ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА N° 2.10

ИЗУЧЕНИЕ ЯВЛЕНИЯ РЕЗОНАНСА В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ

Цель работы

Целью работы является изучение колебательных процессов, наблюдаемых в электрической цепи на примере работы колебательного контура.

Краткая теория

Колебательным контуром называется электрическая цепь, содержащая катушку индуктивности $\boldsymbol{L}$ и конденсатор $\boldsymbol{C}$. В такой цепи могут возбуждаться электромагнитные колебания.

Если в любом колебательном контуре возбудить свободные электрические колебания, то через некоторое время эти колебания прекратятся. Это связано с тем, что часть запасённой в колебательном контуре энергии затрачивается на разогрев проводников. Другая часть энергии непрерывно расходуется на создание электромагнитного излучения, унося эту энергию в окружающее пространство. Потери энергии колебательного контура, связанные с нагревом проводников, значительно больше потерь энергии, связанных с излучением. Однако если изготовить колебательный контур из сверхпроводящих материалов, излучение будет являться основной причиной затухания свободных электрических колебаний в таком контуре.

Для создания и поддержания электрических колебаний в колебательном контуре, к нему нужно непрерывно подводить энергию от внешнего источника. В такой цепи через некоторое время установятся так называемые стационарные вынужденные колебания, частота которых будет равна частоте вынуждающего напряжения, а фазовые и амплитудные соотношения напряжений и токов для различных элементов колебательного контура будут зависеть от параметров электрической цепи и параметров вынуждающего колебания.

Поскольку любая электрическая цепь обладает активным сопротивлением, индуктивностью и электроёмкостью, то изучение характера вынужденных колебаний в такой простейшей системе, как колебательный контур, представляет большой практический интерес.

На рис. 10 схематически показан последовательный колебательный контур. Вынуждающая электродвижущая сила (ЭДС) $E(t)$ изменяется во времени по закону:

$$E(t) = E_0 \cdot \cos(\omega t), \qquad (2.10.1)$$

где E_0 — амплитуда вынуждающей ЭДС; ω — циклическая частота; t — время.

$$\omega = 2\pi \cdot f,$$

где f — частота воздействующего напряжения.

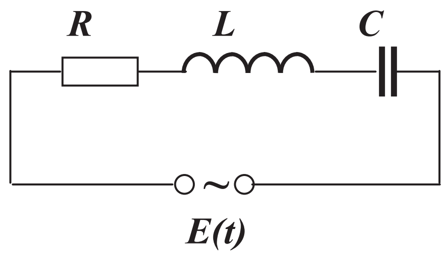

Рис. 10. Электрическая цепь колебательного контура

Если в колебательном контуре протекает ток, то согласно закону сохранения энергии можно записать: $U_R = E_L + E(t) - U_C$.

По закону Ома для участка цепи $U_R = I \cdot R$, по закону Фарадея для явления самоиндукции $E_L = -L\dfrac{dI}{dt}$, а также с учётом определений индуктивности $L = \Phi/I$ и электрической ёмкости $C = q/U_C$, при $L = const$ и $C = const$ получим:

$$I \cdot R + \frac{q}{C} = -L\frac{dI}{dt} + E_0 \cos(\omega \cdot t). \qquad (2.10.2)$$

Учитывая, что сила тока по определению $I = dq/dt$, преобразуем полученное уравнение к виду дифференциального неоднородного уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \cdot \frac{dq}{dt} + \omega_0{}^2 q = \frac{E_0}{L}\cos(\omega t), \qquad (2.10.3)$$

где I, U_R, U_C, q —мгновенные значения силы тока в цепи, напряжения на резисторе, разности потенциалов на конденсаторе, заряда конденсатора соответственно; R —суммарное электрическое сопротивление всех элементов цепи; β — коэффициент затухания, равный $R/2L$, ω_0 —частота собственных незатухающих колебаний:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Как известно, решение этого уравнения представляет собой сумму общего решения однородного уравнения

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \cdot \frac{dq}{dt} + {\omega_0}^2 q = 0, \qquad (2.10.4)$$

описывающего переходный процесс, и частного решения уравнения (2.10.3), описывающего установившиеся стационарные колебания.

Общее решение однородного уравнения (2.10.4) соответствует затухающим колебаниям:

$$q = q_m \exp(-\beta t)\cos(\Omega t + \alpha), \qquad (2.10.5)$$

где q_m —заряд конденсатора в начальный момент времени $t = 0$, Ω — циклическая частота свободных затухающих колебаний.

Поскольку в выражении (2.10.5) присутствует экспоненциальный множитель $\exp(-\beta t)$, который за достаточно короткое время становится очень малым, то общим решением однородного дифференциального уравнения можно пренебречь.

Частное решение уравнения (2.10.3) имеет вид:

$$q = q_m \cos(\omega t + \psi), \qquad (2.10.6)$$

Подставляя (2.10.6) в (2.10.3), получим:

$$q_0 = \frac{E_0}{L \cdot \sqrt{({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \qquad (2.10.7)$$

$$tg\,\psi = \frac{2\beta\omega}{{\omega_0}^2 - \omega^2}. \qquad (2.10.8)$$

С учётом значений ω_0 и β формулы (2.10.7) и (2.10.8) могут быть записаны следующим образом:

$$q_0 = \frac{E_0}{\omega \cdot \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}, \qquad (2.10.9)$$

$$tg\,\psi = \frac{-R}{(1/\omega C) - \omega L} = \frac{R}{\omega L - (1/\omega C)}. \qquad (2.10.10)$$

Таким образом, установившиеся вынужденные колебания в колебательном контуре описываются уравнением (2.10.6).

В установившемся режиме для разности потенциалов на обкладках конденсатора можно записать:

$$U_C = \frac{q}{C} = U_{C0} \cdot \cos(\omega t + \psi), \qquad (2.10.11)$$

где

$$U_{C0} = \frac{E_0}{LC \cdot \sqrt{(\omega_0{}^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}. \qquad (2.10.12)$$

Величина U_C это амплитуда колебаний разности потенциалов и она численно совпадает с амплитудой колебаний напряжения на конденсаторе. Заметим, что в цепях с переменными токами также выполняется закон Ома:

$$I = \frac{U}{Z},$$

где I, U и Z — мгновенные значения тока, напряжения и полного сопротивления (импеданса) являются функциями комплексного переменного.

Из (2.10.12) видно, что $\Delta\varphi_{C0} = U_{C0}$ существенно зависит от частоты колебаний вынуждающей ЭДС. При приближении к некоторому, определённому для данного колебательного контура, значению ***амплитуда колебаний U_C резко возрастает***. Это явление называется ***резонансом напряжения***, а соответствующая частота $\omega_{рез}$ ***резонансной частотой***.

Чтобы определить резонансную частоту $\omega_{рез}$, нужно найти максимум функции (2.10.12) или минимум выражения, стоящего под корнем в знаменателе. Продифференцировав эту функцию по ω и приравняв её нулю, получим уравнение:

$$-4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 8\beta^2\omega = 0. \qquad (2.10.13)$$

Это уравнение имеет несколько корней. Значение $\omega = 0$ соответствует постоянному (не изменяющемуся во времени) воздействию на колебательную систему и потому в рассматриваемом случае интереса не представляет. Сократив на ω (и полагая, что $\omega \neq 0$) запишем уравнение:

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2) + 8\beta^2 = 0, \qquad (2.10.14)$$

имеющее два решения относительно ω:

$$\omega = \pm\sqrt{\omega_0{}^2 - 2\beta^2}, \qquad (2.10.15)$$

из которых физический смысл имеет лишь положительное значение. Следовательно, резонансная частота имеет одно значение

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0{}^2 - 2\beta^2} = 2\pi \cdot f_{рез} \qquad (2.10.16)$$

Явление резкого возрастания амплитуды напряжения на конденсаторе вынужденных колебаний U_C при приближении частоты вынуждающей ЭДС к частоте $\omega_{рез}$ называется ***резонансом*** напряжения.

Подставляя (2.10.16) в (2.10.12) получим выражение для амплитуды колебаний разности потенциалов на обкладках конденсатора при резонансе

$$U_{C0\,рез} = \frac{E_0}{2LC\beta \cdot \sqrt{\omega_0{}^2 - \beta^2}} \quad . \qquad (2.10.17)$$

График зависимости амплитуды напряжения на конденсаторе U_{C0} от частоты ω (или **f**) также называется ***амплитудно-частотной характеристикой*** (АЧХ) или ***резонансной кривой***. Резонансные кривые изображены на рис.2.10.2. При $f \to 0$ все резонансные кривые сходятся в одной точке с ординатой U_{C0} (при $\omega \to 0$), равной E_0. Максимум при резонансе получается тем выше и острее, чем меньше коэффициент затухания β, то есть чем меньше активное сопротивление R и больше индуктивность L контура.

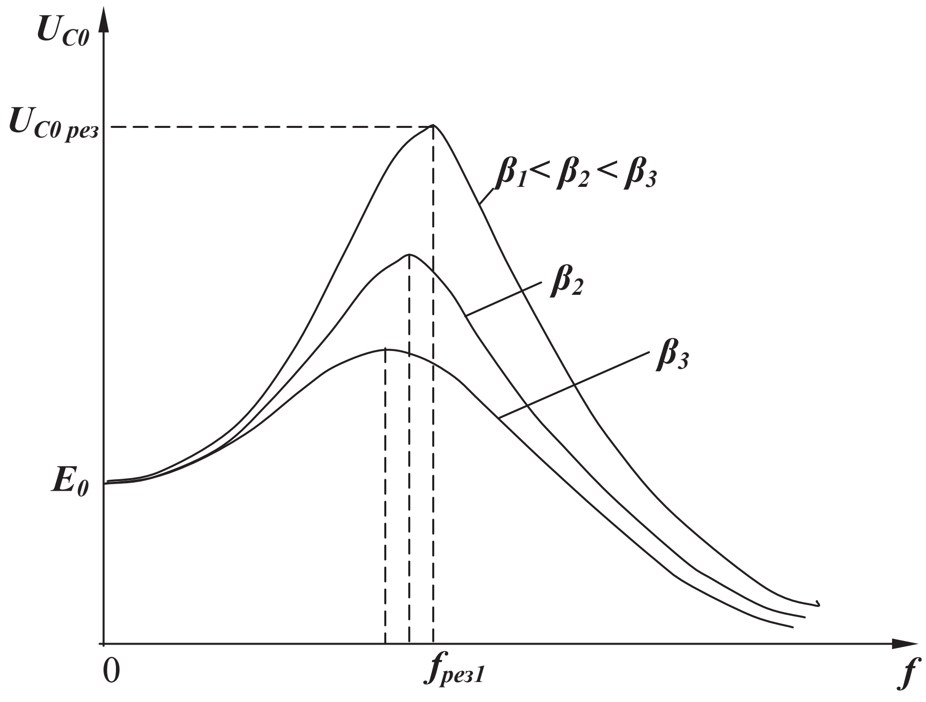

Рис. 11. Вид резонансных кривых при различных значениях коэффициента затухания.

Одной из важнейших характеристик колебательной системы является её добротность.

Добротностью колебательной системы называется безразмерная физическая величина $\boldsymbol{Q}$, равная произведению 2π на отношение энергии $\boldsymbol{W(t)}$ колебаний системы в произвольный момент времени $\boldsymbol{t}$ к убыли этой энергии за один период $\boldsymbol{T}$ собственных затухающих колебаний.

$$Q = 2\pi \cdot \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)}. \tag{2.10.18}$$

Чем меньше потери энергии системы, тем выше её добротность.

Поскольку энергия $\boldsymbol{W(t)}$ пропорциональна квадрату амплитуды колебаний, то

$$Q = \frac{2\pi}{1 - \dfrac{W(t+T)}{W(t)}} = \frac{2\pi}{1 - \exp(-2\beta t)}. \tag{2.10.19}$$

При слабом затухании колебаний, когда $\beta^2 << \omega_0^2$, период T собственных затухающих колебаний практически равен периоду T_0 собственных колебаний, $\beta T_0 << 1$, $\exp(-2\beta T_0) \approx 1 - 2\beta T_0$ и добротность системы

$$Q = \frac{\pi}{\beta \cdot T_0} = \frac{\pi}{\lambda} \tag{2.10.20}$$

где λ — логарифмический декремент затухания (см. 2.10.11).
В этом случае добротность колебательного контура может быть вычислена по формуле

$$Q = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \tag{2.10.21}$$

Добротность колебательного контура можно оценить и по его резонансной кривой. Из (2.10.17) следует, что

$$\frac{U_{C0\,рез}}{U_{C0}(\omega \to 0)} = \frac{1}{2LC\beta \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}, \tag{2.10.22}$$

или при слабом затухании, когда $\beta^2 << \omega_0^2$

$$\frac{U_{C0\,рез}}{U_{C0}(\omega \to 0)} = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}\ . \tag{2.10.23}$$

Сравнивая выражения (2.10.21) и (2.10.23), находим добротность, как

$$Q = \frac{U_{C0\,рез}}{U_{C0}(\omega \to 0)}. \tag{2.10.24}$$

Таким образом, ***добротность колебательного контура показывает, во сколько раз амплитуда колебаний разности потенциалов на обкладках конденсатора при резонансе превышает амплитуду колебаний ЭДС источника тока.***

Аналогичный анализ можно сделать для колебаний силы тока в контуре

$$\begin{aligned} I = \frac{dq}{dt} = q_0\omega \cdot \sin(\omega t + \psi) = \\ = I_0 \cos(\omega t + \psi + \pi/2) = I_0 \cos(\omega t + \psi_1) \end{aligned}, \tag{2.10.25}$$

где

$$\psi_1 = arctg\frac{(1/\omega C)-\omega L}{R}, \qquad (2.10.26)$$

$$I_0 = \frac{E_0}{\sqrt{R^2+(\omega L-1/\omega C)^2}}. \qquad (2.10.27)$$

Резонанс токов наблюдается в последовательном колебательном контуре, если

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}. \qquad (2.10.28)$$

Этому условию удовлетворяет частота собственных незатухающих (совершаемых в отсутствие потерь) колебаний

$$\omega_0 = 2\pi \cdot f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (2.10.29)$$

Сдвиг фазы ψ_1 вынужденных колебаний тока по отношению к колебаниям вынуждающей ЭДС определяет характер полного сопротивления контура на произвольной частоте колебаний. Электрическое сопротивление контура является комплексной величиной:

$$Z = R + jX,$$

где R — активное сопротивление (омическое сопротивление проводников), X — реактивное сопротивление, $j = +\sqrt{-1}$.

Модуль комплексного сопротивления представляет собой полное сопротивление цепи:

$$|Z| = \sqrt{R^2+X^2} = \sqrt{R^2+(\omega L-1/\omega C)^2}.$$

Реактивное сопротивление можно определить как разность между индуктивным, и ёмкостным сопротивлениями:

$$X = (\omega L - 1/\omega C).$$

Таким образом, согласно условию (2.10.28), резонанс токов наступает при равенстве индуктивного и ёмкостного сопротивлений, при этом полное сопротивление контура равно активному сопротивлению R, а сдвиг фазы ψ_1 обращается в нуль, что следует из формулы (2.10.26).

На практике сдвиг фазы ψ_1 (или $tg\ \psi_1$) исследуют в зависимости от частоты вынуждающей ЭДС. Такие зависимости называются ***фазово-частотными характеристиками*** (ФЧХ). Они определяют характер поведения (реактивность) полного сопротивления колебательного контура, т. е. дают представление о том, какой характер сопротивления: индуктивный, ёмкостной или активный преобладает на данной частоте.

Резонансные методы используются для изучения свойств горных пород, например для определения относительной диэлектрической проницаемости ε. Для этого исследуемый образец вводят в конденсатор колебательного контура, изучают резонансные кривые до и после внесения диэлектрика и по добротности контура и его резонансной частоте определяют ε.

В процессе экспериментального исследования АЧХ последовательного колебательного контура с различными значениями сопротивлений потерь необходимо сравнить полученные резонансные кривые, отметить резонансные частоты, оценить добротность контура для каждого случая.

Выполнение работы

Необходимые приборы: лабораторный стенд, внутри которого смонтированы все элементы схемы; двухканальный осциллограф **С1-83**, генератор периодических сигналов **Г3 -112** и комбинированный прибор **В7-16А**.

На рис. 12 приведена схема экспериментальной установки, которая включает в себя лабораторный стенд и контрольно-измерительные приборы. Колебательный контур, необходимый для исследования, можно собрать из отдельных элементов на лабораторном стенде. На стенде для изменения добротности контура имеется набор резисторов, величины которых следует измерить комбинированным прибором **В7-16А**.

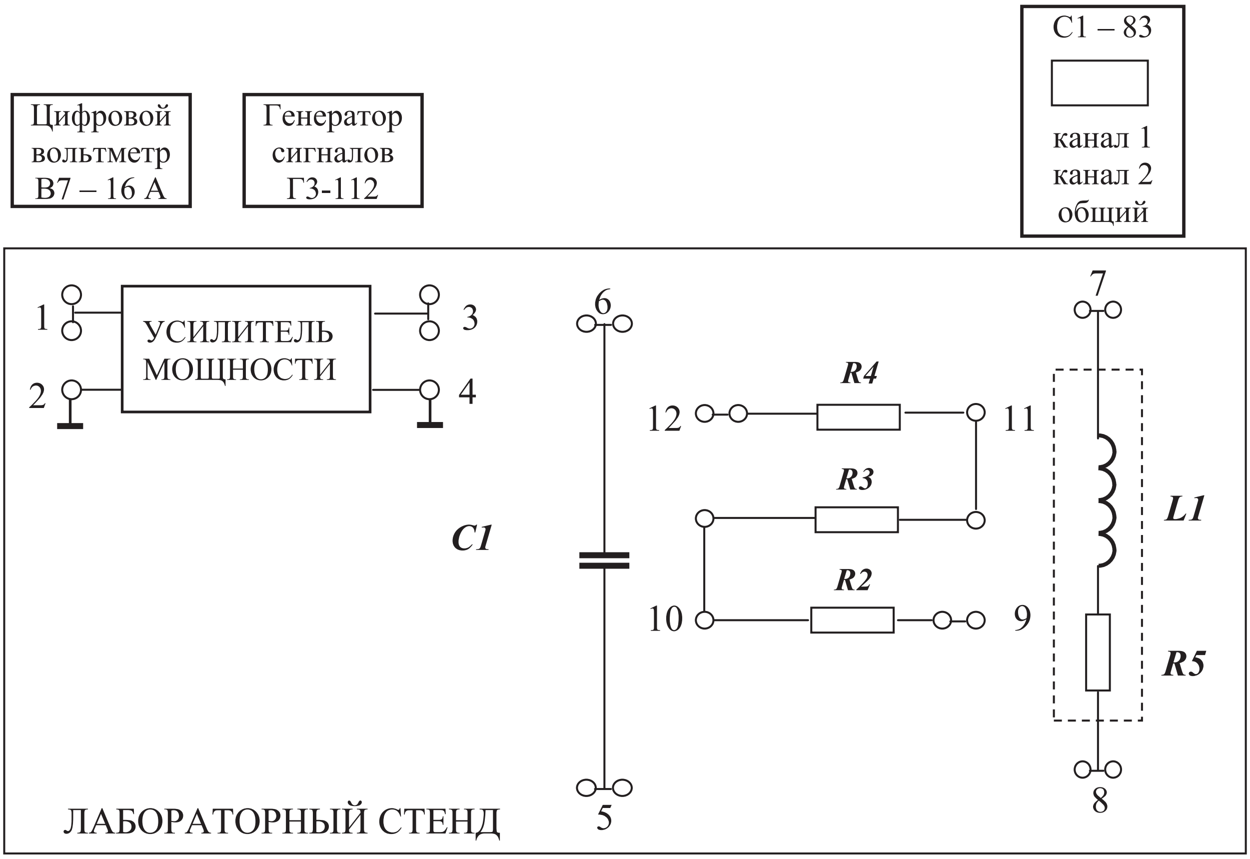

Рис. 12. Схема экспериментальной установки

Снятие амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) контура

Порядок выполнения работы

1. Подключить низкочастотный генератор **Г3-112** на вход усилителя мощности (клеммы 1-2), рис. 12.
2. Собрать схему последовательного колебательного контура, для чего к выходу усилителя мощности последовательно подключается катушка индуктивности ***L1*** и конденсатор ***C1*** (соединить клеммы 3-7, 8-6, 5-4).
3. **I канал** осциллографа подключить к конденсатору ***C1*** (клеммы 5-6), причём таким образом, чтобы заземлённый провод осциллографа (обычно он чёрного цвета или более длинный) был присоединён к заземлённой пластине конденсатора (клемма 5).

4. После проверки схемы преподавателем включить приборы и стенд. Для данной схемы активное сопротивление минимальное и состоит из выходного сопротивления усилителя мощности, которое равно **75 Ом**.

5. Изменяя частоту ***f*** вынуждающего колебания с помощью генератора и наблюдая изменение амплитуды напряжения на конденсаторе U_C на экране осциллографа, ***добиться явления резонанса*** (максимальной амплитуды напряжения на конденсаторе **С1**). Записать значения резонансной частоты и амплитуды в табл. 10.1 (средняя точка на графике).

6. Уменьшая частоту генератора таким образом, чтобы построенная впоследствии резонансная кривая была информативна (см. методику выбора частот), произвести измерения амплитуды напряжения на конденсаторе (на экране осциллографа).

7. Вернуться к резонансной частоте и повторить п. 5, но в сторону увеличения частоты примерно до 35-40 кГц.

<u>Методика выбора частот.</u>

Выбирать частоты следует таким образом, чтобы вблизи резонансной частоты шаг по частоте был равен 0,5 кГц (3-4 точки), затем 1 кГц (3-4 точки), затем выбрать 2-3 точки вдали от резонансной частоты.

<u>Например</u>: резонансная частота **<u>20,5</u>** кГц. Выбираем следующие значения частот: 0; 10; 13; 16; 17; 18; 19; 19,5; 20; **<u>20,5</u>**; 21; 21,5; 22; 23; 24; 25; 30; 35, 40.

8. Между катушкой индуктивности ***L1*** и конденсатором ***C1*** последовательно включить резистор ***R2*** (убрать перемычку 8-6, соединить клеммы 8-9; 10-6) и повторить пункты 4-6.

9. Включить в схему максимально возможное сопротивление ***R2+R3+R4*** (соединены клеммы 8-9; 12-6) и повторить пункты 4-6.

10. Закончив измерения, выключить приборы, схему разобрать. Включить вольтметр и с его помощью измерить значения сопротивлений ***R2*** (клеммы 9-10) и ***R2+R3+R4*** (клеммы 9-12). При этом переключатель вольтметра "**РОД РАБОТЫ**" поставить в режим измерения сопротивлений **"*R*"** ,а переключатель "**ПРЕДЕЛ ИЗМЕРЕНИЙ**"- в положении **10** (сопротивления получатся в килоомах). Значения сопротивлений потерь записать в табл. 10.1.

$R_{\text{потерь }1}$ **= 75** Ом**;** $R_{\text{потерь }2}$ **= 75 + R2** Ом**;**

$R_{\text{потерь }3}$ **= 75 + (*R*2+*R*3+*R*4)** Ом.

11. Рассчитать добротность контура по формуле (2.10.24) для всех трёх случаев. Результаты занести в табл. 10.1.

12. Построить графики зависимости амплитуды напряжения на конденсаторе от частоты вынуждающих колебаний.

13. Сделать вывод о влиянии активного сопротивления на добротность контура и характер резонансных кривых.

Таблица 10.1

Результаты исследования АЧХ контура

№ измерения	$R_{\text{потерь 1}}$ = 75 Ом		$R_{\text{потерь 2}}$ = Ом		$R_{\text{потерь 3}}$ = Ом	
	f, кГц	U_C, В	f, кГц	U_C, В	f, кГц	U_C, В
1						
2						
3						
.						
.						
20						
Резонансное значение	f_1 =	U_{Cm1} =	f_2 =	U_{Cm2} =	f_3 =	U_{Cm3} =
Добротность	Q_1 =		Q_2 =		Q_3 =	

.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется колебательным контуром?
2. Почему в реальном колебательном контуре свободные колебания всегда являются затухающими?
3. В чём заключается явление резонанса?
4. Что такое добротность колебательного контура и от чего она зависит?
5. Какая кривая называется резонансной? Как изменяется её вид при увеличении коэффициента затухания?

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Зисман Г. А., Тодес О. М. Курс общей физики. Т. 2. М.: Наука, 1974. 336 с.

Калашников С. Г. Электричество. Общий курс физики. М.: Наука, 1985. 576 с.