

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2.12 СЛОЖЕНИЕ ОДНОНАПРАВЛЕННЫХ И ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ

### *Цель работы*

Целью работы является практическое ознакомление с физикой гармонических колебаний, исследование процесса сложения гармонических электрических колебаний.

### *Краткая теория*

**Колебанием** называется процесс любой физической природы, характеризующийся повторяемостью во времени.

Повторяемость процесса принято описывать **периодом колебания  $T$**  - минимальным временем за которое физическая величина возвращается в исходное состояние. В дальнейшем будем изучать **гармонические колебания** — то есть такие колебания, которые имеют постоянную амплитуду и описываются функциями синуса или косинуса. Так, колебания электрического напряжения можно описать выражением

$$U = U_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (2.12.1)$$

где  $U_0$  — амплитуда колебаний (максимальное значение колеблющейся физической величины);

$\omega t + \varphi_0 = \varphi$  — мгновенное значение фазы колебания, определяет состояние периодического процесса в текущий момент времени;

$\omega$  — круговая частота, равная изменению фазы колебания за единицу времени ( $\omega = d\varphi / dt$ );

$\varphi_0$  — начальная фаза колебаний, определяет состояние периодического процесса в момент времени  $t = 0$ .

Если начальная фаза колебаний отлична от нуля, то по истечении некоторого времени  $\Delta t$  мгновенное значение фазы ( $\omega t + \varphi_0$ ) обратится в нуль

$$\omega \Delta t + \varphi_0 = 0. \quad (2.12.2)$$

Это равенство позволяет записать формулу для расчёта начальной фазы колебаний

$$\varphi_0 = -\omega \cdot \Delta t = -2\pi \cdot \Delta t / T. \quad (2.12.3)$$

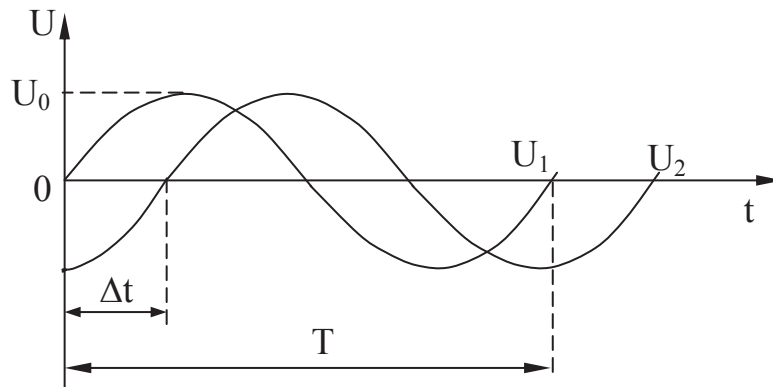


Рис. 2.12.1. Осциллограммы гармонических колебаний.

Как видно, она удобна для практического использования при визуальном наблюдении колебаний — по их осциллограммам. На рисунке 2.12.1 показаны осциллограммы колебаний  $U_1 = U_0 \cdot \sin(\omega t)$  и  $U_2 = U_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$ , имеющих различные фазы колебаний. Запаздывание во времени  $\Delta t$  колебания  $U_2$  относительно колебания  $U_1$  соответствует начальной фазе  $\varphi_0$ , значение которой может быть вычислено по формуле (2.12.3).

Определение периода гармонического колебания позволяет записать взаимосвязь его с частотой колебания  $\omega = 2\pi / T$

Гармонические колебания удобно изображать графически в виде проекций вращающегося вектора на оси декартовой системы координат (рис.2.12.2). В частности, гармоническое колебание, совершающееся по закону косинуса, является проекцией вектора на горизонтальную ось.

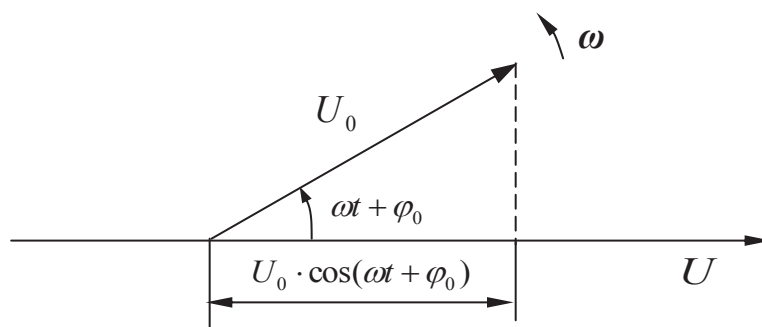


Рис. 2.12.2. Векторная диаграмма гармонического колебания.

Колебательный процесс может возникнуть под воздействием различных независимых друг от друга факторов. В этом случае результирующее колебание определяется по принципу суперпозиции. Для наглядности рассмотрим два характерных случая: сложения однонаправленных и взаимно перпендикулярных колебаний.

### Сложение однонаправленных колебаний

Сложим два колебания одинакового направления и одинаковой частоты, совершаемых по закону косинуса

$$\begin{aligned} U_1 &= U_{01} \cdot \cos(\omega t + \varphi_1); \\ U_2 &= U_{02} \cdot \cos(\omega t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (2.12.4)$$

На рис.2.12.3 показана векторная диаграмма этих колебаний и по правилу сложения векторов изображён вектор результирующего (суммарного) колебания  $U_{рез}$ .

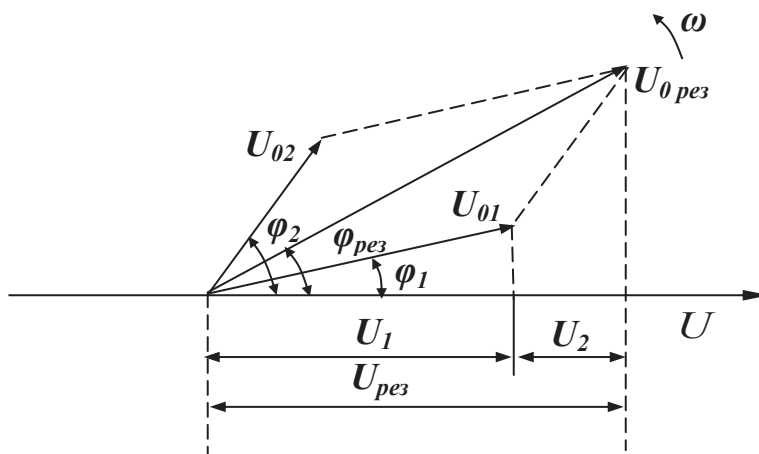


Рис. 2.12.3. Векторная диаграмма сложения гармонических колебаний.

Очевидно, что результирующее колебание тоже будет иметь частоту равную  $\omega$  и может быть записано в виде

$$U_{рез} = U_{0рез} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{рез}). \quad (2.12.5)$$

Воспользовавшись теоремой косинусов, рассчитаем параметры результирующего колебания: его амплитуду и начальную фазу

$$U_{0\text{рез}} = \sqrt{U_{01}^2 + U_{02}^2 + 2U_{01} \cdot U_{02} \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}. \quad (2.12.6)$$

$$\varphi_{\text{рез}} = \arctg \frac{U_{01} \cdot \sin(\varphi_1) + U_{02} \cdot \sin(\varphi_2)}{U_{01} \cdot \cos(\varphi_1) + U_{02} \cdot \cos(\varphi_2)}. \quad (2.11.7)$$

Из (2.12.6), в частности, следует, что амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз складываемых колебаний.

Сложим два колебания одинакового направления с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Пусть  $\omega_2 \gg \omega_1$ . В этом случае за время  $\Delta t$  большее, чем период второго колебания, но значительно меньшее, чем длительность периода первого колебания, можно рассматривать  $U_1$  как некоторую, почти постоянную, составляющую, относительно которой совершаются колебания  $U_2$ . Графически результат сложения показан на рисунке 2.12.4.

Сложим два колебания одного направления с частотами

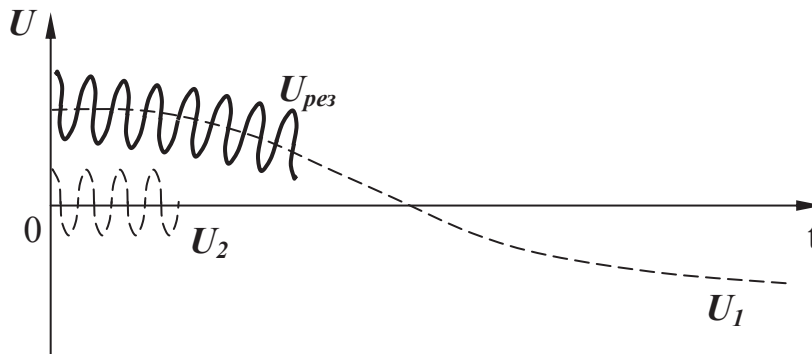


Рис. 2.12.4. Сложение колебаний, сильно отличающихся по частотам

$\omega_1 = \omega$  и  $\omega_2 = \omega + \Delta\omega$ , где  $\Delta\omega \ll \omega$ . Рассмотрим случай, используемый на практике, когда их амплитуды равны. Предположим, что в начальный момент времени значения начальных фаз колебаний равны нулю, тогда

$$U_1 = U_0 \cdot \cos(\omega t);$$

$$U_2 = U_0 \cdot \cos[(\omega + \Delta\omega)t]. \quad (2.12.9)$$

Результат сложения колебаний  $U_1$  и  $U_2$  записывается в виде

$$U_{рез} = \{2U_0 \cdot \cos[(\Delta\omega/2)t]\} \cdot \cos(\omega t). \quad (2.12.10)$$

Сомножитель в фигурных скобках является медленно изменяющейся знакопеременной функцией времени. Поэтому результирующее колебание можно рассматривать как гармоническое с частотой  $\omega$ , амплитуда которого изменяется по закону

$$U_{0рез} = 2U_0 \cdot \cos[(\Delta\omega/2)t]. \quad (2.12.11)$$

Как видно, минимальное значение амплитуды равно  $0$ , а максимальное  $2U_0$ . Результирующее колебание показано на рисунке 2.12.5.

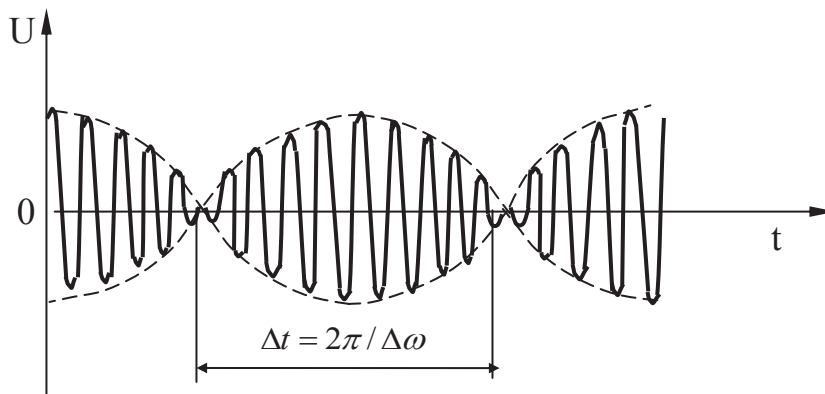


Рис. 2. 12. 5. Сложение колебаний с близкими частотами.

В моменты времени, когда  $U_{0рез}$  обращается в нуль, у гармонического колебания с частотой  $\omega$  наблюдается инверсия фазы. Периодические изменения амплитуды колебания, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами, называются **биениями**. Частота биений  $\Delta\omega/2$  (частота изменения амплитуды) может быть измерена (например, по осциллограмме). Следовательно, складывая колебания, одно из которых имеет известную частоту  $\omega_1$ , а второе неизвестную  $\omega_2$ , можно по частоте биений определить значение  $\omega_2$ . Этот метод измерения частоты нашёл широкое применение на практике.

### Сложение взаимно перпендикулярных колебаний.

Рассмотрим случай, когда на физическую величину воздействуют два фактора, изменяющие её значения во взаимно перпендикулярных направлениях. При этом результирующее колебание будет описывать траекторию, уравнение которой однозначно определяет характеристики получившегося колебания.

Сложим два колебания одинаковой частоты  $\omega$ , происходящие во взаимно перпендикулярных направлениях  $X, Y$

$$\begin{aligned}U_X &= U_{0X} \cdot \cos(\omega t); \\U_Y &= U_{0Y} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)\end{aligned}\quad (2.12.12)$$

Для упрощения дальнейших записей введём следующие обозначения:  $U_X = X$ ;  $U_Y = Y$ ;  $U_{0X} = A$ ;  $U_{0Y} = B$ .

После преобразований запишем уравнения колебаний в виде

$$\begin{aligned}X/A &= \cos(\omega t), \\Y/B &= \cos(\omega t) \cdot \cos(\varphi_0) - \sin(\omega t) \cdot \sin(\varphi_0).\end{aligned}\quad (2.12.13)$$

Уравнение траектории результирующего колебания находится путём исключения параметра времени  $t$  в системе (2.12.13) и представляет собой уравнение эллипса, произвольным образом ориентированного относительно осей  $X$  и  $Y$

$$\frac{X^2}{A^2} - \frac{2XY}{AB} \cdot \cos(\varphi_0) + \frac{Y^2}{B^2} = \sin^2(\varphi_0).\quad (2.12.14)$$

Максимальные значения координат траектории и значения, при которых она пересекает оси координат, позволяют определить сдвиг фаз между двумя колебаниями. Действительно, если в уравнении эллипса приравнять к нулю  $X$  или  $Y$ , то получим расчётные формулы для определения интересующего нас сдвига фазы

$$\frac{Y_0}{B} \sin(\varphi_0) \quad \text{или} \quad \frac{X_0}{A} = \sin(\varphi_0)\quad (2.12.15)$$

где  $Y_0$  и  $X_0$  — координаты пересечения эллипсом осей  $Y$  и  $X$  соответственно. Именно такой метод широко используется на практике. Методика определения сдвига фаз между двумя колебаниями по результирующей траектории показана на рисунке 2.12.6.

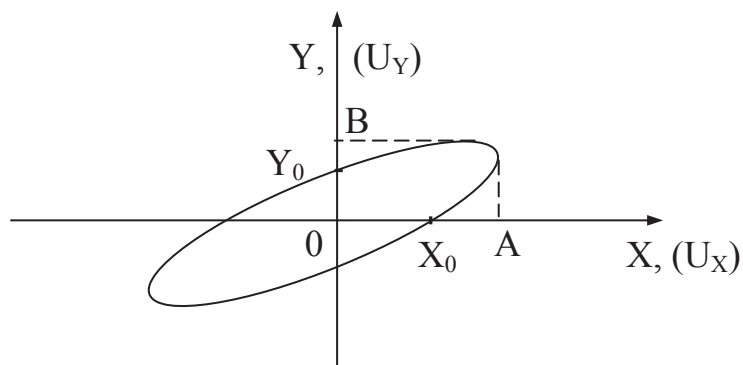


Рис. 2. 12. 6. Определение сдвига фаз по траектории результирующего колебания

Если частоты взаимно перпендикулярных колебаний различны, то траектория результирующего колебания довольно сложна. Такие траектории называются фигурами Лиссажу. Наблюдать фигуры Лиссажу удобно, если частоты колебаний кратны и начальные сдвиги фаз стабильные. В процессе выполнения лабораторной работы вам представится возможность в этом убедиться.

### *Выполнение работы*

#### **Экспериментальная установка**

На рисунке 2.12.7 показана функциональная схема установки, содержащей контрольно-измерительные приборы: двухканальный осциллограф С1—83, генератор периодических сигналов ГЗ-112, комбинированный прибор В7—16А и лабораторный стенд. Генератор гармонических колебаний частотой 50 Гц, устройство, осуществляющее сдвиг фазы и обеспечивающее равные амплитуды выходного и входного колебаний, суммирующее устройство смонтированы в лабораторный стенд.

## Порядок выполнения работы

За 3— 5 минут перед началом работы включите для прогрева контрольно-измерительные приборы и лабораторный стенд.

Исследуйте результат сложения двух однонаправленных колебаний напряжений с одинаковыми частотами.

Источником первого колебания  $U_1 = U_{01} \cdot \cos(\omega t)$  может служить любой генератор сигналов. Желательно, чтобы частота колебаний не превышала 500 Гц. Второе колебание напряжения  $U_2 = U_{02} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$  создаётся устройством сдвига фазы, если на его вход воздействовать колебанием  $U_1$ .

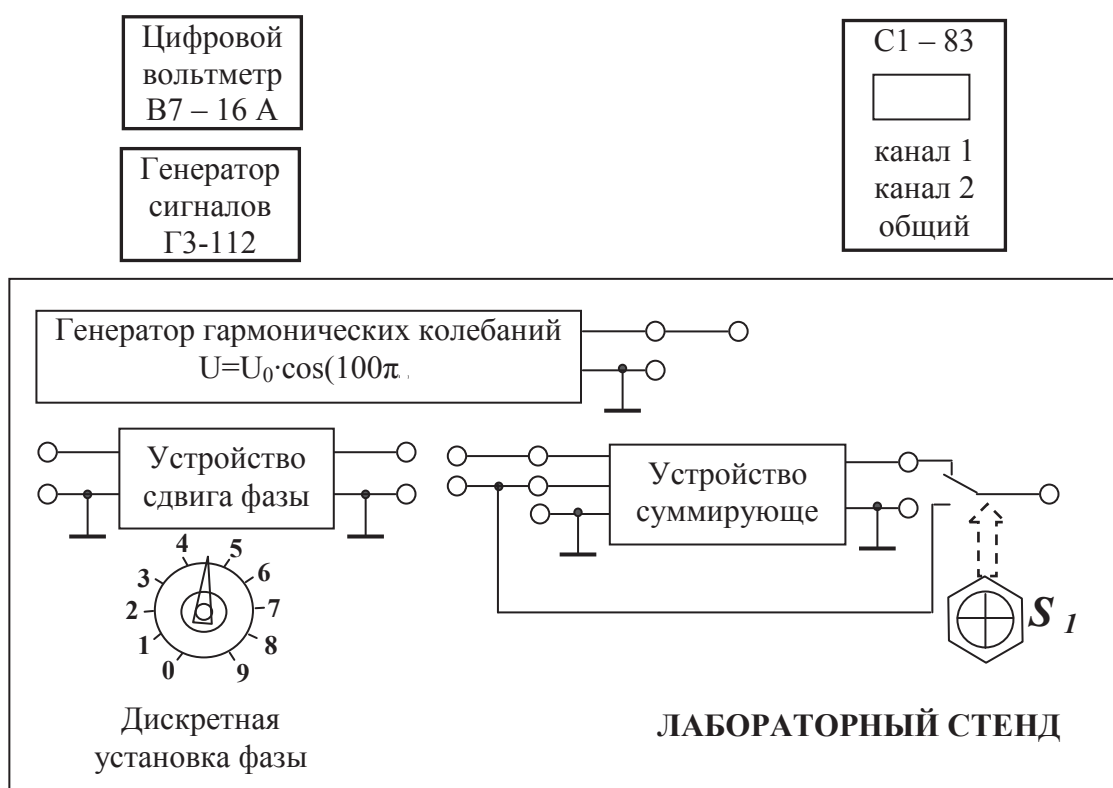


Рис.2.12.7. Схема экспериментальной установки

Для проведения работы соберите экспериментальную установку, функциональная схема которой (N<sup>o</sup>1) изображена на рисунке 2.12.8.

Установите синхронизацию развёртки осциллографа по первому каналу, а на второй канал подайте колебание  $U_2$ . Выберите длительность развёртки, при которой на экране осциллографа наблюдается один (или немногим более) период колебаний  $U_1$  и  $U_2$ . Ручками управления развёрткой по оси Y отсимулируйте



колебания относительно их нулевого значения (нулевого уровня — т.е. горизонтальной оси).

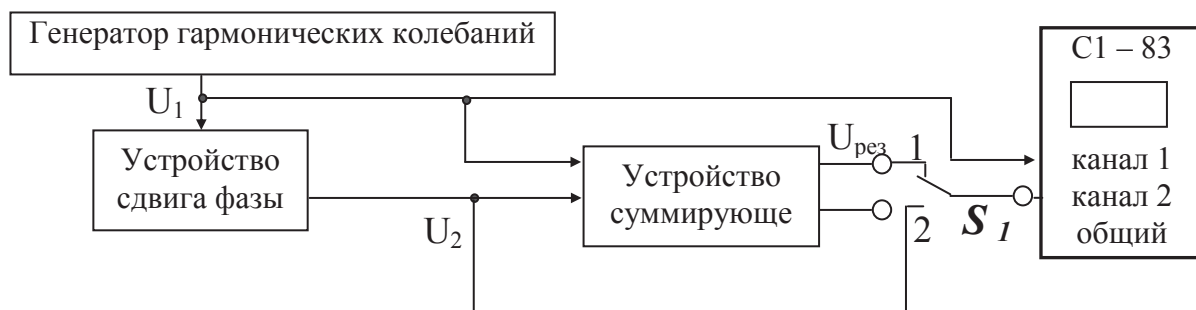


Рис.2.12.8. Функциональная схема установки №1

Установите на стенде переключателем «*дискретная установка фазы*» минимально возможное значение сдвига фазы между колебаниями  $U_1$  и  $U_2$  и измерьте их параметры. Результаты измерений запишите в таблицу 2.12.1. Вход второго канала осциллографа тумблером  $S_1$  подключите к выходу суммирующего устройства и измерьте параметры результирующего колебания. Результаты измерений запишите в таблицу 2.12.1.

Опыт повторите ещё для трёх (три значения выбираются из оставшихся девяти) значений сдвига фазы между колебаниями  $U_1$  и  $U_2$ , аккуратно записывая при этом позиции переключателя «*дискретная установка фазы*» в таблицу 2.12.1.

По результатам измерений параметров колебаний  $U_1$  и  $U_2$  рассчитайте в соответствии с (2.12.6) и (2.12.7) параметры результирующего колебания и полученные значения запишите в таблицу 2.12.1. Постройте векторные диаграммы, отображающие результат сложения колебаний  $U_1$  и  $U_2$ . Сопоставьте экспериментальные и расчётные значения параметров результирующего колебания и запишите вывод.

Таблица 2.12.1

Результаты экспериментальных измерений и расчётов сложения двух однонаправленных колебаний одинаковой частоты

ЭКСПЕРИМЕНТ	N°		.....	.....	9
	позиции переключателя	0			
	$T$ , мс				
	$U_{01}$ , В				
	$U_{02}$ , В				
	$\Delta t$ , мс				
	$\Delta\varphi = -2\pi\Delta t/T$ , рад				
	$U_{рез}$ , В				
	$\Delta t_{рез}$ , мс				
РАСЧЁТ	$\varphi_{рез}$ , рад				
	$U_{рез}$ , В				
	$\varphi_{рез}$ , рад				

Исследуйте результат сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний с одинаковыми частотами.

Объектом исследования является траектория, описываемая на экране осциллографа электронным лучом — потоком электронов, на которые воздействуют взаимные перпендикулярные электростатические поля, создаваемые в электронно-лучевой трубке разностями потенциалов  $U_1=U_{01}.\cos(\omega t)$  и  $U_2=U_{02}.\cos(\omega t+\varphi_0)$ .

Функциональная схема эксперимента остаётся без изменения за исключением режима работы осциллографа, который следует установить кнопками «X-Y» в режим изображения функциональных зависимостей между двумя сигналами. Сигналы  $U_1$  и  $U_2$  подаются на I-й и II-й каналы осциллографа соответственно.

Исследование результата сложения проведите для колебаний  $U_1$  и  $U_2$ , переключатель «дискретная установка фазы» установите в позиции с номерами указанными в таблице 2.12.1.

Отсимметрируйте эллипс относительно осей координат и измерьте его координаты, необходимые для вычисления сдвига

фазы между колебаниями  $U_1$  и  $U_2$ . Полученные значения запишите в таблицу 2.12.2. Затем по формулам (2.12.15) рассчитайте значения сдвигов фаз между колебаниями  $U_1$  и  $U_2$ . Сравните полученные значения со значениями в таблице 2.12.2 и сделайте вывод.

Таблица 2.12.2

Результаты экспериментальных измерений двух взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой частоты

N° позиции переключателя	$U_{\phi_y}$ , В	$U_y$ при $U_x=0$ , В	$\phi_0$ , рад	$U_{\phi_x}$	$U_x$ при $U_y=0$ , В	$\phi_0$ , рад
0						
:						
:						
9						

Исследуйте результат сложения двух взаимно-перпендикулярных колебаний с разными частотами. Для этого, не изменяя режимы работы осциллографа, подключите ко второму входу суммирующего устройства вместо устройства сдвига фазы имеющийся в вашем распоряжении ещё один генератор сигналов. Соотношения между частотами генераторов сигналов можно устанавливать любые. Тумблер  $S_1$  переключить в положение 2 (см. рис. 2.12.8).

При неравных частотах получаются более сложные кривые. При этом если отношение частот не является рациональным числом, то кривая будет не замкнутой (не повторяющейся) и с течением времени заполнит весь прямоугольник, ограниченный колебаниями на экране осциллографа. В случае рационального отношения частот получаются различные кривые, вид которых зависит от величины отношения частот и сдвига начальных фаз.

В силу сложности количественных оценок параметров результирующего колебания, исследования следует провести качественно с зарисовкой эюр напряжения по осциллограммам для случаев, когда частоты колебаний, во-первых, отличаются сильно и, во-вторых, когда они отличаются незначительно.

Исследуйте результат сложения двух однонаправленных колебаний с отличающимися частотами.

Измените схему эксперимента таким образом, чтобы появилась возможность подать на входы суммирующего устройства два колебания от различных источников: от генератора ГЗ–112 и от генератора Л-31. Осциллограф переключить в режим с внутренней синхронизацией. Функциональная схема установки (№ 2) приведена на рисунке 2.12.9.

Сначала проведите эксперимент, когда частота колебания  $U_1$  значительно больше частоты колебания  $U_2$ . Сравните результат с рисунком 2.12.4. Затем, изменяя частоту колебаний  $U_1$ , получите осциллограмму биений с минимально возможной частотой биений.

### **КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Дайте определение гармонических колебаний.
2. Запишите и поясните уравнение гармонических колебаний.
3. На примере сложения двух гармонических колебаний проиллюстрируйте метод векторных диаграмм.
4. Что называется биениями?
5. Как определить сдвиг фаз между двумя одночастотными взаимно перпендикулярными колебаниями по результирующей траектории?
6. Опишите устройство экспериментальной установки, охарактеризуйте назначения приборов.
7. Что называется фигурами Лиссажу?

### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Зисман Г.А., Годес О.М. Курс общей физики. Т.1.- М.: Наука, 1974. —с.269-280.
2. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. — М.: Наука, 1982. — с.198 – 204.