формула (8.23) носит название формулы Вульфа-Брэгга в честь русского ученого Ю. В. Вульфа и английских ученых У. Г. Брэгга и У. А. Брэгга, которые впервые применили эту формулу для расчета дифракции рентгеновских лучей на кристаллах.

Дифракция рентгеновских лучей на кристаллах и формула Вульфа-Брэгга используются для изучения строения кристаллических решеток (рентгеноструктурный анализ), а также для измерения длин волн падающих на кристалл рентгеновских лучей (рентгеновская спектроскопия).

## 9. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

9.1. Некоторые теоретические и экспериментальные работы, которые привели к созданию квантовой механики

В 1900 г. М. Планк высказал гипотезу о квантовом характере электромагнитного излучения, в рамках которой ему удалось теоретически объяснить спектр теплового излучения абсолютно черного тела. Он также впервые ввел фундаментальную константу  $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  Дж·с, получившую впоследствии название постоянной Планка, и определил энергию кванта электромагнитного излучения

$$\varepsilon = h \cdot \nu, \quad (9.1)$$

где  $\nu$  – частота излучения.

Используя представления о квантах (фотонах), А. Эйнштейн в 1905 г. теоретически объяснил явление фотоэлектрического эффекта.

В 1913 г. Н. Бор создал качественно новую теорию атома, в основе которой лежали постулаты, содержащие квантовые представления о свойствах атомов.

В 1916 г. Р. Милликен из опытов по фотоэффекту экспериментально определил значение постоянной Планка.

Исследуя упругое рассеяние монохроматического электромагнитного излучения на свободных или слабо связанных электронах, А. Комптон в 1922 г. установил эффект, в котором квантовая природа электромагнитного излучения проявлялась в явном виде.

Таким образом, многочисленные экспериментальные данные, накопленные к двадцатым годам XX века, свидетельствовали о том, что электромагнитное излучение одновременно обладает как волновыми, так и корпускулярными (квантовыми) свойствами, т. е. электромагнитному излучению свойственна двойственная корпускулярно-волновая природа.

Важнейший этап в развитии квантовой механики связан с 1924 г. В этом году французский ученый Л. де Бройль высказал гипотезу о том, что *двойственность природы (волна-частица) присуща не только электромагнитному излучению, а является универсальным свойством материи.*

Из (9.1) следует, что импульс кванта электромагнитного излучения равен:

$$p_{\text{ф}} = \frac{h \nu}{c}, \quad (9.2)$$

откуда, используя соотношение ( $\nu = c/\lambda$ ), длина волны кванта равна:

$$\lambda_{\phi} = \frac{h}{P_{\phi}}. \quad (9.3)$$

Согласно гипотезе де Бройля, это соотношение справедливо не только для квантов электромагнитного излучения, но и для любых других тел:

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad (9.4)$$

т.е. телу, имеющему импульс  $P$ , соответствует длина волны  $\lambda$ .

В настоящее время формулу (9.4) называют законом де Бройля.

Если в качестве примеров оценить с помощью закона (9.4) длины волн де Бройля для пылинки массой  $10^{-10}$  кг, движущейся со скоростью  $10^{-2}$  м/с и электрона, прошедшего разность потенциалов 2,8 В, то соответственно получим  $6 \cdot 10^{-22}$  м и  $7 \cdot 10^{-10}$  м.

Длина волны де Бройля пылинки мала даже по сравнению с размерами атомного ядра. Такую длину волны экспериментально определить невозможно, так как невозможно создать соответствующую дифракционную решетку. По этой причине волновыми свойствами пылинки можно пренебречь.

Длину волны де Бройля для электрона можно определить экспериментально, используя в качестве дифракционной решетки, как и в случае дифракции рентгеновских лучей, периодическую структуру кристаллов. Поэтому волновыми свойствами электрона, движущегося с указанной скоростью, пренебрегать нельзя.

В 1927 г. американские ученые К. Дэвиссон и Л. Джермер впервые экспериментально обнаружили дифракцию электронов. Роль дифракционной решетки в этих опытах играла периодическая структура монокристаллического никеля. Схема опыта Дэвиссона-Джермера изображена на рис. 9.1.

Поток ускоренных электронов испытывает рассеяние на монокристалле никеля. После рассеяния электроны попадают в детектор (Д). Для уменьшения влияния на результаты опытов процессов взаимодействия электронов с молекулами воздуха в установке создавался вакуум. Интенсивность отраженных электронов измеряется гальванометром (Г). Перемещая детектор вокруг кристалла никеля, можно определять интенсивность отраженного потока электронов в различных направлениях. Если поток электронов обладает волновыми свойствами, то его отражение от кристалла должно происходить аналогично рентгеновским лучам, поэтому формула Вульфа-Брэгга (8.18) позволяет определить длину волны электронов. Так как скорость электронов была известна, то эту длину волны

можно также рассчитать из закона де Бройля (9.4). В результате опытов было установлено, что  $\lambda_{\text{Вульфа-Брэгга}}^e \approx \lambda_{\text{де Бройля}}^e$ .

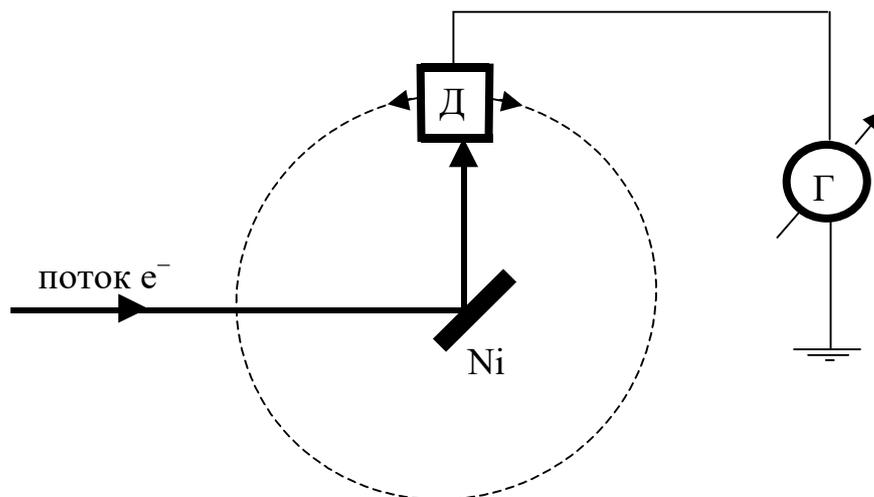


Рис. 9.1

Изучая прохождение высокоэнергетических электронов через тонкие металлические фольги, П. С. Тартаковский в 1928 г. установил, что наблюдаемая в этих опытах дифракционная картина аналогична дифракционной картине, возникающей при прохождении рентгеновских лучей через кристаллические порошки.

В опытах Дэвиссона-Джермера и Тартаковского использовались электронные пучки. Не является ли дифракция, наблюдаемая в этих опытах, следствием волновых свойств потока большой совокупности электронов? Возможно, волновыми свойствами обладает только поток электронов, а не отдельно взятый электрон?

В 1948 г. В. Фабрикант, Л. Биберман и Н. Сушкин наблюдали дифракцию отдельно взятого электрона. В своих опытах они фактически использовали установку Дэвиссона и Джермера. Однако в отличие от них применяли столь слабые электронные пучки, что в данный момент времени с кристаллом взаимодействовал только один электрон. Эксперимент продолжался длительное время. Однако в результате была получена та же дифракционная картина, что и в случае потока электронов.

В этом опыте была доказана волновая природа отдельно взятого электрона.

Волновые свойства экспериментально обнаружены не только для электронов, но и для протонов, нейтронов и других частиц.

В настоящее время для исследования структуры вещества наряду с рентгеноструктурным анализом широко используется дифракция электронов (электроннография) и дифракция нейтронов (нейтронография).

## 9.2. Границы применимости классических теорий

Корпускулярно-волновая природа тел требует установления критерия, позволяющего сделать заключение о том, как решать данную физическую задачу: либо в рамках законов квантовой механики, либо в рамках обычных представлений.

Таким критерием является постоянная Планка  $\hbar = 6,62 \cdot 10^{-34}$  Дж·с.

Постоянная Планка имеет следующую размерность:

$$[\hbar] = [\text{энергия} \times \text{время}] = [\text{импульс} \times \text{длина}] = [\text{момент импульса}].$$

*Динамические переменные с размерностью постоянной Планка называются действием.*

Постоянная Планка определяет минимально возможное действие.

*Если в условиях данной задачи динамическая переменная с размерностью действия много больше  $\hbar$ , то данную задачу можно решать в рамках обычных представлений, а если эта динамическая переменная соизмерима с  $\hbar$ , то задачу необходимо решать только в рамках законов квантовой механики.*

Рассмотрим три примера.

### 9.2.1. Задача о колебаниях материальной точки.

Для оценки динамической переменной с размерностью постоянной Планка необходимо, например, знать значение импульса материальной точки и амплитуды ее колебаний. Зададим значение этих величин. Пусть масса материальной точки  $m = 10^{-3}$  кг, скорость  $v = 0,1$  м/с, а амплитуда колебаний  $A = 0,1$  м. Произведение этих величин равно  $10^{-5}$  Дж·с, что много больше значения  $\hbar$ .

Поэтому задачу о колебаниях материальной точки можно решать в рамках классических представлений механики, т. е. волновыми свойствами материальной точки можно пренебречь

Полученный результат свидетельствует о том, что если бы мы выбрали другие значения  $m$ ,  $v$  и  $A$ , значительно отличающиеся по величине от указанных, то это бы не изменило сделанного вывода.

### 9.2.2. Задача о поведении электрона в электронно-лучевой трубке.

Импульс электрона, прошедшего в электронно-лучевой трубке ускоряющую разность потенциалов  $U$ , равен:

$$p = \sqrt{2meU}. \quad (9.5)$$

Если задать длину электронно-лучевой трубки  $l$ , равную  $10^{-2}$  м, и принять, что  $U = 10^3$  В, то произведение  $pl = 1,71 \cdot 10^{-27}$  Дж·с, что снова

много больше  $\hbar$ . Как и в предыдущем случае, данную задачу следует решать в рамках классических представлений.

### 9.2.3. Задача о поведении электрона в атоме

Если учесть, что скорость электрона в атоме  $v \approx 10^6$  м/с, а размер атома  $r_a \approx 10^{-10}$  м, то произведение  $m \cdot v \cdot r_a \approx 10^{-34}$  Дж·с, что соизмеримо со значением постоянной Планка  $\hbar$ .

По этой причине рассматриваемую задачу необходимо решать только в рамках законов квантовой механики. Волновыми свойствами электрона в атоме пренебрегать нельзя.

*Частицы, для которых нельзя пренебречь волновыми свойствами, принято называть микрочастицами.*

Следует иметь в виду, что одна и та же частица, например электрон, в одних задачах может рассматриваться как обычная частица (пример 2), а в других ее следует считать микрочастицей (пример 3).

*Волновыми свойствами частиц нельзя пренебрегать, если они локализованы в микроскопических объемах пространства (например, электрон в атоме).*

### 9.3. Статистическое толкование волн де Бройля. Волновая функция и ее свойства

Первой попыткой связать между собой волновые и корпускулярные свойства микрочастиц была идея Э. Шредингера о представлении микрочастиц в виде волнового пакета. Волновой пакет – совокупность монохроматических волн разной частоты, которые при наложении образуют формацию, ограниченную во времени и пространстве. Чем меньше ширина волнового пакета, тем большее число монохроматических волн необходимо для его формирования. Например, для формирования волнового пакета с размером, близким к размеру электрона, необходимо взять  $10^{20}$  монохроматических волн разной частоты. Для решения задачи о взаимодействии хотя бы двух электронов, представленных в виде волновых пакетов, необходимо рассмотреть результат взаимодействия указанного числа волн, что невозможно.

Кроме того, сформированный волновой пакет вследствие дисперсии волн расплывается в пространстве. Оценки показывают, что для электрона это происходит за время  $10^{-26}$  с.

Общепринятое в настоящее время толкование волн де Бройля принадлежит М. Борну.

Согласно современным представлениям все физические законы имеют вероятностный характер. Данному положению частицы в пространстве соответствует некоторая вероятность, которая определяется волновыми свойствами этой частицы.

Таким образом, механическому движению частицы сопоставляется волновой процесс – процесс распространения волн вероятности де Бройля.

Рассмотрим мысленный эксперимент по дифракции электронов на плоской щели.

Так как электроны обладают волновыми свойствами, то после прохождения ими щели дифракционная картина на экране будет аналогична той, что наблюдается и при дифракции света (рис. 9.2).

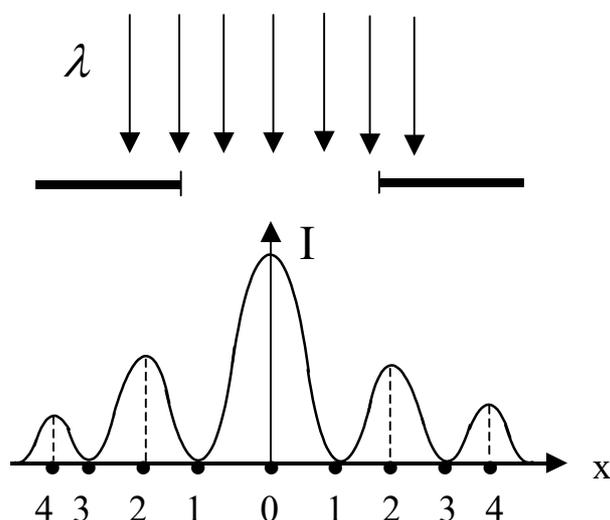


Рис. 9.2

Почему в точке 0 интенсивность дифракционной картины  $I$  максимальна, в точках 2 и 4 меньше, чем в точке 0, а в точках 1 и 3 она равна нулю?

В данном случае интенсивность определяет количество электронов, которые после прохождения щели попадают в соответствующую точку дифракционной картины. В результате дифракции наибольшее число электронов можно обнаружить в окрестности точки 0. Вблизи точек 2 их количество будет значительно меньше, чем в окрестности точки 0, а вблизи точек 4 меньше, чем в окрестности точек 2. В точки 1 и 3 электроны не попадают. Таким образом, интенсивность определяет вероятность  $W$  обнаружить электрон вблизи той или иной точки дифракционной картины.

Из волновой оптики известно, что интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды световой волны ( $I \sim A^2$ ). Поэтому интенсивность волн де Бройля в нашем примере определяет вероятность обнаружить электрон после прохождения щели в той или иной точке на экране.

В квантовой механике уравнение волны принято называть волновой функцией и обозначать греческой буквой  $\Psi = \Psi(x, y, z, t)$ .

$\Psi$  - функции микрочастиц в общем случае комплексные величины и по этой причине физического смысла не имеют. Физический смысл имеет не сама волновая функция, а квадрат ее модуля  $|\Psi(x, y, z, t)|^2$ .

Квадрат модуля волновой функции всегда является величиной действительной и положительной (или равной нулю).

Принятое в квантовой механике описание состояния микрочастицы с помощью волновой функции имеет вероятностный или статистический характер.

Волновая функция микрочастиц имеет следующие свойства:

- $\Psi$  - функции должны быть непрерывными, однозначными, конечными и иметь непрерывные частные производные;
- $|\Psi(x, y, z, t)|^2 = \Psi \cdot \Psi^*$ , где  $\Psi^*$  - функция, комплексно-сопряженная с  $\Psi$ , определяет плотность вероятности или вероятность нахождения микрочастицы в момент времени  $t$  в единичном объеме пространства, расположенном вблизи точки с координатами  $X, Y, Z$ ;
- возможными областями локализации микрочастицы являются те области пространства, для которых  $|\Psi(x, y, z, t)|^2 \neq 0$ ;
- произведение  $|\Psi(x, y, z, t)|^2 \cdot dv$  определяет вероятность обнаружить микрочастицу в момент времени  $t$  в объеме  $dv = dx \cdot dy \cdot dz$ , который расположен вблизи точки пространства с координатами  $X, Y, Z$ ;
- $\Psi$  - функции должны быть квадратично интегрируемы;
- интеграл  $\int_V |\Psi|^2 dv$  определяет вероятность обнаружить микрочастицу в объеме  $V$ ;
- для волновых функций должно выполняться следующее условие нормировки:

$$\int_V |\Psi|^2 dv = 1. \quad (9.6)$$

Условие нормировки (9.6) является следствием того, что вероятность достоверного события равна единице. Если существование микрочастицы в объеме  $V$  является установленным фактом, то эта микрочастица обязательно должна находиться в этом объеме.

#### 9.4. Соотношение неопределенностей

Корпускулярно-волновая природа микрочастиц приводит к тому, что ряд понятий классической физики к ним неприменимо. Например, нельзя ввести понятие “траектория движения микрочастицы”. Это является следствием того, что для таких частиц невозможно одновременно знать точное значение координаты и импульса.

Впервые на это обратил внимание В. Гейзенберг, получив в 1927 г. соотношение, названное соотношением неопределенности:

$$\begin{cases} \Delta x \Delta p_x \geq h; \\ \Delta y \Delta p_y \geq h; \\ \Delta z \Delta p_z \geq h, \end{cases} \quad (9.7)$$

где  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  – неопределенность (неточность) значений координат микрочастицы, а  $\Delta p_x$ ,  $\Delta p_y$ ,  $\Delta p_z$  – неопределенность значений проекций ее импульса.

Из (9.7) следует, что если, например, для микрочастицы известно точное значение ее координаты  $x$  ( $\Delta x = 0$ ), то в этом случае проекция ее импульса  $p_x$  оказывается совершенно неопределенной ( $\Delta p_x \rightarrow \infty$ ), и наоборот. Это справедливо и для двух других координат микрочастицы. Таким образом, чем точнее определена одна из входящих в неравенство (9.7) величин, тем менее определено значение другой. Принципиальным является то, что никакие экспериментальные методы не позволяют одновременно точно измерить координату и импульс микрочастицы. Поэтому соотношение неопределенности накладывает ограничения на точность измерения физических величин.

Соотношение неопределенности является законом природы и выполняется для любых тел, однако оно существенно в том случае, когда произведение величин слева в неравенствах (9.7) соизмеримо с постоянной Планка.

Соотношение неопределенности выполняется также для энергии и времени:

$$\Delta W \Delta t \geq h. \quad (9.8)$$

Если  $\Delta t$  – время жизни микрочастицы, то ее энергия может быть определена с точностью  $\Delta W$ .

В ряде случаев соотношение неопределенности позволяет достаточно просто сделать ряд важных выводов о поведении атомно-молекулярных структур. Например, учитывая, что энергия кванта электромагнитного излучения  $W = h\nu$ , из (9.8) получим, что  $\Delta \nu \Delta t \geq 1$ . Так как время

излучения атома не равно нулю ( $\Delta t \approx 10^{-8}$ с), то  $\Delta t \neq 0$ . Таким образом, излучение атома в принципе не может быть монохроматическим (спектральная линия имеет “естественную ширину”  $\Delta\nu$ ).

### 9.5. Уравнение Шредингера

Одной из важнейших задач квантовой механики является нахождение волновых  $\Psi$ -функций микрочастиц. В 1926 году для этой цели Э. Шредингер предложил использовать следующее уравнение:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U(x, y, z, t) \Psi, \quad (9.9)$$

где  $\Psi(x, y, z, t)$  – искомая волновая функция микрочастицы;  $i = \sqrt{-1}$ ;  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ;  $m$  – масса микрочастицы;  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор

Лапласа;  $\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$ ;  $U(x, y, z, t)$  – потенциальная энергия микрочастицы.

Уравнение (9.9) справедливо в следующих случаях:

- скорость движения микрочастицы  $v \ll c$ ;
- число частиц в системе неизменно.

Вся квантовая механика не сводится к решению уравнения (9.9), однако его применение к атомно-молекулярным структурам приводит к результатам, хорошо согласующимся с экспериментальными данными.

Выражение (9.9) называют уравнением Шредингера, содержащим время.

В ряде случаев представляют интерес стационарные состояния микрочастицы – состояния, которые не изменяются со временем. Для таких состояний волновые функции и потенциальная энергия не должны зависеть от времени  $t$ .

Получим уравнение Шредингера для стационарных состояний.

Для этого в уравнении (9.9) необходимо разделить переменные.

Будем искать решение этого уравнения в виде произведения двух функций:

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) \cdot \alpha(t) \quad (9.10)$$

Подставляя (9.10) в (9.9), получим

$$i\hbar\psi\frac{\partial\alpha}{\partial t}=-\frac{\hbar^2\alpha}{2m}\Delta\psi+U\alpha\psi. \quad (9.11)$$

Если разделить обе части уравнения (9.11) на произведение  $\psi\cdot\alpha$ , то получим:

$$i\hbar\frac{\partial\alpha}{\alpha\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m\psi}\Delta\psi+U. \quad (9.12)$$

Так как левая часть этого уравнения зависит только от времени, а правая – только от координат, то равенство возможно только в том случае, если обе части уравнения (9.12) равны постоянной величине, имеющей размерность энергии. Обозначим эту постоянную  $W$ , тогда, учитывая только правую часть выражения (9.12), получаем уравнение

$$\Delta\psi+\frac{2m}{\hbar^2}(W-U)\psi=0, \quad (9.13)$$

которое называется уравнением Шредингера для стационарных состояний.

Уравнение (9.13) имеет решения  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n, \dots$  только при определенных значениях параметра  $W$ :  $W_1, W_2, W_3, \dots, W_n, \dots$ . Эти волновые функции принято называть собственными волновыми функциями микрочастицы, а указанный набор значений параметра  $W$  – собственными значениями энергии микрочастицы. Они определяют энергетический спектр микрочастицы.

Таким образом, решая уравнение Шредингера, можно определить энергетический спектр микрочастицы и собственные волновые функции этой микрочастицы, знание которых позволяет рассчитать вероятность нахождения микрочастицы в любой области пространства.

#### 9.6. Свободная микрочастица

Если полная энергия микрочастицы  $W$  равна ее кинетической энергии  $W_k$ , то она является свободной микрочастицей. Решая уравнение Шредингера (9.9), получим, что свободной микрочастице, которая может перемещаться вдоль оси  $X$ , соответствует плоская монохроматическая волна де Бройля

$$\Psi(x,t)=A\cdot e^{-i(\omega t-kx)}, \quad (9.14)$$

а ее энергия

$$W = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}. \quad (9.15)$$

С учетом закона де Бройля (9.4) и соотношения (9.15) полная энергия свободной микрочастицы

$$W = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (9.16)$$

Для свободной микрочастицы никаких ограничений на значение волнового числа  $k$  нет. Это относится также и к ее импульсу и длине волны де Бройля. Из формулы (9.16) следует, что энергия такой микрочастицы может быть любой, а энергетический спектр свободной микрочастицы является сплошным.

Если микрочастица перестает быть свободной, т. е. попадает в какое-либо потенциальное поле, то указанные выше параметры, включая полную энергию, могут принимать только дискретный набор значений.

### 9.7. Микрочастица в одномерной прямоугольной бесконечно глубокой потенциальной яме

Рассмотрим микрочастицу, которая движется вдоль оси  $X$  внутри прямоугольной потенциальной ямы с бесконечно высокими стенками. Ширина ямы равна  $l$  (рис. 9.3).

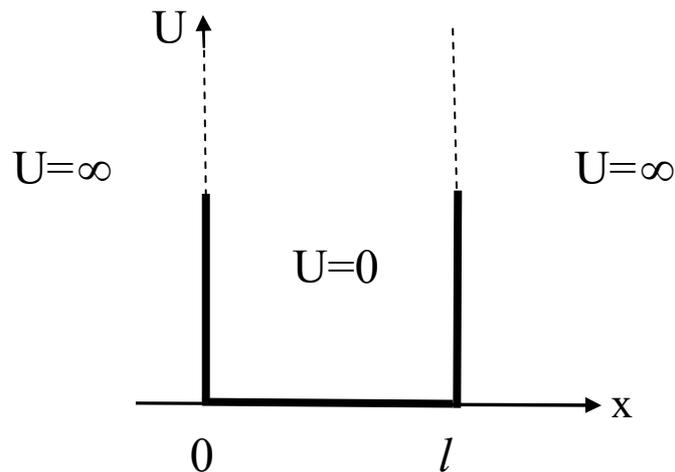


Рис.9.3

Микрочастица в этом случае может иметь следующие значения потенциальной энергии:

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq l, \\ \infty, & x > l. \end{cases} \quad (9.17)$$

Так как движение микрочастицы возможно только вдоль оси  $X$  в пределах от  $0$  до  $l$ , то задача о ее нахождении внутри рассматриваемой потенциальной ямы является одномерной и уравнение Шредингера (9.13) для такой микрочастицы имеет следующий вид:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} W \psi = 0. \quad (9.18)$$

Задачей является решение уравнения (9.18), т. е. нахождение собственных волновых функций и собственных значений энергии рассматриваемой микрочастицы.

Ввиду бесконечно большой величины потенциального барьера вероятность обнаружить микрочастицу в пространстве, расположенном вне ямы, равна нулю. Поэтому и волновая функция для этого случая также должна быть равной нулю. Это приводит к тому, что из условия непрерывности волновой функции при решении дифференциального уравнения (9.18) для волновой функции  $\psi$  должны выполняться два граничных условия:

$$\text{если } x = 0, \text{ то } \psi(0) = 0; \quad (9.19)$$

$$\text{если } x = l, \text{ то } \psi(l) = 0. \quad (9.20)$$

Если обозначить

$$\sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}} = k, \quad (9.21)$$

то дифференциальное уравнение (2.18) будет иметь следующий вид:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0. \quad (9.22)$$

Общим решением этого дифференциального уравнения является функция

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx. \quad (9.23)$$

Из выражения (9.23) и граничного условия (9.19) следует, что параметр  $B = 0$ , а волновая функция

$$\psi(x) = A \sin kx. \quad (9.24)$$

Искомая волновая функция должна удовлетворять также и граничному условию (9.20):

$$\psi(l) = A \sin kl = 0. \quad (9.25)$$

Из физического смысла квадрата модуля волновой функции следует, что параметр  $A$  не может быть равен 0 (равенство нулю этого параметра означало бы отсутствие микрочастицы внутри потенциальной ямы, что противоречит условию задачи).

Граничное условие (9.25) выполняется только в том случае, когда

$$kl = n\pi, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.26)$$

Согласно (9.26),

$$k = \frac{n\pi}{l}, \text{ } n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.27)$$

Для нахождения волновой функции (9.25) необходимо также определить параметр  $A$ . Для этой цели используем условие нормировки волновой функции (9.6), которое в нашем случае имеет вид:

$$A^2 \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi}{l} x \, dx = 1. \quad (9.28)$$

После выполнения интегрирования получаем, что

$$A = \sqrt{\frac{2}{l}}. \quad (9.29)$$

В результате решения уравнения Шредингера (9.18) собственные волновые функции микрочастицы, находящейся в одномерной прямоугольной бесконечно глубокой потенциальной яме, имеют вид:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.30)$$

Из выражений (9.21) и (9.27) следует, что микрочастица в нашем случае может иметь следующие собственные значения энергии:

$$W_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ml^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.31)$$

Согласно (9.31), в отличие от свободной микрочастицы, микрочастица, находящаяся в одномерной прямоугольной бесконечно глубокой потенциальной яме, может иметь только определенный дискретный набор значений энергии, определяемый квантовым числом  $n$ . Таким образом, энергия микрочастицы квантуется, а сама частица может находиться только в определенных квантовых состояниях.

Из (9.31) следует, что  $W_n \sim n^2$ . Поэтому энергетический спектр микрочастицы в рассматриваемом случае является расходящимся.

Оценим расстояние между двумя соседними энергетическими уровнями:

$$\Delta W = W_{n+1} - W_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} [(n+1)^2 - n^2], \quad (9.32)$$

откуда

$$\Delta W \approx \frac{\pi^2 \hbar^2}{ml^2} n. \quad (9.33)$$

Согласно (9.33), чем меньше масса микрочастицы и размер потенциальной ямы  $l$ , тем квантование (расщепление энергетических уровней) сильнее.

Можно показать, что для частиц, локализованных в макроскопических объемах пространства, квантованием энергетических уровней можно пренебречь. Например, это верно для электронов, находящихся внутри электронно-лучевой трубки или электронной лампы. Однако если рассматривать поведение электронов в микроскопических объемах пространства (электроны в атоме), то квантованием их энергетических уровней пренебрегать нельзя.

Проанализируем полученные результаты решения уравнения Шредингера для нашего случая (рис. 9.4).

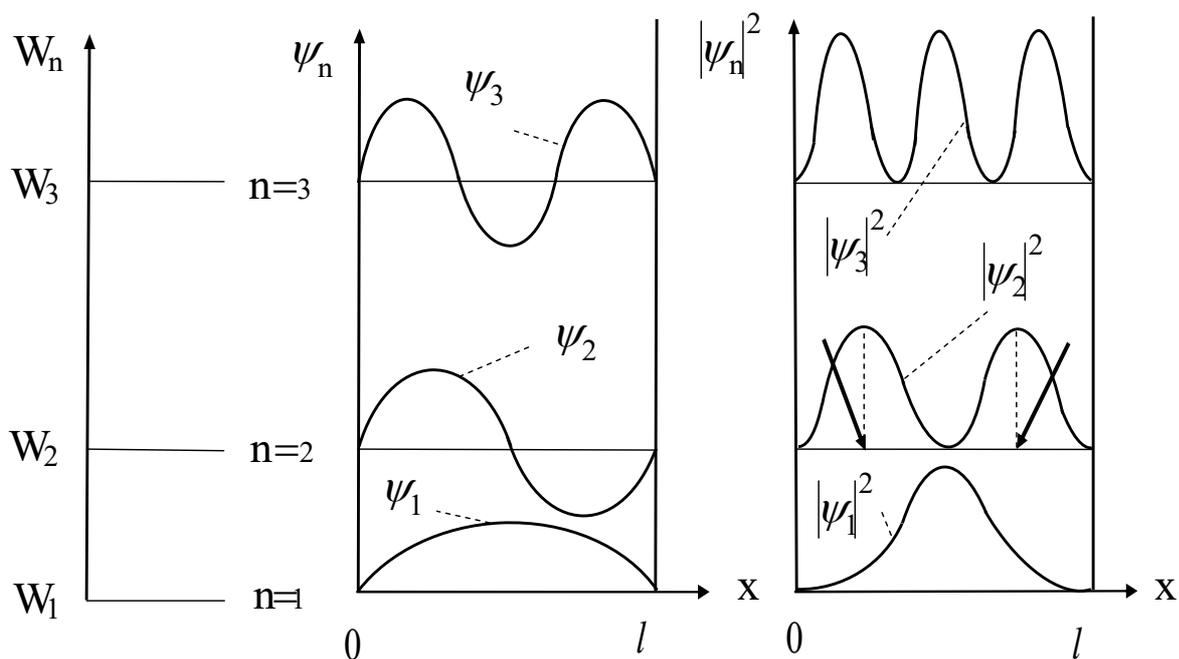


Рис. 9.4

Если, например, микрочастица имеет энергию  $W_2$ , то ей соответствует волновая функция  $\psi_2$ , квадрат модуля которой равен  $|\psi_2|^2$ . Из рис. 9.4 следует, что в этом случае микрочастицу нельзя обнаружить на краях и в центре потенциальной ямы. С наибольшей вероятностью микрочастицу можно обнаружить вблизи областей, соответствующих максимальным значениям  $|\psi_2|^2$ , которые на рис. 9.4 указаны стрелками. При нахождении микрочастицы в других квантовых состояниях вероятность ее местонахождения изменяется, но во всех случаях вероятность обнаружить микрочастицу на краях потенциальной ямы равна нулю.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Трофимова Т.И. Курс физики. М.: Издательский дом “Академия”, 2006. 384 с.
2. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. М.: Издательский дом “Академия”, 2005. 720 с.
3. Овчинников В.А. Общая физика. Ч. 1. Свердловск: УПИ, 1974. 312 с.
4. Овчинников В.А. Общая физика. Ч. 2. Свердловск: УПИ, 1975. 248 с.
5. Иродов И.Е. Основные законы электромагнетизма. М.: Высшая школа, 1983. 479 с.
6. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Механика. М.: Наука, 1971. 480 с.
7. Парсел Э. Электричество и магнетизм. М.: Наука, 1971. 352 с.
8. Физический энциклопедический словарь/ Гл. ред. А.М. Прохоров. М.: Сов. Энциклопедия, 1984. 944 с.

Учебное издание

Игорь Георгиевич Коршунов

# ФИЗИКА

*Учебное пособие*

Редактор изд-ва *И.В. Козлов*  
Компьютерный набор и верстка автора

Подписано в печать 17.02. 2014. Бумага писчая. Формат 60x84 1/16.  
Печать на ризографе. Гарнитура Times New Roman.  
Печ. л. 21,3. Уч.-изд. л. 16,5. Тираж 300. Заказ

Издательство УГГУ  
620144, Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30

Отпечатано с оригинал-макета в лаборатории множительной техники УГГУ