Федеральное агентство по образованию

ГОУ ВПО

„Уральский государственный горный университет”

М. В. Калачева, С. Н. Шитова, М. И. Старцева

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Учебное пособие

для самостоятельной подготовки к практическим занятиям студентов очного обучения всех специальностей по разделу «Электродинамика», ч. II, дисциплины «Физика»

Екатеринбург, 2006

Федеральное агентство по образованию

ГОУ ВПО

„Уральский государственный горный университет”

ОДОБРЕНО
Методической комиссией
Института геологии и геофизики
«_______» ____________2006 г.
Председатель комиссии
____________проф. В.И.Бондарев

М. В. Калачева, С. Н. Шитова, М. И. Старцева

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Учебное пособие для самостоятельного изучения теоретического материала студентами очного и заочного обучения всех специальностей по разделу «Электродинамика» дисциплины «Физика»

Издание УГГУ Екатеринбург, 2006

М 17

Калачева М. В., Шитова С. Н., Старцева М. И.

М 17 ЭЛЕКТРОСТАТИКА: Учебное пособие для самостоятельного изучения теоретического материала студентами очного и заочного обучения всех специальностей по разделу «Электродинамика» дисциплины «Физика». Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2006. 84с.

Предложенный материал содержит программу и вопросы раздела «Электростатика», краткую теорию по вопросам раздела, необходимую для решения задач, задания для самопроверки, подробный разбор типичных задач и задачи для самостоятельного решения с тремя уровнями сложности. Данное учебное пособие предназначено для самостоятельной подготовки студентов к практическим занятиям.

Пособие рассмотрено на заседании кафедры физики 15 мая 2006 года (протокол № 16) и рекомендовано для издания в УГГУ.

Рецензент: В. В. Жаворонкова, канд. геол.- минерал. наук, доцент кафедры физики УГГУ

Введение

Данное учебное пособие подготовлено в соответствии с учебной программой по физике, составленной на основе федерального компонента Государственного стандарта (ЕН. Ф. 03)

Раздел «Электростатика»

Электрический заряд и его свойства. Напряженность и потенциал электростатического поля. Потенциальный характер электростатического поля. Электростатика в вакууме и веществе. Проводники в электростатическом поле. Энергия электрического поля.

Содержание этого раздела представлено в перечне вопросов, которые составляют основу экзаменационных билетов. В зависимости от специальности вопросы к программе могут быть несколько изменены. Знание отмеченных вопросов гарантирует сдачу экзамена на положительную оценку.

Вопросы по программе дисциплины «Физика», раздел «электростатика»

*1. Взаимодействие неподвижных зарядов. Закон Кулона.

*2. Электрическое поле в вакууме. Напряженность электрического поля.

*3. Принцип суперпозиции полей.

*4. Графическое представление поля.

*5. Поток вектора напряженности электростатического поля.

*6. Теорема Остроградского – Гаусса. Применение этой теоремы к расчету полей различных заряженных тел (нить, сфера, плоскость, две плоскости).

*7. Работа сил электростатического поля по перемещению зарядов.

*8. Потенциал. Эквипотенциальные поверхности.

*9. Связь между напряженностью поля и потенциалом.

10. Циркуляция вектора напряженности.

11. Примеры расчета разности потенциалов (сфера, плоскость).

*12. Электрический диполь, его момент. Диполь в однородном и неоднородном электрических полях.

13. Свободные и связанные заряды. Поляризация диэлектриков.

14. Поляризованность. Напряженность поля в диэлектрике. Диэлектрическая восприимчивость, связь ее с диэлектрической проницаемостью.

*15. Проводники в электростатическом поле. Распределение зарядов в проводнике. Поле внутри проводника и у его поверхности.

*16. Электроемкость уединенного проводника.

*17. Взаимная электроемкость двух проводников. Конденсаторы.

*18. Энергия заряженного уединенного проводника, конденсатора.

*19. Энергия электростатического поля. Объемная плотность энергии.

В данном учебном пособия представлены четыре типа самостоятельных работ для студентов:

- ☞ краткое и доступное изложение теоретического материала отдельных вопросов;
- ☞ тесты для самостоятельной проверки студентом усвоения теоретического материала;
- ☞ подробный разбор типичных задач;
- ☞ задачи для дифференцированной самостоятельной работы с тремя уровнями сложности, приведенные в конце пособия.

Проверить правильность выполнения заданий для самопроверки вы можете, сравнив свои ответы с ответами, приведенными на страницах 75 – 81.

Памятка студенту

☝ При изучении каждой темы мы рекомендуем сначала внимательно разобраться с теоретическим материалом по учебнику, проверить свои знания по тестам, разобрать методику решения типичных задач и закрепить свои знания, решая задачи, сгруппированные в конце учебного пособия по уровню сложности: *-второй уровень; **-третий уровень.

☝ Если вас нервируют трудные задачи, то не расстраивайтесь: для начала выберите задачи начального уровня. Решая самые простые задачи, вы постепенно приобретаете уверенность в своих силах.

☝ Помните: только ваша настойчивость, сила воли и желание понять материал помогут вам и вашему преподавателю испытать счастье совместного труда и достичь замечательных результатов.

Желаем творческих успехов в вашей нелегкой самостоятельной учебной деятельности!!!

Электростатика – это раздел физики, который изучает взаимодействие неподвижных зарядов посредством электростатического поля. Каждый заряд создаёт поле независимо от наличия вокруг него других зарядов. Поля всех зарядов действуют друг на друга с силами, которые можно вычислить по закону Кулона.

Если поле создано системой неподвижных зарядов, то для него выполняется **принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции): сила, действующая на заряд со стороны других зарядов, равна геометрической (векторной) сумме всех сил, действующих со стороны каждого заряда в отдельности:**

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \, .$$

Силы взаимодействия зарядов можно рассчитывать двумя способами: по закону Кулона и по соотношению $\vec{F} = q\vec{E}$, получаемому из определения напряжённости электрического поля (2.1). Первый способ рассматривается в главе 1. Второй способ, при котором задача сводится к расчёту электрического поля, будет рассматриваться в главе 2.

1. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НЕПОДВИЖНЫХ ЗАРЯДОВ

1.1. Закон Кулона

Закон Кулона: сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов в вакууме пропорциональна произведению этих зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Сила Кулона является центральной, то есть направлена по линии, соединяющей заряды. Векторная форма записи закона Кулона для среды:

$$\vec{F}_{21} = k\frac{Q_1 Q_2}{\varepsilon r^2}\frac{\vec{r}_{21}}{r} \, . \tag{1.1}$$

Закон Кулона в скалярной форме для среды имеет вид:

$$F = k\frac{Q_1 Q_2}{\varepsilon r^2} \, , \tag{1.2}$$

где $\vec{F}_{21}$ - сила, действующая на заряд Q_2 со стороны заряда Q_1;

$\vec{r}_{21}$ - радиус-вектор, проведённый от первого заряда ко второму;

$r = |\vec{r}_{21}|$ - расстояние между зарядами;

$k = \dfrac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ **м/Ф** - коэффициент пропорциональности в системе СИ;

ε – диэлектрическая проницаемость среды (для воздуха **ε** = 1);

ε_0 = 8,85·10^{-12}Ф/м – электрическая постоянная.

Установлено, что одноименные заряды отталкиваются, а разноименные – притягиваются (рис. 1).

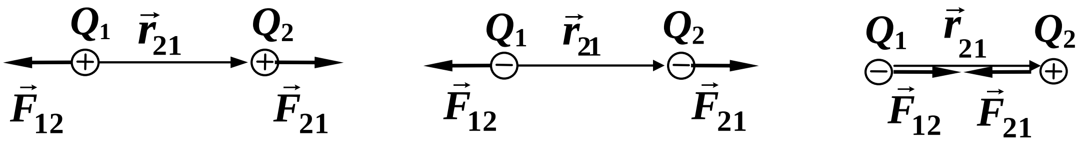


Рис. 1.

Взаимодействие точечных зарядов удовлетворяет III закону Ньютона:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12},$$

то есть силы взаимодействия двух зарядов равны по величине и приложены к каждому из зарядов.

<u>Закон сохранения заряда</u>: суммарный заряд электрически изолированной системы (то есть системы, не обменивающейся зарядами с внешними телами) есть величина неизменная:

$$q_{\Sigma} = \mathrm{const}.$$

Задания для самостоятельной работы к разделу 1.1

1. Два одинаковых маленьких шарика, имеющих заряды **+3*q*** и ***–q***, привели в соприкосновение, а затем раздвинули на некоторое расстояние. Чему равны заряды шариков после соприкосновения?

   а) ***q*** б) **2*q*** в) **4*q*** г) ***q*/2**

2. Два маленьких одинаковых металлических шарика имеют заряды +***q*** и –**5*q***. Шарики привели в соприкосновение, а затем раздвинули на прежнее расстояние. Как изменился модуль силы взаимодействия шариков?

   а) увеличился в 1,8 раза; б) уменьшился в 1,8 раза;
   в) увеличился в 1,25 раза; г) уменьшился в 1,25 раза;
   д) не изменился.

3. Как надо изменить расстояние между точечными положительными зарядами, чтобы при уменьшении каждого из них в 4 раза сила их взаимодействия не изменилась?

а) уменьшить в 16 раз; б) увеличить в 16 раз;
в) уменьшить в 4 раза; г) увеличить в 4 раза;
д) увеличить в 2 раза.

4. Как и во сколько раз изменится сила взаимодействия двух точечных разноименных электрических зарядов, если положительный заряд уменьшить в 2 раза, а отрицательный – увеличить в 4 раза?

а) уменьшится в 2 раза; б) увеличится в 2 раза;
в) увеличится в 8 раз; г) уменьшится в 8 раз;
д) увеличится в 4 раза.

Выполнив задания для самостоятельной работы, перейдем к разбору основных типов задач о взаимодействии зарядов.

Основные типы задач:

- вычисление равнодействующей силы при взаимодействии точечных зарядов (раздел 1.2);
- нахождение неизвестной величины при условии равновесия зарядов (раздел 1.3);
- взаимодействие зарядов, равномерно распределённых на линии, на поверхности и в объёме (раздел 1.4).
-

1.2. Расчет равнодействующей силы системы неподвижных точечных зарядов

Пусть на заряд $\boldsymbol{Q}$ действуют несколько сил со стороны других зарядов. Для того чтобы определить результирующую силу $\vec{F}_{рез}$, действующую на этот заряд, нужно узнать её **направление** и **модуль**.

Направление результирующей силы $\vec{F}_{рез}$ определяется **по принципу суперпозиции** сил (векторной суммы), а модуль – из геометрических построений.

Рекомендуемая последовательность решения задач:

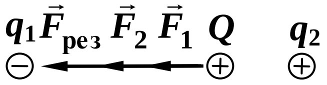
1) сделать рисунок, на котором, в соответствии с условием задачи, указать расположение всех зарядов;

2) построить силы, действующие со стороны каждого заряда на заряд $\boldsymbol{Q}$ с учётом знаков всех зарядов (см. рис. 2). Все силы должны быть приложены к точке, в которой расположен заряд $\boldsymbol{Q}$ (то есть начинаться в этой точке) и направлены по линии, соединяющей заряды;
3) построить векторную сумму всех сил (по правилу треугольника или параллелограмма, если силы по результатам построений **не** лежат на одной прямой). Таким образом, мы определим **направление** вектора результирующей силы;
4) **модуль** равнодействующей силы вычисляется в зависимости от расположения и величины составляющих её сил, каждая из которых рассчитывается по закону Кулона.

Например, для системы, состоящей из трех зарядов,

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

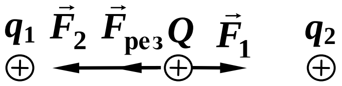
При расчете модуля результирующей силы по результатам построения возможны четыре варианта (рис. 2, а, б, в, г):



а)

а) векторы составляющих сил направлены в одну сторону. Модуль определяется как алгебраическая сумма сил:

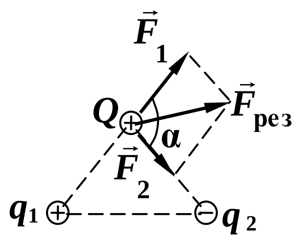
$$F = F_1 + F_2;$$



б)

б) векторы составляющих сил направлены в разные стороны. Модуль определяется как алгебраическая разность сил:

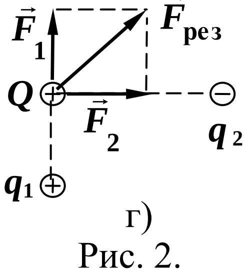
$$F = F_1 - F_2;$$



в)

в) векторы составляющих сил образуют между собой угол $\boldsymbol{\alpha}$. Модуль определяется по теореме косинусов:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha};$$



г)

Рис. 2.

г) векторы составляющих сил перпендикулярны друг другу. Модуль определяется по теореме Пифагора (частный случай теоремы косинусов):

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}.$$

Задания для самостоятельной работы к разделу 1.2

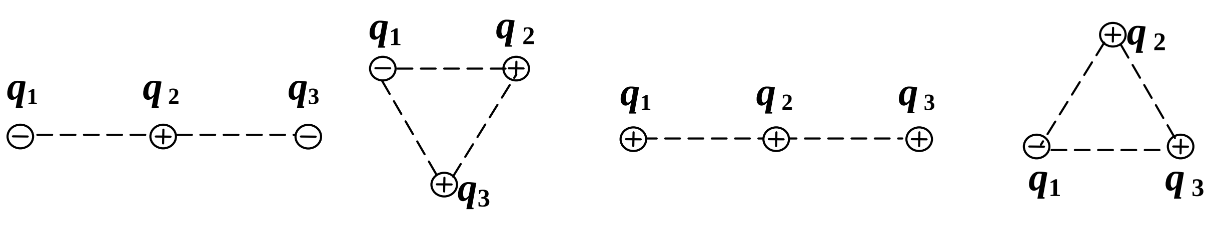
1. Как ведет себя положительный заряд $+q_1$, помещенный в поле неподвижного отрицательного заряда $-q_2$:

   а) движется с постоянной скоростью к q_2;
   б) движется равноускоренно к заряду q_2;
   в) движется равнозамедленно к заряду q_2;
   г) остается в покое.

2. Если отрицательный точечный заряд, находящийся посередине между точечными зарядами q и $2q$, заменить на противоположный по знаку заряд, как изменится модуль и направление результирующей силы?

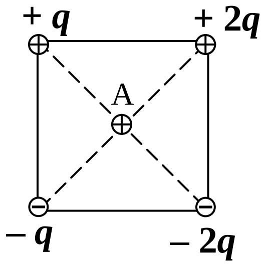
   а) модуль силы не меняется, направление меняется на противоположное;
   б) модуль силы уменьшается в 2 раза, направление меняется на противоположное;
   в) модуль силы равен нулю;
   г) модуль силы увеличится в 2 раза, направление не меняется;
   д) модуль силы увеличится в 3 раза, направление не меняется.

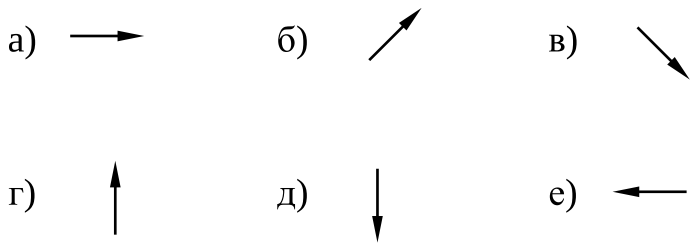
3. Как направлена равнодействующая сила на заряд q_3 со стороны зарядов q_1 и q_2 ($|q_1| = |q_2|$ расстояния между зарядами одинаковые):



а) б) в) г)

4. Как направлена сила, действующая на положительный точечный заряд, расположенный в центре квадрата?





Примеры решения задач

Задача 1.1. В вершинах равностороннего треугольника со стороной $\boldsymbol{a}$ расположены два положительных и один отрицательный заряды, одинаковых по величине и равных $\boldsymbol{q}$. Найти силу, действующую на заряд $\boldsymbol{Q_0} < 0$, расположенный на пересечении медиан.

Решение. Сделаем рисунок, произвольно расположив заряды в вершинах треугольника. Расставим силы, действующие на заряд $\boldsymbol{Q_0}$ со стороны зарядов $\boldsymbol{q_1}$, $\boldsymbol{q_2}$, и $\boldsymbol{q_3}$, и обозначим их соответственно $\vec{\boldsymbol{F}}_1$, $\vec{\boldsymbol{F}}_2$ и $\vec{\boldsymbol{F}}_3$ (рис. 3, а).

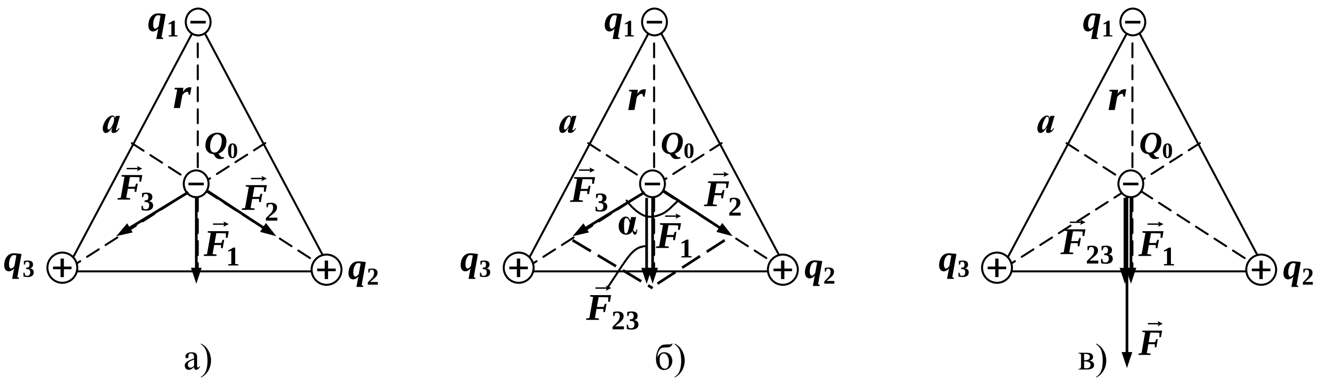


Рис. 3.

Направление результирующей силы по определяем по принципу суперпозиции:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{F}}_1 + \vec{\boldsymbol{F}}_2 + \vec{\boldsymbol{F}}_3 .$$

Для этого необходимо сложить три вектора. Так как величина зарядов $\boldsymbol{q_1}$, $\boldsymbol{q_2}$ и $\boldsymbol{q_3}$ одинакова и они равноудалены от заряда $\boldsymbol{Q_0}$, то силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$ будут одинаковы по модулю.

Из рисунка видно, что сначала удобно сложить векторы $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$ по правилу параллелограмма (рис. 3 б).

$$\vec{F}_{23} = \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

Модуль вектора $\vec{F}_{23}$ определим по теореме косинусов

$$F_{23} = \sqrt{F_2^2 + F_3^2 + 2F_2F_3\cos\alpha},$$

где $\boldsymbol{\alpha}$ – угол между векторами $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$.

С учётом того, что $\left|\vec{F}_2\right| = \left|\vec{F}_3\right|$, $\boldsymbol{\alpha}$ = 120°; $\cos\alpha = -0{,}5$, получим:

$$F_{23} = \sqrt{F_2^2 + F_2^2 + 2F_2F_2(-0{,}5)} = F_2\sqrt{1+1+2(-0{,}5)} = F_2.$$

Теперь нужно сложить векторы $\vec{F}_{23}$ и $\vec{F}_1$. (рис. 3 в). Из рисунка видно, что эти векторы направлены в одну сторону, значит, их векторная сумма равна их алгебраической сумме. С учётом того, что $\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2\right|$, модуль результирующей силы

$$F = F_1 + F_2 = 2F_1.$$

По закону Кулона

$$F_1 = k\frac{qQ_0}{r^2}.$$

☝☝☝ **<u>Обратите внимание</u>**, что в законе Кулона все заряды пишутся со знаком «+», так как знак заряда учитывался при геометрических построениях.

Расстояние $\boldsymbol{r}$ выразим из рисунка через сторону треугольника $\boldsymbol{a}$:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2r} \Rightarrow r = \frac{a}{2\sin(\alpha/2)} = \frac{a}{2\sin 60°} = \frac{a}{2\sqrt{3}/2} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Окончательно получим:

$$F = 2k\frac{qQ_0}{a^2/3} = 6k\frac{qQ_0}{a^2}.$$

<u>Задача 1.2.</u> В вершинах правильного шестиугольника со стороной $\boldsymbol{a}$ расположены точечные заряды $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{2q}$, $\boldsymbol{3q}$, $\boldsymbol{4q}$, $\boldsymbol{5q}$, $\boldsymbol{6q}$. Найти силу, действующую на заряд $\boldsymbol{Q_0} > 0$, расположенный на пересечении диагоналей.

Решение. Сделаем рисунок, произвольным образом расположив заряды в вершинах шестиугольника. Если все заряды одноимённые, то между зарядом $\boldsymbol{Q_0}$ и остальными зарядами действует сила отталкивания. Расставим силы, действующие на заряд $\boldsymbol{Q_0}$ со стороны каждого заряда, и обозначим их соответствующими индексами (рис. 4, а).

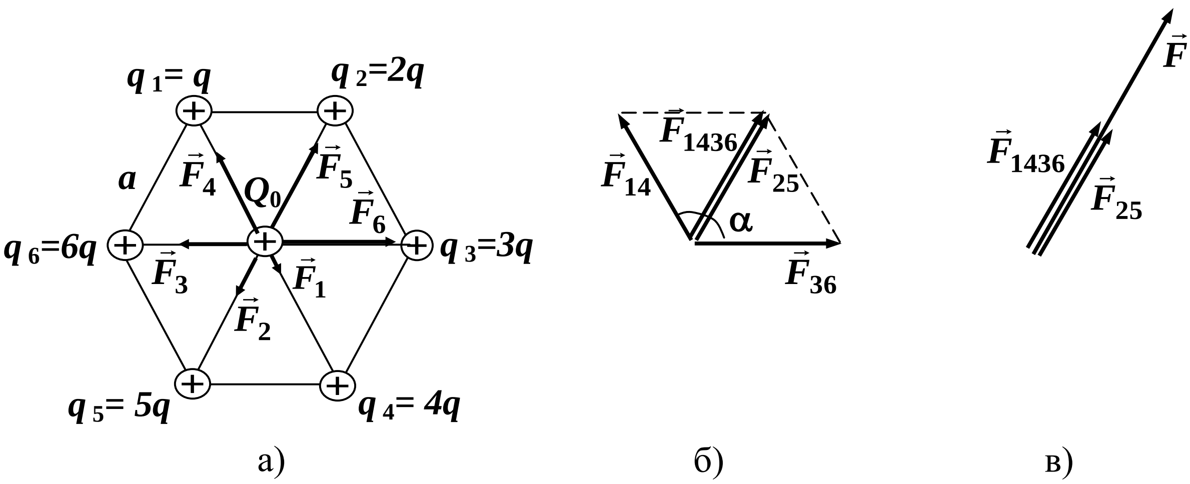


Рис. 4.

По закону Кулона

$$\boldsymbol{F_1 = k\frac{qQ_0}{a^2}}; \qquad \boldsymbol{F_2 = k\frac{2qQ_0}{a^2} = 2F_1};$$

$$\boldsymbol{F_3 = k\frac{3qQ_0}{a^2} = 3F_1}; \qquad \boldsymbol{F_4 = k\frac{4qQ_0}{a^2} = 4F_1};$$

$$\boldsymbol{F_5 = k\frac{5qQ_0}{a^2} = 5F_1}; \qquad \boldsymbol{F_6 = k\frac{6qQ_0}{a^2} = 6F_1}.$$

По принципу суперпозиции

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{F}}_1 + \vec{\boldsymbol{F}}_2 + \vec{\boldsymbol{F}}_3 + \vec{\boldsymbol{F}}_4 + \vec{\boldsymbol{F}}_5 + \vec{\boldsymbol{F}}_6.$$

Сначала сложим попарно силы, лежащие на одной прямой (рис. 4 б). Так как эти силы направлены в разные стороны, то модули равнодействующих сил равны алгебраической разности этих сил.

Равнодействующая сил $\boldsymbol{F_1}$ и $\boldsymbol{F_4}$ равна $\boldsymbol{F_{14} = F_4 - F_1 = 3F_1}$ и направлена в сторону большей силы, то есть в сторону $\boldsymbol{F_4}$. Равнодействующая сил $\boldsymbol{F_2}$ *и* $\boldsymbol{F_5}$ равна $\boldsymbol{F_{25} = F_5 - F_2 = 3F_1}$ и направлена в сторону $\boldsymbol{F_5}$. Наконец, равнодействующая сил $\boldsymbol{F_3}$ *и* $\boldsymbol{F_6}$ равна $\boldsymbol{F_{36} = F_6 - F_3 = 3F_1}$ и направлена в сторону $\boldsymbol{F_6}$.

Мы видим, что векторы равнодействующих сил одинаковы. Теперь сложим векторы $\vec{F}_{14}$ и $\vec{F}_{36}$ (см. задачу 1.1):

$$\vec{F}_{1436} = \vec{F}_{14} + \vec{F}_{36}.$$

По теореме косинусов

$$F_{1436} = \sqrt{F_{14}^2 + F_{36}^2 + 2F_{14}F_{36}\cos\alpha}.$$

С учётом того, что $\left|\vec{F}_{14}\right| = \left|\vec{F}_{36}\right|$, α = 120°; $\cos\alpha$ = – 0,5, получим:

$$F_{1436} = \sqrt{F_{14}^2 + F_{14}^2 + 2F_{14}F_{14}(-0{,}5)} = F_{14}\sqrt{1+1+2(-0{,}5)} = F_{14} = 3F_1.$$

Теперь осталось сложить векторы $\vec{F}_{1436}$ и $\vec{F}_{25}$ (рис. 4 в). Так как векторы сонаправлены и одинаковы по модулю, то окончательно получим:

$$F = F_{1436} + F_{25} = 3F_1 + 3F_1 = 6F_1 = 6k\frac{qQ_0}{a^2}.$$

1.3. Равновесие зарядов при действии нескольких сил

Если по условию задачи заряд находится в равновесии, это значит, что векторная сумма сил, действующих на заряд, равна нулю. В зависимости от условия задачи, это могут быть силы Кулона, сила тяжести, сила Архимеда и т. д.

Рекомендуемая последовательность решения задач:

1) сделать рисунок, на котором указать расположение всех зарядов;
2) построить векторную сумму всех сил, действующих на заряд;
3) записать I закон Ньютона в векторном виде: $\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{F}_i = 0$;
4) выбрать направление осей координат и разложить все силы на составляющие;
5) записать I закон Ньютона в проекциях на каждую ось;
6) выразить искомую величину.

Примеры решения задач

<u>Задача 1.3.</u> Расстояние между двумя разноимёнными точечными зарядами $q_1 = +q$ и $q_2 = -2q$ равно r. На каком расстоянии от первого заряда r_1 на линии, соединяющей эти заряды, нужно поместить третий заряд Q, чтобы он находился в равновесии?

<u>Решение.</u> Сделаем рисунок и проанализируем задачу.

Заряд Q может располагаться в одной из трёх областей (рис. 5 а): I – слева от заряда q_1; II – между зарядами q_1 и q_2; III – справа от заряда q_2.

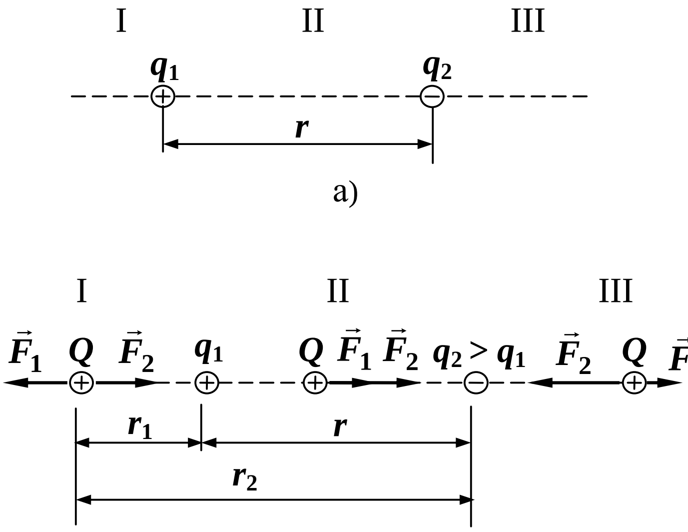


Рис. 5.

Пусть $Q > 0$.

Поместим заряд Q поочерёдно в каждую из этих областей, расставим силы, действующие на этот заряд, и методом исключения отбросим области, где не выполняется I закон Ньютона (рис. 5, б).

На заряд Q со стороны зарядов q_1 и q_2 действуют силы с соответствующими индексами $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$.

Запишем I закон Ньютона в векторном виде:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0\,.$$

Чтобы он выполнялся, векторы сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ должны быть ***одинаковы по модулю и противоположны по направлению***.

Из рисунка видно, что в области II силы направлены в одну сторону, поэтому здесь равновесие невозможно.

В областях I и III силы направлены в разные стороны, т. е. равновесие теоретически возможно.

Теперь проанализируем модули векторов $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Из закона Кулона (1.2) следует, что модуль силы зависит от величины заряда и от расстояния до него. Любая точка в области III находится ближе к бóльшему заряду q_2, следовательно, сила F_2 в этой области всегда будет больше, чем F_1, поэтому в этой области равновесие тоже невозможно.

Остаётся область I. Для неё запишем в скалярном виде:

$$F_1 - F_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_1 = F_2.$$

По закону Кулона:

$$F_1 = k\frac{q_1 Q}{r_1^{\ 2}} = k\frac{q\ Q}{r_1^{\ 2}}; \qquad F_2 = k\frac{q_2 Q}{r_2^{\ 2}} = k\frac{2q\ Q}{r_2^{\ 2}}.$$

Приравнивая правые части с учётом того, что $r_2 = r + r_1$, получим:

$$k\frac{q\ Q}{r_1^{\ 2}} = k\frac{2q\ Q}{(r_1 + r)^2} \text{ или } \frac{1}{r_1^{\ 2}} = \frac{2}{(r_1 + r)^2}.$$

Произведём необходимые математические преобразования:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{\sqrt{2}}{r_1 + r}; \quad r_1\sqrt{2} = r_1 + r; \quad r_1\sqrt{2} - r_1 = r; \quad r_1(\sqrt{2} - 1) = r.$$

Окончательно получим:

$$r_1 = \frac{r}{\sqrt{2} - 1}.$$

Если заряд Q будет отрицательный, то поменяются направления сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, но результат от этого не изменится.

Задача 1.4. Два одинаковых шарика подвешены на нитях одинаковой длины, закреплённых в одной точке. После сообщения шарикам заряда $+q_0$ они оттолкнулись и разошлись на угол 2α. Найти массу каждого шарика и силу натяжения нити, если расстояние от центра шарика до точки подвеса равно ℓ.

Решение. Так как шарики одинаковы и находятся в одинаковых условиях, то достаточно рассмотреть силы, действующие на один из шариков (рис. 6). На каждый шарик действует сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила электрического взаимодействия (отталкивания) $\vec{F}_{эл}$.

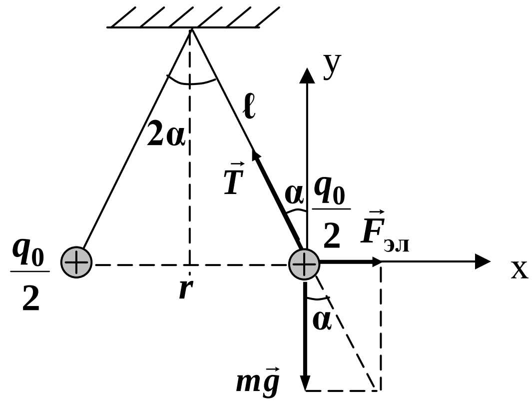


Рис. 6.

Так как шарики находятся в равновесии, то по первому закону Ньютона:

$$\vec{F}_{\text{эл}} + \vec{T} + m\vec{g} = 0.$$

Выберем произвольно направления осей *ox* и *oy* и найдём проекции всех сил на эти направления. Запишем I закон Ньютона в проекциях на выбранные направления:

$$\begin{cases} ox: \quad F_{\text{эл}} - T\sin\alpha = 0; \\ oy: \quad -mg + T\cos\alpha = 0. \end{cases}$$

Получили систему из двух уравнений с двумя неизвестными. Решая эту систему, найдём искомые величины.

Из первого уравнения выразим силу натяжения нити:

$$T = \frac{F_{\text{эл}}}{\sin\alpha}.$$

По закону Кулона

$$F_{\text{эл}} = k\frac{q_1 q_2}{r^2},$$

где $q_1 = q_2 = \dfrac{q_0}{2}$ – заряд каждого шарика. Так как шарики одинаковы, то заряды тоже одинаковы (по закону сохранения заряда).

Из рисунка выразим расстояние между шариками:

$$r = 2\ell\sin\alpha.$$

Окончательно получим:

$$T = \frac{kq_0^2}{16\ell^2\sin^3\alpha}.$$

Чтобы найти массу, преобразуем систему к следующему виду:

$$\begin{cases} F_{\text{эл}} = T\sin\alpha; \\ mg = T\cos\alpha. \end{cases}$$

Поделив почленно первое уравнение на второе, получим:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{F_{\text{эл}}}{mg} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{F_{\text{эл}}}{g\cdot\mathrm{tg}\alpha} = \frac{kq_0^2}{16\ell^2 g\sin^2\cdot\mathrm{tg}\alpha}.$$

<u>Задача 1.5.</u> Положительно заряженный шар плотностью $\rho_ш$ и радиусом R помещён в жидкость плотностью $\rho_ж$. Найти заряд шара, если в однородном электростатическом поле напряжённостью E, направленном вертикально вверх, он оказался взвешенным в жидкости.

<u>Решение.</u> На шар действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вниз, выталкивающая сила Архимеда $\vec{F}_{арх}$, направленная вверх, и электростатическая сила $\vec{F}_{эл}$, которая совпадает с направлением напряжённости $\vec{E}$ (рис. 7). Так как шар находится в состоянии равновесия, то для него выполняется I закон Ньютона:

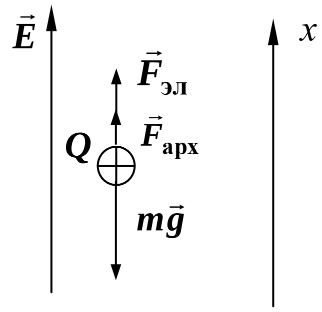


Рис. 7.

$$m\vec{g} + \vec{F}_{эл} + \vec{F}_{арх} = 0.$$

Выберем произвольно направление оси x, на которую будем проецировать силы.

Запишем I закон Ньютона в проекциях на выбранное направление:

$$F_{арх} + F_{эл} - mg = 0.$$

Подставим в эту формулу выражения для сил:

$$F_{арх} = \rho_ж g V = \rho_ж g \frac{4}{3}\pi R^3;$$

$$\vec{F}_{эл} = Q\vec{E}.$$

Выразим массу шара через его плотность и объём:

$$m = \rho_ш V = \rho_ш \frac{4}{3}\pi R^3.$$

После математических преобразований получим:

$$\rho_ж g \frac{4}{3}\pi R^3 + QE - \rho_ш \frac{4}{3}\pi R^3 g = 0 \Rightarrow \quad Q = \frac{4}{3}\frac{\pi R^3(\rho_ш - \rho_ж)}{E}.$$

Предлагаем проанализировать случаи, когда поле направлено вертикально вниз.

1.4. Взаимодействие зарядов, равномерно распределённых на линии, на поверхности и в объёме

Если один из зарядов, например $\boldsymbol{Q_1}$, не является точечным, но равномерно распределён по линейным, сферическим или плоским поверхностям, то для определения силы взаимодействия по закону Кулона необходимо:

1. Разбить тело, на котором находится этот заряд, на бесконечно малые элементы $\boldsymbol{dQ_1}$, каждый из которых может считаться точечным зарядом и применить к ним закона Кулона в дифференциальном виде:

$$dF = k\frac{dQ_1 Q_2}{r^2}.$$

2. Просуммировать (проинтегрировать) все элементарные силы

$$\vec{F} = \int d\vec{F}\ .$$

При этом надо учитывать направления складываемых векторов $d\vec{F}$.

- Если все они направлены одинаково, то геометрическую сумму можно заменить арифметической. Тогда получим:

$$F = \int dF\ ,$$

где интегрирование производится по всей длине, площади или объёму.

- В том случае, когда складываемые векторы $d\vec{F}$ имеют различные направления, то выбирают координатные оси *x, y, z*, затем суммируют (интегрируют) проекции dF_x, dF_y, dF_z всех элементарных векторов сил $d\vec{F}$ на эти оси, получая тем самым проекции искомого вектора $\vec{F}$, то есть

$$F_x = \int dF_x,\ F_y = \int dF_y,\ F_z = \int dF_z,$$

его модуль вычисляется по формуле:

$$\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\ .$$

При решении задач часто используются формулы линейной, поверхностной и объёмной плотности заряда.

***Линейная плотность заряда* τ** – СФВ, характеризующая распределение электрического заряда по длине заряженных тел, численно равная заряду, находящемуся на единице длины:

$$\tau = \frac{dQ}{d\ell}. \tag{1.3}$$

***Поверхностная плотность заряда* σ** – СФВ, характеризующая распределение электрического заряда по поверхности заряженных тел, численно равная заряду, распределённому на поверхности единичной площади:

$$\sigma = \frac{dQ}{dS}. \tag{1.4}$$

***Объёмная плотность заряда* ρ** – СФВ, характеризующая распределение электрического заряда по объёму тела, численно равная заряду, распределённому в единице объёма:

$$\rho = \frac{dQ}{dV}. \tag{1.5}$$

Силу взаимодействия точечного заряда с поверхностно или объёмно заряженными телами удобно рассчитывать по формуле

$$\vec{F} = q\vec{E},$$

где напряжённость электростатического поля рассчитывается с помощью теоремы Остроградского – Гаусса (раздел 2.2.2).

Примеры решения задач

Задача 1.6. Тонкий прямой стержень длиной ℓ равномерно заряжен с линейной плотностью $\boldsymbol{\tau}$. На продолжении оси стержня на расстоянии $\boldsymbol{a}$ от ближайшего конца находится точечный заряд $\boldsymbol{q_0}$. Определить силу взаимодействия стержня и заряда.

Решение. Определить силу взаимодействия двух зарядов по закону Кулона по выражению (1.2) нельзя. Этот закон справедлив лишь для точечных зарядов, а заряд, распределённый по стержню, нельзя считать точечным.

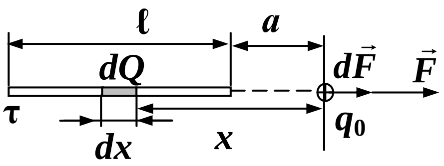


Рис. 8.

Чтобы применить закон Кулона, рассмотрим бесконечно малый элемент длины $\boldsymbol{dx}$ стержня, находящийся на расстоянии $\boldsymbol{x}$ от заряда $\boldsymbol{q_0}$ (рис. 8). Заряд этого элемента, согласно формуле (1.4):

$$dQ = \tau \cdot dx\,.$$

По закону Кулона на заряд $\boldsymbol{q_0}$ со стороны заряда $\boldsymbol{dQ}$ будет действовать сила

$$dF = k\frac{q_0 dQ}{x^2} = k\frac{q_0 \tau \cdot dx}{x^2}.$$

Со стороны всех остальных бесконечно малых элементов стержня на заряд $\boldsymbol{q_0}$ также будут действовать элементарные силы, направленные в ту же сторону, что и $d\vec{F}$. Поэтому, чтобы найти результирующую силу, можно сложить (проинтегрировать) модули элементарных сил.

Пределы интегрирования (расстояние от заряда $\boldsymbol{q_0}$ до каждого элемента длины $\boldsymbol{dx}$ стержня) изменяются от $\boldsymbol{a}$ до $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{\ell})$.

Искомая сила

$$F = \int dF = \int_a^{a+\ell} k\frac{q_0\tau \cdot dx}{x^2} = kq_0\tau \int_a^{a+\ell} \frac{dx}{x^2} = kq_0\tau\left(-\frac{1}{x}\Bigg|_a^{a+\ell}\right) = kq_0\tau\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+\ell}\right)$$

.

2. ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

2.1. Напряжённость электростатического поля

Взаимодействие между неподвижными зарядами осуществляется через электрическое поле, которое называется ***электростатическим.***

Электростатическое поле считается полностью задано, если известна его напряжённость в любой точке.

<u>Напряжённость электростатического поля</u> – ВФВ, являющаяся силовой характеристикой электрического поля и численно равная силе, действующей на единичный, положительный точечный заряд, помещённый в данную точку поля, и направленная так же, как и сила, приложенная к положительному точечному заряду:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_0}. \qquad (2.1)$$

Единицы измерения напряженности [E] = В/м = Н/Кл.

Как следует из формул (2.1) и (1.2), напряжённость электростатического поля точечного заряда

$$E = k\frac{Q}{\varepsilon r^2}, \qquad (2.2)$$

где Q – заряд, создающий поле,

r – расстояние от заряда до заданной точки.

Если поле задано системой зарядов, то для него справедлив **<u>принцип суперпозиции</u> (наложения) электростатических полей: напряжённость результирующего поля, создаваемого системой зарядов, равна геометрической сумме напряжённостей полей, создаваемых в данной точке каждым из зарядов в отдельности:**

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i\,. \qquad (2.3)$$

Из формулы (2.1) следует:

$$\vec{F} = \vec{E}\,q,$$

то есть, зная напряжённость, можно рассчитать силу, действующую на произвольный заряд, помещенный в заданную точку поля.

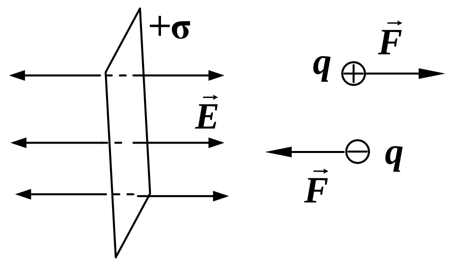


Рис. 9.

Если вносимый в поле напряженностью $\vec{E}$ заряд $q > 0$, то направление силы $\vec{F}$, действующей на него, и напряженности $\vec{E}$ совпадают, а если $q < 0$, то сила $\vec{F}$ направлена в сторону, противоположную $\vec{E}$ (рис. 9).

Графически электростатическое поле изображают с помощью ***силовых линий.***

Силовые линии напряжённости – линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора $\vec{E}$. Линии напряжённости никогда не пересекаются.

Густота линий пропорциональна модулю вектора напряжённости, направление линий принято ***от*** положительного заряда ***к*** отрицательному (рис. 10, а).

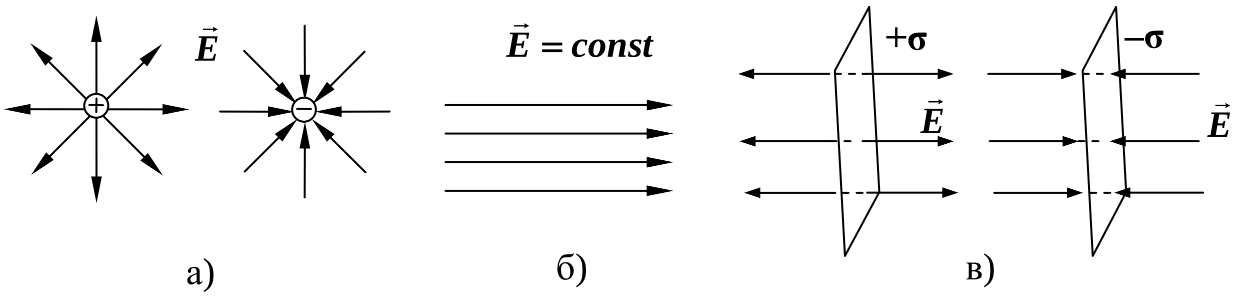


Рис. 10.

Простейшим электростатическим полем является о***днородное*** поле – поле, в любой точке которого вектор $\vec{E}$ одинаков и по модулю и по направлению (рис. 10, б). Однородным является поле равномерно заряженной плоскости, двух плоскостей (рис. 10, в).

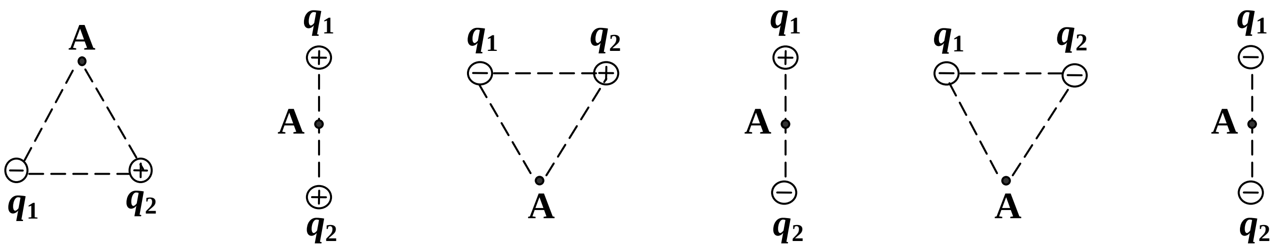
Задания для самостоятельной работы к разделу 2.1

1. Определить направление напряженности поля двух точечных зарядов в точке А, равноудаленной от них ($|\boldsymbol{q_1}| = |\boldsymbol{q_2}|$).

а) $\uparrow$ б) $\downarrow$ в) $\rightarrow$

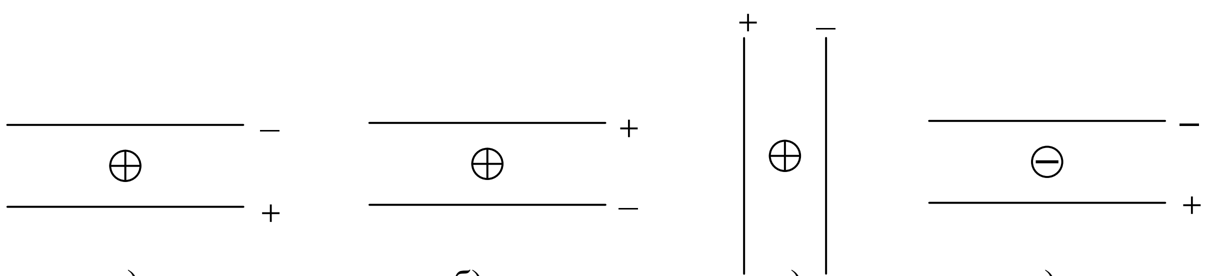
г) $\leftarrow$ д) $\nearrow$ е) $\vec{E} = 0$

2. На каком из рисунков напряженность результирующего поля $\vec{E}$ в точке А направлена вертикально вверх, если расстояние между зарядами одинаково ($|q_1| = |q_2|$)?



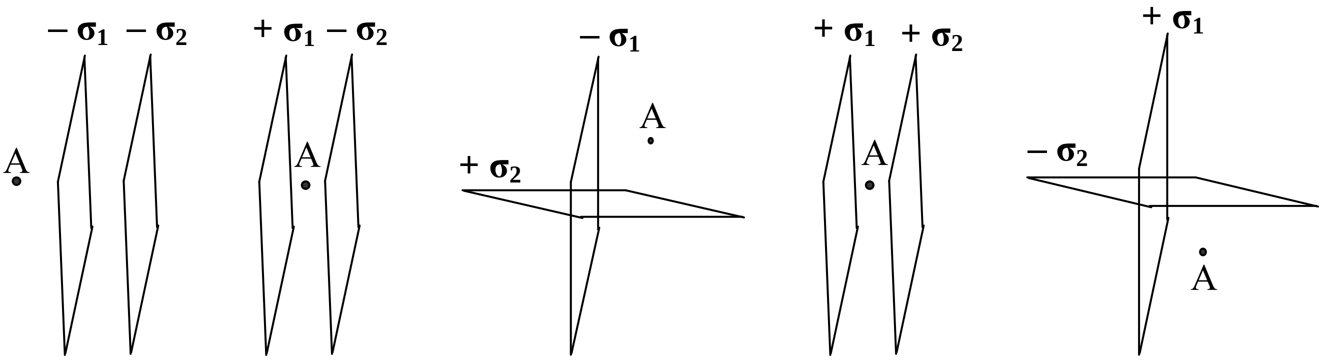
а) б) в) г) д) е)

3. На каком из рисунков заряженная пылинка массой $\boldsymbol{m}$ может находиться в равновесии?



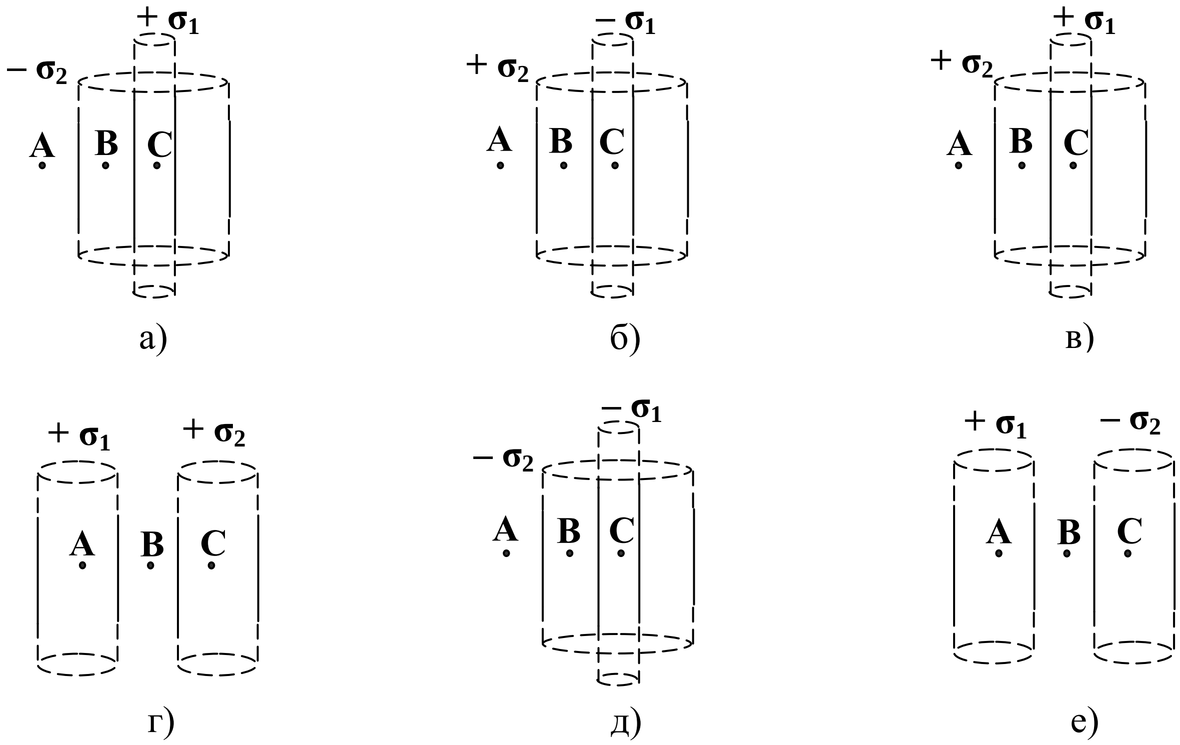
а) б) в) г)

4. Поле создано двумя заряженными бесконечно длинными плоскостями ($|\boldsymbol{\sigma_1}| = |\boldsymbol{\sigma_2}|$). В каком случае напряженность электростатического поля в точке А равна нулю? Выполнить построения и объяснить.



а) б) в) г) д)

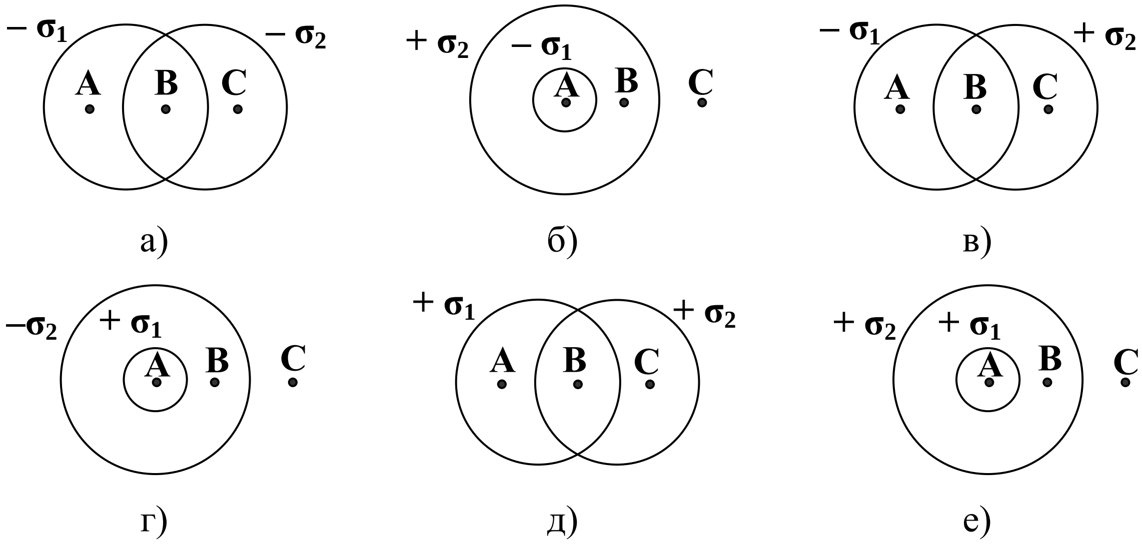
5. Поле создано двумя заряженными бесконечно длинными полыми цилиндрами. Определить направления напряженности результирующего поля в точках А, В, С.



а) б) в)

г) д) е)

6. Поле создано равномерно заряженными концентрическими и пересекающимися сферами. Определить направление напряженности результирующего поля в точках А, В, С.



2.2. Поток вектора напряженности. Теорема Остроградского – Гаусса

Линии напряженности электростатического поля проводятся так, что их густота через единичную перпендикулярную площадку пропорциональна модулю вектора $\vec{E}$.

Тогда для элементарной площадки $d\vec{S}$, через которую проходят линии напряженности, можно ввести такую характеристику, как <u>**поток вектора напряжённости электростатического поля**</u> $d\Phi_{\text{E}}$ – **СФВ, характеризующая интенсивность электростатического поля и численно равная скалярному произведению векторов $\vec{E}$ и $d\vec{S}$:**

$$d\Phi_{\text{E}} = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot dS \cdot \cos\alpha,$$

где α – угол между положительной нормалью $\vec{n}$ к площадке и вектором напряженности $\vec{E}$ (рис. 11).

Для произвольной замкнутой поверхности S поток вектора напряжённости через эту поверхность

$$\Phi_E = \oint_S E \cdot dS \cos\alpha = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot \vec{S} = E \cdot S \cos\alpha,$$

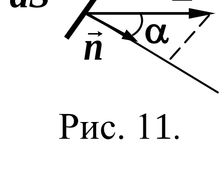


Рис. 11.

Единицы измерения потока [Ф] = В·м.

В зависимости от угла **α**, поток может быть:

а) максимальный (**Ф** = **max**), если **α** = 0;

б) положительный (**Ф** > 0), если 0 < **α** < 90º;

в) равен нулю (**Ф** = 0), если **α** = 90º;

г) отрицательный (**Ф** < 0), если 90º < **α** < 180º.

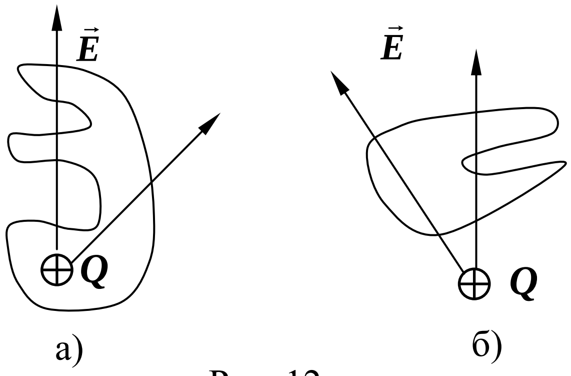


Рис. 12.

Принято считать поток вектора $\vec{E}$, выходящий из поверхности, положительным, а входящий – отрицательным (рис. 12, а). Если замкнутая поверхность не охватывает заряда, то поток сквозь неё равен 0, так как число линий напряжённости, входящих в поверхность, равно числу линий, выходящих из неё. (рис. 12, б).

Теорема Остроградского – Гаусса определяет Φ_E через любую замкнутую поверхность и применяется для расчета напряженности электростатического поля в случае большого количества зарядов, обладающих симметрией.

<u>Теорема Остроградского - Гаусса</u>: поток вектора напряжённости электростатического поля сквозь произвольную замкнутую поверхность равен отношению алгебраической суммы зарядов, охваченных этой поверхностью, к ε ε₀:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} Q_i \,. \qquad (2.4)$$

Если заряженное тело находится в вакууме или в воздухе, диэлектрическая проницаемость которых **ε** = 1, то в дальнейших выводах мы ее опускаем.

Методика расчёта полей с помощью теоремы Остроградского - Гаусса приводится в разделе 2.2.2.

Задачи данного параграфа посвящены нахождению напряжённости электростатического поля, причем используемые методы расчёта зависят от того, как распределены заряды, создающие поле.

<u>Основные типы задач этого раздела</u>:

- поле образовано одним или несколькими точечными зарядами (раздел 2.2.1);

- поле создано заряженными: бесконечно длинным цилиндром (нитью), бесконечной плоскостью, сферой, шаром (раздел 2.2.2);
- поле создано заряженным телом простой формы, не являющимся бесконечно цилиндром (нитью), бесконечной плоскостью, сферой, шаром (раздел 2.2.3).

2.2.1. Расчет напряженности поля, образованного точечными зарядами

Методика решения задач на нахождение напряжённости результирующего поля аналогична методике нахождения результирующей силы, действующей на точечный заряд со стороны других точечных зарядов (см. раздел 1.1), только вместо закона Кулона используется формула напряженности точечного заряда (2.2).

Примеры решения задач

<u>Задача 2.1.</u> Два точечных заряда $\boldsymbol{q_1}$ и $\boldsymbol{q_2}$ находятся на расстоянии $\boldsymbol{d}$ друг от друга. Найти напряжённость в точках A, B, C и D (рис. 13). Считаем расстояния от зарядов $\boldsymbol{q_1}$ и $\boldsymbol{q_2}$ до заданных точек известными и во всех случаях обозначаем $\boldsymbol{r_1}$ и $\boldsymbol{r_2}$ соответственно.

<u>Решение.</u> Сделаем рисунок для каждого случая отдельно. Так как заряды оба отрицательные, то векторы напряжённостей $\vec{\boldsymbol{E}}_1$ и $\vec{\boldsymbol{E}}_2$ направлены в каждом случае к зарядам $\boldsymbol{q_1}$ и $\boldsymbol{q_2}$ вдоль линии, соединяющей заряд и заданную точку, и берут начало в заданной точке.

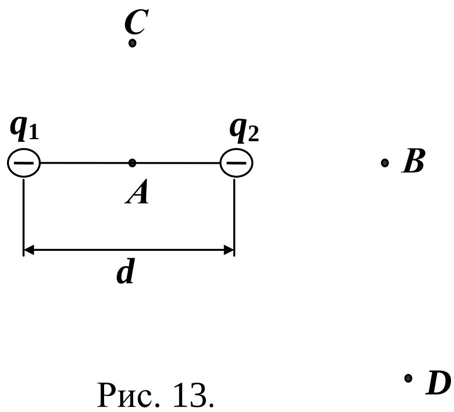


Рис. 13.

Направление результирующего вектора $\vec{\boldsymbol{E}}$ определяется **по принципу суперпозиции** путём векторного сложения. Поэтому векторная запись для всех случаев одинакова:

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\boldsymbol{E}}_1 + \vec{\boldsymbol{E}}_2 .$$

Модуль (длина) каждого из векторов рассчитывается по формуле напряженности точечного заряда (2.2). Модуль результирующего вектора определяется из геометрических построений.

а) В точке А (рис. 14, а) векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ направлены в противоположные стороны, поэтому модуль результирующего вектора $\vec{E}$ определяется как разность модулей векторов $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ и направлен в сторону большего вектора:

$$E = E_1 - E_2 = k\frac{q_1}{r_1^{\,2}} - k\frac{q_2}{r_2^{\,2}} = k\left(\frac{q_1}{r_1^{\,2}} - \frac{q_2}{r_2^{\,2}}\right).$$

б) В точке В (рис. 14, б) векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ направлены в одну сторону, поэтому модуль результирующего вектора $\vec{E}$ определяется как сумма модулей векторов $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ и направлен в эту же сторону:

$$E = E_1 + E_2 = k\frac{q_1}{r_1^{\,2}} + k\frac{q_2}{r_2^{\,2}} = k\left(\frac{q_1}{r_1^{\,2}} + \frac{q_2}{r_2^{\,2}}\right).$$

в) В точке С (рис. 14, в) векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ взаимно перпендикулярны, поэтому модуль результирующего вектора $\vec{E}$ является гипотенузой прямоугольного треугольника и определяется по теореме Пифагора:

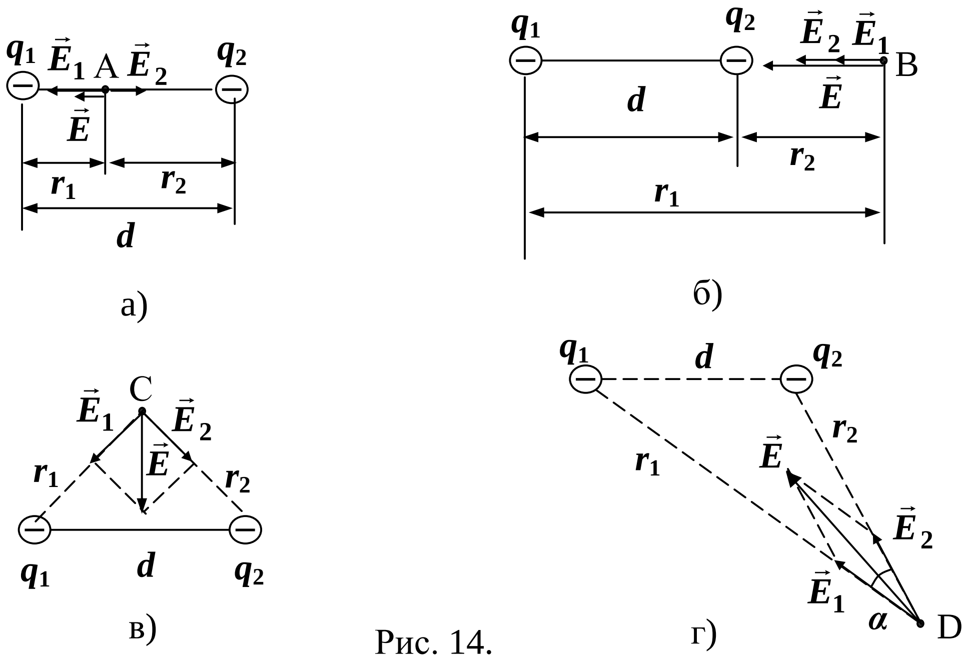


Рис. 14.

$$E = \sqrt{E^2{}_1 + E^2{}_2} = \sqrt{\left(k\frac{q_1}{r_1{}^2}\right)^2 + \left(k\frac{q_2}{r_2{}^2}\right)^2} = k\sqrt{\left(\frac{q_1}{r_1{}^2}\right)^2 + \left(\frac{q_2}{r_2{}^2}\right)^2}\,.$$

г) В точке D (рис. 14, г) векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ образуют треугольник, поэтому модуль результирующего вектора $\vec{E}$ определяется по теореме косинусов:

$$E = \sqrt{E^2{}_1 + E^2{}_2 + 2E_1E_2\cos\alpha} = k\sqrt{\left(\frac{q_1}{r_1{}^2}\right)^2 + \left(\frac{q_2}{r_2{}^2}\right)^2 + \frac{2q_1q_2}{(r_1r_2)^2}\cos\alpha}\,.$$

Если угол α неизвестен, то его определяют, используя теорему косинусов для треугольника со сторонами r_1, r_2, d:

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1\,r_2\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad \cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1\,r_2}.$$

Задача 2.2. Поле создано тремя одинаковыми точечными зарядами q, расположенными в вершинах равностороннего треугольника со стороной a. Вычислить напряжённость электростатического поля в точке, находящейся на пересечении высот этого треугольника.

Решение. Так как напряжённость электростатического поля $\vec{E}$ – величина векторная, то необходимо определить направление этого вектора и его модуль (длину).

Направление вектора напряжённости результирующего поля определяем с помощью принципа суперпозиции:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3,$$

где $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ и $\vec{E}_3$ - напряжённость электростатического поля, созданного каждым зарядом в отдельности.

а) Сначала строим векторы $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ и $\vec{E}_3$, берущие **начало** в заданной точке. Так как все заряды одинаковые, а заданная точка равноудалена от них, то длины этих векторов будут равны. Поскольку знак зарядов отрицательный, то векторы $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ и $\vec{E}_3$ будут направлены к зарядам (рис. 15).

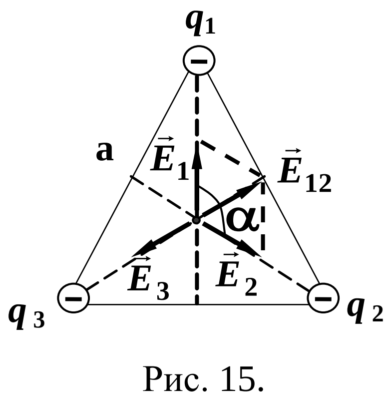


Рис. 15.

б) Складываем геометрически векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$. Результирующий вектор $\vec{E}_{12}$

будет лежать на той же прямой, что и вектор $\vec{E}_3$.

в) Находим длину вектора $\vec{E}_{12}$ по теореме косинусов:

$$E_{12} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha},$$

где α – угол между векторами $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$.

С учётом того, что $E_1 = E_2$, $\alpha = 120^\circ$, $\cos 120^\circ = -0{,}5$, получим:

$$E_{12} = E_1\sqrt{1+1+2\cdot(-0{,}5)} = E_1.$$

г) Складываем геометрически векторы $\vec{E}_{12}$ и $\vec{E}_3$.Так как эти векторы равны по длине и противоположны по направлению, то их векторная сумма равна нулю:

$$E = E_{12} - E_3 = E_1 - E_1 = 0.$$

Методика расчета не меняется, если образующие систему заряды имеют другие знаки и расположения.

2.2.2. Расчет напряженности поля, созданного заряженными: бесконечно длинным цилиндром (нитью), бесконечной плоскостью, сферой, шаром

Для расчёта полей, созданных зарядами, которые равномерно распределены по сферическим, цилиндрическим или плоским поверхностям, применяют теорему Остроградского – Гаусса (раздел 2.2).

Методика расчёта полей с помощью теоремы Остроградского - Гаусса.

1) Выбираем произвольную замкнутую поверхность, охватывающую заряженное тело.
2) Вычисляем поток вектора напряжённости сквозь эту поверхность.
3) Вычисляем суммарный заряд, охваченный этой поверхностью.
4) Подставляем в теорему Гаусса вычисленные величины и выражаем напряжённость электростатического поля.

Примеры расчёта некоторых полей

- <u>Поле равномерно заряженного бесконечного цилиндра (нити).</u>

Пусть бесконечный цилиндр радиусом $\boldsymbol{R}$ равномерно заряжен с линейной плотностью заряда $+\,\boldsymbol{\tau}$ (рис. 16).

Из соображений симметрии следует, что линии напряжённости поля в любой точке будут направлены вдоль радиальных прямых, перпендикулярных оси цилиндра.

В качестве замкнутой поверхности выберем коаксиальный с данным (с общей осью симметрии) цилиндр радиусом $\boldsymbol{r}$ и высотой $\boldsymbol{\ell}$.

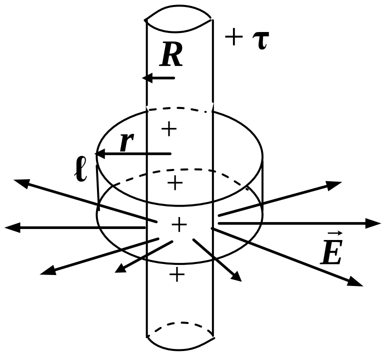


Рис. 16

Рассчитаем поток вектора $\vec{\boldsymbol{E}}$ через данную поверхность:

$$\Phi_{\text{E}} = \int\limits_{S_{\text{бок}}} \vec{E}d\vec{S}_{\text{бок}} + 2\int\limits_{S_{\text{осн}}} \vec{E}d\vec{S}_{\text{осн}},$$

где $\boldsymbol{S}_{\text{осн}}$, $\boldsymbol{S}_{\text{бок}}$ – площади оснований и боковой поверхности.

Поток вектора напряжённости сквозь площади оснований равен нулю, поэтому

$$\int\limits_{S_{\text{бок}}} \vec{E}d\vec{S} = E\,S_{\text{бок}} = E\,\ell\,2\pi r.$$

Суммарный заряд, охватываемый выбранной поверхностью:

$$Q = \int dQ = \tau\,\ell\,.$$

Подставив всё в теорему Гаусса, с учетом того, что $\boldsymbol{\varepsilon} = 1$, получим:

$$E\,\ell\,2\pi r = \frac{\tau\,\ell}{\varepsilon_0} \Rightarrow .$$

Напряжённость электростатического поля, созданного бесконечно длинным равномерно заряженным цилиндром или бесконечно длинной равномерно заряженной нитью в точках, расположенных вне её:

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{r}, \tag{2.5}$$

где $\boldsymbol{r}$ – расстояние <u>**от оси**</u> цилиндра до заданной точки ($\boldsymbol{r} \geq \boldsymbol{R}$);

τ - линейная плотностью заряда**.**

Если $r < R$, то рассматриваемая замкнутая поверхность зарядов внутри не содержит, поэтому в этой области $E = 0$, т. е. **внутри цилиндра, поля нет**.

- Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости

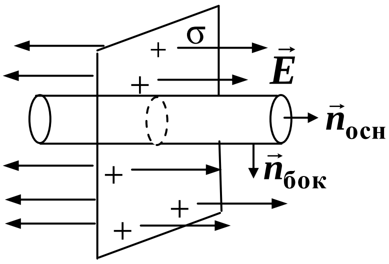


Рис. 17.

Пусть бесконечная плоскость заряжена с постоянной поверхностной плотностью **+σ**.

В качестве замкнутой поверхности выберем цилиндр, основания которого параллельны заряженной плоскости, а ось перпендикулярна ей (рис. 17). Так как линии, образующие боковую поверхность цилиндра, параллельны линиям напряжённости, то поток вектора напряжённости сквозь боковую поверхность равен нулю. Поток вектора напряженности сквозь две площади основания

$$\int\limits_S \vec{E}d\vec{S} = 2\int\limits_{S_{осн}} E\,S_{осн} = 2E\,S.$$

Суммарный заряд, охватываемый выбранной поверхностью:

$$Q = \int dQ = \sigma S.$$

Подставив всё в теорему Гаусса, получим:

$$2E\,S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

Напряженность электростатического поля бесконечной равномерно заряженной плоскости

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \qquad (2.6)$$

Из данной формулы вытекает, что E не зависит от длины цилиндра, то есть напряжённость поля одинакова во всех точках. Иными словами, поле равномерно заряженной плоскости ***однородно.***

- <u>Поле двух бесконечных параллельных разноимённо заряженных плоскостей</u>

Пусть плоскости равномерно заряжены с одинаковыми по величине поверхностными плотностями $+\boldsymbol{\sigma}$ и $-\boldsymbol{\sigma}$ (рис. 18).

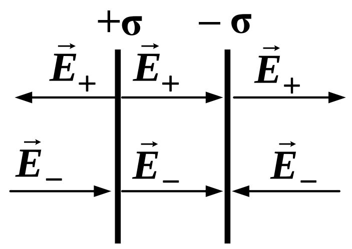


Рис. 18.

Согласно принципу суперпозиции,

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-.$$

Из рисунка видно, что в области между плоскостями силовые линии сонаправлены, поэтому результирующая напряжённость

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{2.7}$$

Вне объёма, ограниченного плоскостями, складываемые поля имеют противоположные направления, так что результирующая напряженность равна нулю.

Таким образом, поле оказывается сосредоточенным между плоскостями. Полученный результат приближённо справедлив и для плоскостей конечных размеров, если расстояние между плоскостями много меньше их площади (плоский конденсатор).

Если на плоскостях распределены заряды одного знака с одинаковой поверхностной плотностью, то поле отсутствует между пластинами, а вне пластин вычисляется по формуле (2.7).

- <u>Напряжённость поля равномерно заряженной сферы</u>

Поле, создаваемое сферической поверхностью радиуса $\boldsymbol{R}$, заряженной с поверхностной плотностью заряда $\boldsymbol{\sigma}$, будет центрально симметричным, поэтому линии напряжённости направлены вдоль радиусов сферы (рис. 19, а).

В качестве замкнутой поверхности выберем сферу радиуса $\boldsymbol{r}$, имеющую общий центр с заряженной сферой.

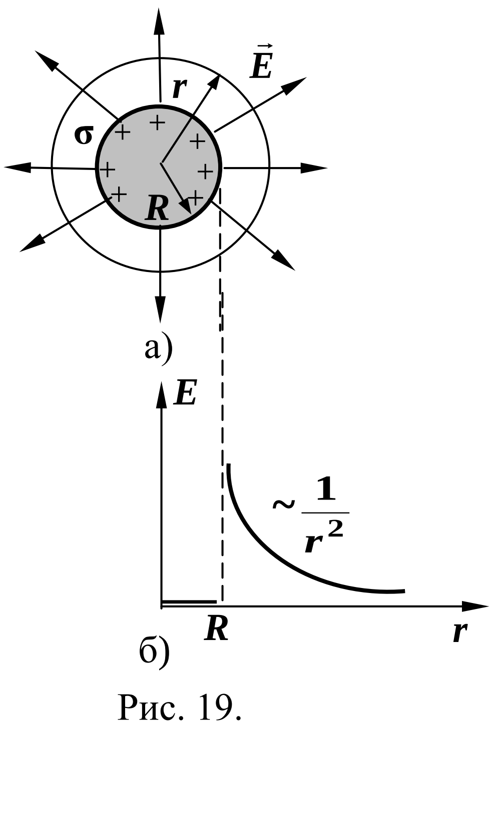


Рис. 19.

Если $\boldsymbol{r} > \boldsymbol{R}$, то внутрь поверхности попадает весь заряд $\boldsymbol{Q}$.
Поток вектора напряжённости сквозь поверхность сферы

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = E\, S_{\text{сф}} = E\, 4\pi r^2.$$

Подставив это выражение в теорему Гаусса, получим:

$$E\, 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Напряжённость электростатического поля вне равномерно заряженной сферы:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} = k\frac{Q}{r^2}, \qquad (2.8)$$

где $\boldsymbol{r}$ – расстояние **<u>от центра</u>** сферы.

Отсюда видно, что поле тождественно с полем точечного заряда той же величины, помещённого в центр сферы.

Если $\boldsymbol{r} < \boldsymbol{R}$, то замкнутая поверхность не содержит внутри зарядов, поэтому **<u>внутри заряженной сферы поле отсутствует</u>** (рис.19, б).

- <u>Напряженность поля объёмно заряженного шара</u>

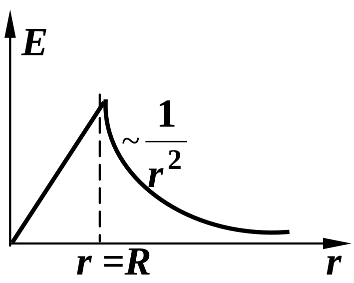


Рис. 20.

Пусть шар радиуса $\boldsymbol{R}$ заряжен с постоянной объёмной плотностью заряда $\boldsymbol{\rho}$.

Поле в этом случае обладает центральной симметрией. Для напряжённости поля вне шара получается тот же результат, что и в случае поверхностно заряженной сферы (2.8).

Для точек внутри шара напряжённость будет другая (рис. 20). Сферическая поверхность охватывает заряд

$$Q = \int_V \rho\, dV = \rho V = \rho\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Поэтому, согласно теореме Гаусса

$$E\, 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

Учитывая, что $\rho = \dfrac{3Q}{4\pi R^3}$, получим:

Напряжённость электростатического поля, внутри объемно заряженного шара

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}r = k\frac{Q}{R^3}r \ \ (r \le R). \qquad (2.9)$$

Примеры решения задач

<u>Задача 2.3</u>. В поле бесконечно длинной плоскости с поверхностной плотностью заряда $\boldsymbol{\sigma}$ подвешен на нити маленький шарик массой $\boldsymbol{m}$, имеющий заряд того же знака, что и плоскость. Найти заряд шарика, если нить образует с вертикалью угол $\boldsymbol{\alpha}$

<u>Решение.</u> Вернемся к разбору решения задачи 1.4. Разница заключается в том, что в задаче 1.4 сила $\vec{F}_{эл}$ вычисляется по закону Кулона (1.2), а в задаче 2.3 – из определения напряженности электростатического поля (2.1) $\vec{F}_{эл}$. Напряженность электростатического поля бесконечной равномерно заряженной плоскости выведена с использованием теоремы Остроградского-Гаусса (2.4).

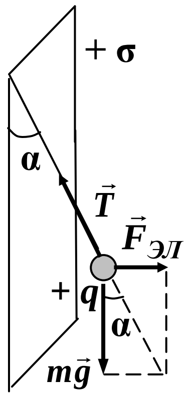


Рис. 21.

Поле плоскости однородно и не зависит от расстояния до плоскости. Из рис. 21:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\left|\vec{F}_{эл}\right|}{\left|m\vec{g}\right|} = \frac{Eq}{mg} = \frac{\sigma q}{2\varepsilon_0 mg} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{2\varepsilon_0 mg}{\sigma}.$$

<u>Обратите внимание</u>, что для нахождения силы, действующей на заряд, помещенный в поле распределенного заряда, необходимо использовать формулу

$$\vec{F}_{эл} = \vec{E}q,$$

а напряженность поля, созданного несколькими распределенными зарядами, находить по принципу суперпозиции. Поэтому последующие задачи посвящены нахождению напряженности электростатического поля распределенных зарядов с использованием теоремы Остроградского-Гаусса.

<u>Задача 2.4.</u> Опередить напряженность поля внутри и вне равномерно заряженной пластинки толщиной $\boldsymbol{d}$, объемная плотность заряда внутри пластинки $\boldsymbol{\rho}$. Построить график зависимости $\boldsymbol{E(x)}$.

<u>Решение.</u> Начало координат поместим в средней плоскости пластинки, а ось **OX** направим перпендикулярно к ней (рис. 22, а).

Применим теорему Остроградского-Гаусса для расчета напряженности электростатического поля заряженной бесконечной плоскости, тогда

$$2ES = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Из определения объемной плотности заряда

$$q = \rho V = \rho S x,$$

тогда для напряженности получим

$$E = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} x.$$

Отсюда видно, что поле внутри пластинки зависит от x. Поле вне пластинки рассчитывается аналогично:

$$2ES = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\rho V}{\varepsilon_0} = \frac{\rho S d}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} d$$

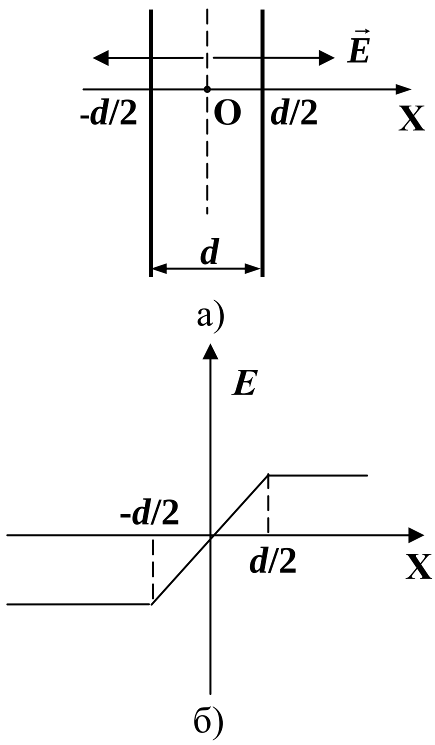


Рис. 22.

Отсюда видно, что поле вне пластинки однородно. График зависимости напряженности E от x на рис. 22, б.

<u>Задача 2.5.</u> Поле создано двумя бесконечно длинными нитями, заряженными с линейными плотностями зарядов $-\tau_1$ и $+\tau_2$. Нити расположены перпендикулярно друг другу (рис. 23). Найти напряженность поля в точке, находящейся на расстоянии r_1 и r_2 от нитей.

<u>Решение.</u> Покажем на рисунке напряжённость поля, созданного каждой нитью отдельно. Вектор $\vec{E}_1$ направлен <u>к</u> первой нити, так как она заряжена отрицательно. Вектор $\vec{E}_2$ направлен <u>от</u> второй нити, так как она заряжена положительно. Векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ взаимно перпендикулярны, поэтому результирующий вектор $\vec{E}$ будет являться гипотенузой прямоугольного треугольника. Модули векторов $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ определяются по формуле (2.5).

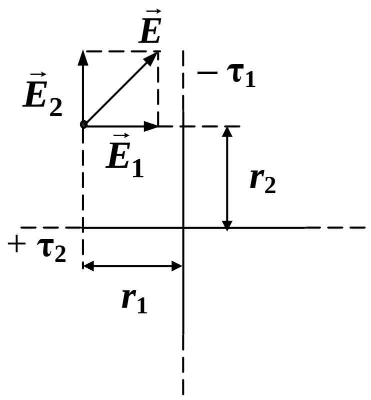


Рис. 23.

По принципу суперпозиции

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

По теореме Пифагора

$$E=\sqrt{E^2{}_1+E^2{}_2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau_1}{r_1}\right)^2+\left(\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau_2}{r_2}\right)^2}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\sqrt{\left(\frac{\tau_1}{r_1{}^2}\right)^2+\left(\frac{\tau_2}{r_2{}^2}\right)^2}.$$

.

<u>Задача 2.6</u>. Поле создано двумя заряженными бесконечно длинными полыми коаксиальными цилиндрами радиусами $\boldsymbol{R_1}$ и $\boldsymbol{R_2} > \boldsymbol{R_1}$. Поверхностные плотности зарядов равны $-\boldsymbol{\sigma_1}$ и $+\boldsymbol{\sigma_2}$. Найти напряжённость электростатического поля в следующих точках:

а) точка $\boldsymbol{A}$ расположена на расстоянии $\boldsymbol{d_1} < \boldsymbol{R_1}$;

б) точка $\boldsymbol{B}$ расположена на расстоянии $\boldsymbol{R_1} < \boldsymbol{d_2} < \boldsymbol{R_2}$;

в) точка $\boldsymbol{C}$ расположена на расстоянии $\boldsymbol{d_3} > \boldsymbol{R_1} > \boldsymbol{R_2}$.

Расстояния отсчитываются от оси цилиндров.

<u>Решение.</u> Коаксиальные цилиндры – это цилиндры, имеющие общую ось симметрии. Сделаем рисунок и покажем на нем точки (рис. 24).

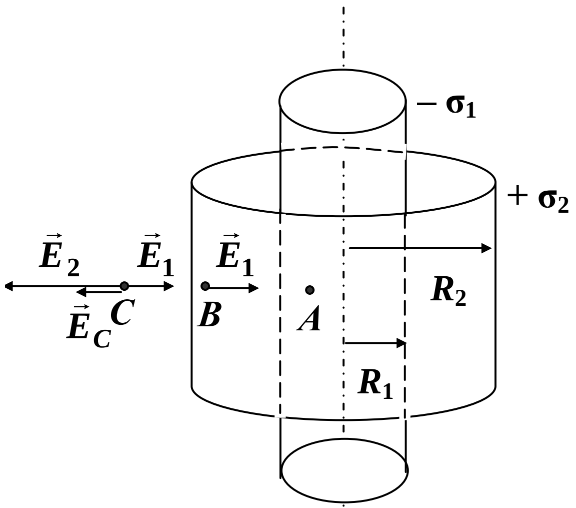


Рис. 25.

а) точка $\boldsymbol{A}$ расположена внутри обоих цилиндров. Так как внутри цилиндров поля нет, то напряжённость в этой точке равна нулю:

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{A}} = 0.$$

б) точка $\boldsymbol{B}$ расположена внутри бóльшего цилиндра, поэтому в этой точке поле создаётся только меньшим цилиндром:

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{B}}=\boldsymbol{E_1}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau_1}{d_2}.$$

Выразим линейную плотность заряда через поверхностную плотность заряда. Для этого воспользуемся формулами (1.4) и (1.5), из которых выразим заряд:

$$Q_1=\tau_1\,\ell;\quad Q_1=\sigma_1\,S_1.$$

Приравняем правые части и получим:

$$\tau_1\,\ell=\sigma_1\,S_1\quad\Rightarrow\quad\tau_1=\frac{\sigma_1\,S_1}{\ell},$$

где $\boldsymbol{S_1}$ – площадь поверхности первого цилиндра.

С учётом того, что $\boldsymbol{S_1 = 2\pi R_1}\,\ell$, окончательно получим:

$$\boldsymbol{E}_{\text{В}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\pi\varepsilon_0}}\frac{\boldsymbol{\sigma_1 S_1}}{\boldsymbol{d_2}\ell} = \frac{\boldsymbol{\sigma_1 2\pi R_1}\ell}{\boldsymbol{2\pi\varepsilon_0 d_2}\ell} = \frac{\boldsymbol{\sigma_1 R_1}}{\boldsymbol{\varepsilon_0 d_2}}$$

в) точка $\boldsymbol{C}$ расположена снаружи обоих цилиндров, поэтому поле создаётся обоими цилиндрами. По принципу суперпозиции:

$$\vec{\boldsymbol{E}}_{\text{C}} = \vec{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{1}} + \vec{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{2}}.$$

С учётом направлений и расчётов, полученных выше, получим:

$$\boldsymbol{E}_{\text{C}} = \boldsymbol{E_2} - \boldsymbol{E_1} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\varepsilon_0 d_3}}\left(\boldsymbol{\sigma_2 R_2} - \boldsymbol{\sigma_1 R_1}\right).$$

<u>Задача 2.7</u>. Поле создано двумя заряженными бесконечно длинными параллельными плоскостями. Поверхностные плотности зарядов равны $\boldsymbol{\sigma_1}$ и $\boldsymbol{\sigma_2} > \boldsymbol{\sigma_1}$. Найти напряжённость электростатического поля в точках, находящихся между пластинами и вне пластин. Решить задачу для двух случаев:

а) пластины одноимённо заряжены;

б) пластины разноимённо заряжены.

<u>Решение.</u> В векторном виде напряжённость результирующего поля в любом случае записывается одинаково. Согласно принципу суперпозиции:

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{1}} + \vec{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{2}}.$$

Модули векторов $\vec{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{1}}$ и $\vec{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{2}}$ вычисляются по формуле (2.6).

а) Если плоскости заряжены одноимённо, то между плоскостями напряжённости направлены в разные стороны (рис. 26, а). Модуль результирующей напряжённости

$$\boldsymbol{E}_{\text{в}} = \boldsymbol{E_2} - \boldsymbol{E_1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\varepsilon_0}}(\boldsymbol{\sigma_2} - \boldsymbol{\sigma_1})$$

Вне плоскостей напряжённости $\vec{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{1}}$ и $\vec{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{2}}$направлены в одну сторону. Так как поле бесконечных заряженных плоскостей однородно, то есть не зависит от расстояния до плоскостей, то в любой точке и слева и справа от плоскостей поле будет одинаково:

$$.\ \boldsymbol{E}_{\text{C}} = \boldsymbol{E_1} + \boldsymbol{E_2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\varepsilon_0}}(\boldsymbol{\sigma_1} + \boldsymbol{\sigma_2})$$

б) Если плоскости заряжены разноимённо, то, наоборот, между плоскостями напряжённости направлены в одну сторону (рис. 26, б), а вне плоскостей – в разные.

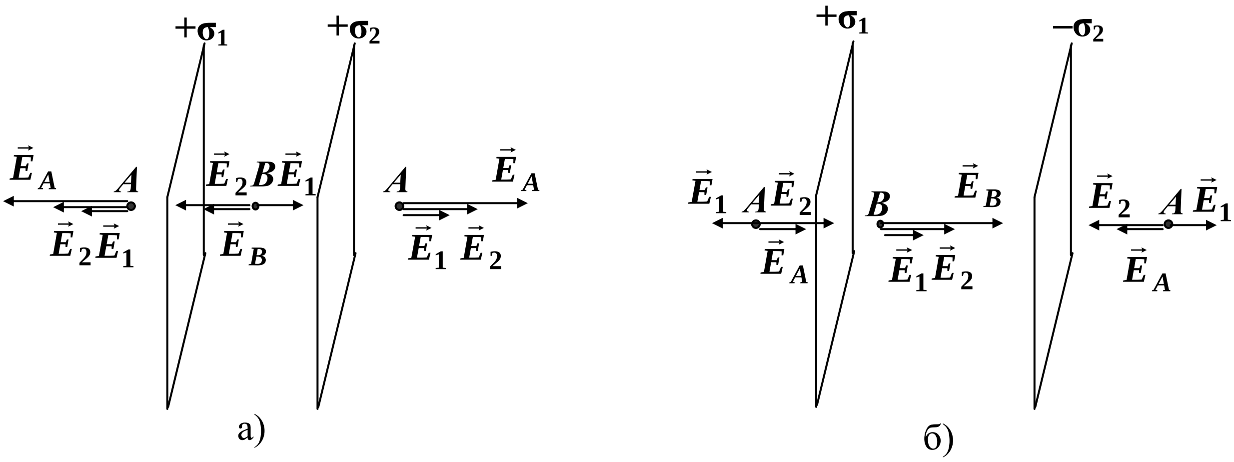


Рис. 26.

2.2.3. Расчет напряженности поля, созданного заряженным телом простой формы

Принцип суперпозиции позволяет рассчитать электростатические поля любой системы неподвижных зарядов, поскольку если заряды не точечные, то их всегда можно свести к совокупности точечных зарядов.

Методика расчета напряженности состоит из двух частей:

- Первая (дифференцирование) заключается в разбиении заряженных тел на малые области, каждая из которых может считаться точечным зарядом, и применении к ним формулы напряжённости электростатического поля точечного заряда.
- Вторая (интегрирование) заключается в векторном суммировании напряжённостей электростатических полей.

Примеры решения задач

Задача 2.8. Вычислить напряжённость поля, создаваемого тонким стержнем длиной $\boldsymbol{\ell}$, несущим равномерно распределённый по длине заряд с линейной плотностью $+\boldsymbol{\tau}$ в точке, равноудалённой от концов стержня, находящейся на расстоянии $\boldsymbol{r_0}$ от его середины.

Решение. Выделим на стержне бесконечно малый участок $d\ell$, заряд которого можно считать точечным (рис. 27, а):

$$dQ = \tau\, d\ell. \qquad (1)$$

Воспользуемся формулой напряжённости поля точечного заряда в дифференциальном виде:

$$dE = k\frac{dQ}{r^2} = k\frac{\tau\, d\ell}{r^2} \qquad (2)$$

Сделаем геометрические преобразования. Из ΔOAB (см. рис. 27, а):

$$\cos\varphi = \frac{r_0}{r} \quad \Rightarrow r = \frac{r_0}{\cos\varphi} \qquad (3)$$

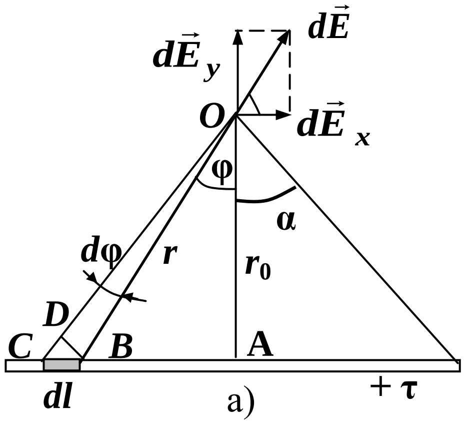
Из ΔCDB (рис. 27, б):

$$\cos\varphi = \frac{a}{d\ell} \quad \Rightarrow d\ell = \frac{a}{\cos\varphi} \qquad (4)$$

Так как угол $d\varphi$ мал, то $\sin d\varphi = d\varphi$

Из ΔOBD (см. рис. 27, а):

$$\sin d\varphi = d\varphi = \frac{a}{r} \quad \Rightarrow a = rd\varphi. \qquad (5)$$



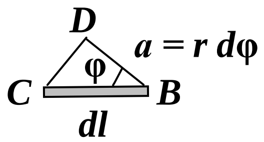


Рис. 27.

Подставив в формулу (4) a и r из (5) и (3), получим:

$$d\ell = \frac{rd\varphi}{\cos\varphi} = \frac{r_0 d\varphi}{(\cos\varphi)^2} \qquad (6)$$

Подставив r из (3) и $d\ell$ из (6) в формулу (2), получим:

$$dE = k\frac{\tau(\cos\varphi)^2 d\ell}{r_0^{\,2}} = k\frac{\tau(\cos\varphi)^2}{r_0^{\,2}}\frac{r_0 d\varphi}{(\cos\varphi)^2} = k\frac{\tau}{r_0}d\varphi. \qquad (7)$$

Так как $d\vec{E}$ вектор, то $d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y$.

Из рис. 27, а: $dE_x = dE\sin\varphi; \quad dE_y = dE\cos\varphi$.

Чтобы найти полную напряжённость, нужно проинтегрировать её составляющие:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int d\vec{E}_x + \int d\vec{E}_y.$$

Модуль напряжённости

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}.$$

Для половины стержня угол φ изменяется от 0 до α, а для всего стержня – от α до $-\alpha$

$$E_x = \int_{-\alpha}^{\alpha} dE\sin\varphi = k\frac{\tau}{r_0}\int_{-\alpha}^{\alpha}\sin\varphi\, d\varphi = k\frac{\tau}{r_0}\left(-\cos\varphi\Big|_{-\alpha}^{\alpha}\right) = k\frac{\tau}{r_0}\left(-\cos\alpha + \cos-\alpha\right).$$

Так как $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$, то $E_x = 0$.

$$E_y = \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} dEs\cos\varphi = k\frac{\tau}{r_0}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} s\cos\varphi\, d\varphi = k\frac{\tau}{r_0}\left(\sin\varphi\Big|_{-\alpha}^{\alpha}\right) = k\frac{\tau}{r_0}\left(\sin\alpha - \sin-\alpha\right).$$

Так как $\sin\alpha = -\sin(-\alpha)$, то $E_y = k\frac{\tau}{r_0}2\sin\alpha$.

Из ΔOAC на рис. 27, а выразим $\sin\alpha$:

$$\sin\alpha = \frac{\ell/2}{\sqrt{r_0^2 + (\ell/2)^2}}.$$

Окончательно получим:

$$E = E_y = k\frac{\tau}{r_0}2\frac{\ell/2}{\sqrt{r_0^2 + (\ell/2)^2}} = k\frac{\tau\cdot\ell}{r_0\sqrt{r_0^2 + (\ell/2)^2}}.$$

Задача 2.9. На тонком кольце равномерно распределен заряд с линейной плотностью заряда $+\tau$. Определить напряженность электростатического поля в точке, расположенной на оси кольца и удаленной на расстояние a от плоскости кольца.

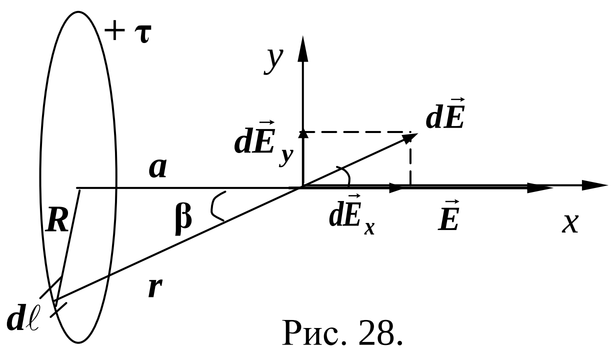


Рис. 28.

Решение. Выделим на кольце элемент длины $d\ell$ (рис. 28). Заряд $dQ = \tau d\ell$, находящийся на выделенном участке, можно считать точечным. Напряженность электростатического поля $d\vec{E}$, создаваемого точечным зарядом dQ:

$$dE = k\frac{dQ}{r^2} = k\frac{\tau d\ell}{r^2},$$

где r – расстояние от элемента $d\ell$ до заданной точки.

Выразим вектор $d\vec{E}$ через проекции $d\vec{E}_x$ и $d\vec{E}_y$ на оси координат:

$$d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y.$$

Напряженность $\vec{E}$ найдем интегрированием вдоль длины окружности ℓ:

$$\vec{E} = \int\limits_{\ell} d\vec{E} = \int\limits_{\ell} d\vec{E}_x + \int\limits_{\ell} d\vec{E}_y.$$

Так как кольцо симметрично относительно заданной точки, то все проекции на ось *x* скомпенсируют друг друга, то есть интеграл

$$\int_{\ell} d\vec{E}_y = 0.$$

Тогда

$$\vec{E} = \int_{\ell} d\vec{E}_x ,$$

где

$$dE_x = dE\cos\beta = k\frac{\tau d\ell}{r^2}\cos\beta.$$

Из рис. 28:

$$r = \sqrt{a^2 + R^2}; \quad \cos\beta = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}};$$

$$E = \int_{\ell=2\pi R} dE\cos\beta = k\frac{\tau}{a^2 + R^2}\frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}\int_{\ell=2\pi R} d\ell = \frac{k\tau\ell a}{(a^2 + R^2)^{3/2}}.$$

С учетом того, что длина окружности $\ell = 2\pi R$, а коэффициент $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, окончательно получим:

$$E = \frac{\tau R a}{2\varepsilon_0(a^2 + R^2)^{3/2}}.$$

2.3. Потенциал. Эквипотенциальные поверхности

Электростатическое поле обладает потенциальной энергией, поэтому наряду с напряженностью поля $\vec{E}$ для описания полей используется такая характеристика поля, как ***потенциал***.

<u>Потенциал электростатического поля φ</u> – СФВ, являющаяся энергетической характеристикой поля и численно равная потенциальной энергии, которой обладал бы в данной точке поля единичный положительный точечный заряда:

$$\varphi = \frac{W_п}{q_+} \qquad (2.10)$$

За единицу измерения потенциала в СИ принимают 1 Вольт

$$[\varphi] = 1\text{В} = \frac{1\,\text{Дж}}{1\,\text{Кл}}.$$

Потенциал не зависит ни от потенциальной энергии $W_п$ ни от заряда q_+, а является характеристикой поля.

☝☝☝ **<u>Подчеркнем</u>**, что, в отличие от напряженности, потенциал – не векторная, а **скалярная** величина. Он может быть как положительным, так и отрицательным. Потенциал поля, созданного положительным зарядом, **положителен**, а потенциал поля, созданного отрицательным зарядом, **отрицателен**.

Для потенциала справедлив **<u>принцип суперпозиции:</u> потенциал поля, созданного в данной точке системой положительных и отрицательных зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов полей, созданных каждым зарядом в отдельности с учетом их знаков:**

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i\,. \tag{2.11}$$

Численное значение потенциала зависит от выбора нулевого уровня **φ**.

Нулевой уровень потенциала – геометрическое место точек поля, потенциал которых принимается равным нулю и выбирается произвольно: в бесконечности, на поверхности Земли и т. д.

Потенциал поля, созданного точечным зарядом Q на расстоянии r от него:

$$\varphi = k\frac{Q}{r}. \tag{2.12}$$

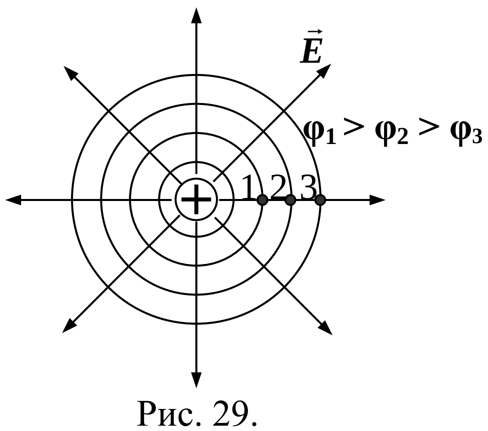


Рис. 29.

Для графического изображения распределения потенциала пользуются ***эквипотенциальными поверхностями*** – поверхностями, во всех точках которых потенциал **φ** имеет одно и то же значение.

Форма эквипотенциальных поверхностей может быть разная, например, для точечного заряда эквипотенциальные поверхности – ***концентрические сферы*** (рис. 29).

Эквипотенциальных поверхностей вокруг каждого заряда можно провести бесчисленное множество. Однако их обычно проводят так, чтобы разности потенциалов между соседними эквипотенциальными поверхностями были одинаковы. Тогда густота эквипотенциальных поверхностей характеризует напряженность поля в разных точках. Чем гуще эквипотенциальные поверхности, тем больше напряженность поля.

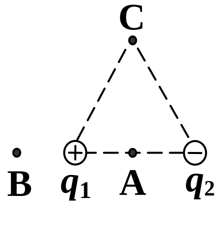
<u>Свойства эквипотенциальных поверхностей:</u>

1) работа по перемещению заряда по эквипотенциальной поверхности равна нулю;
2) линии вектора напряжённости ***всегда перпендикулярны*** эквипотенциальным поверхностям;
3) эквипотенциальные поверхности не пересекаются, так как одна и та же точка поля не может иметь два разных значения потенциала;
4) густота эквипотенциальных поверхностей пропорциональна модулю потенциала, т. е. она характеризует пространственное распределение потенциала.

Зная расположение линий напряжённости электростатического поля, можно построить эквипотенциальные поверхности, и наоборот. Следовательно, электростатическое поле считается полностью заданным, если для каждой точки пространства задан вектор $\vec{E}$ или скаляр φ.

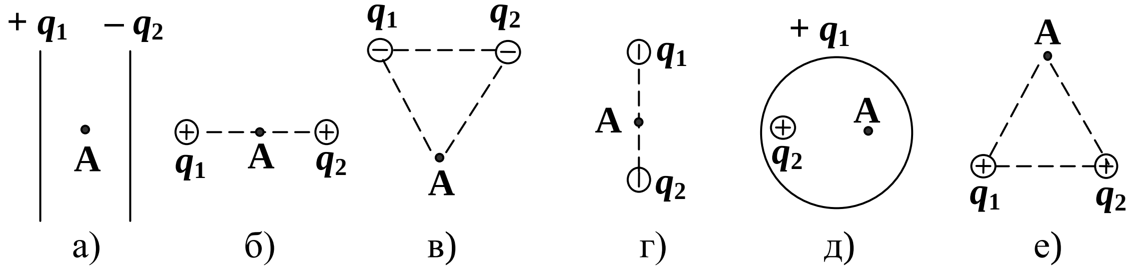
Задания для самостоятельной работы к разделу 2.3

1. Электрическое поле создается двумя равными по величине зарядами: $+q_1$ и $-q_2$. Укажите ошибочную запись:

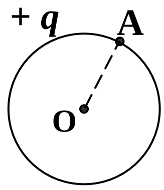


а) $\mathbf{E}_A > \mathbf{E}_B$; б) $\varphi_B > 0$; в) $\varphi_C = 0$;
г) $\mathbf{E}_C \neq 0$; д) $\varphi_A < 0$; е) $\mathbf{E}_A = 0$.

2. На каком из рисунков потенциал результирующего поля в точке А равен нулю, если расстояние от зарядов до точки А одинаково ($|q_1| = |q_2|$)

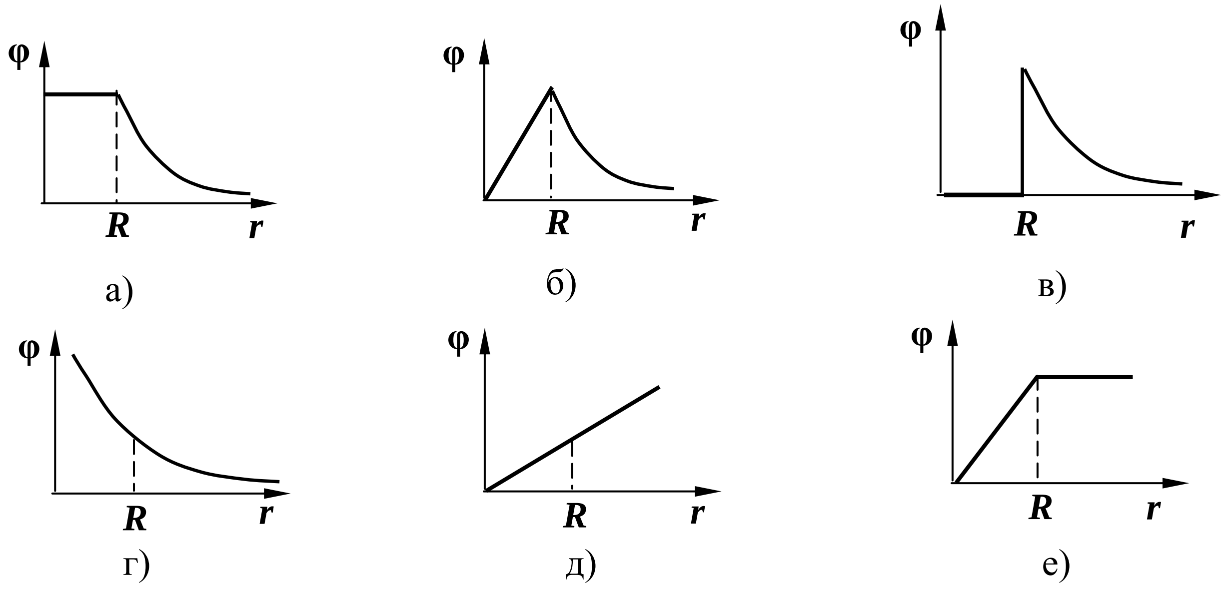


3. Потенциалы в точках А и О поля, созданного положительно заряженной сферой, удовлетворяют условиям:

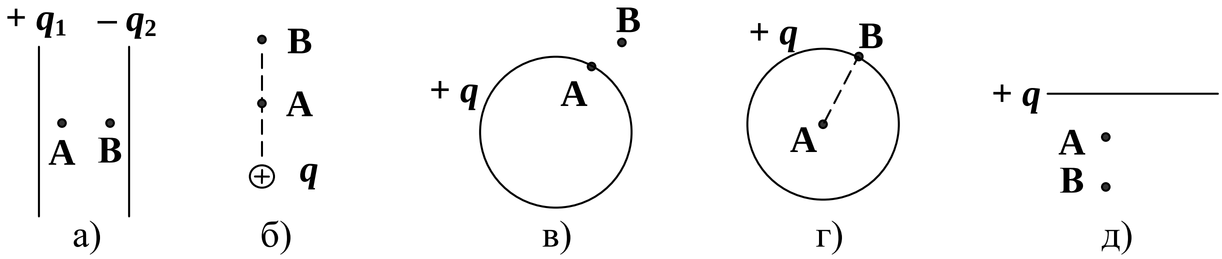


а) $\varphi_O = \varphi_A > 0$; б) $\varphi_O > \varphi_A > 0$; в) $\varphi_A > \varphi_O > 0$;
г) $\varphi_O < \varphi_A < 0$; д) $\varphi_O = \varphi_A = 0$; е) $\varphi_O = \varphi_A < 0$.

4. Найти правильный график зависимости $\varphi(r)$ для положительно заряженного металлического шара радиуса R.



5. В каком случае разность потенциалов между точками поля А и В равна нулю?



6. Найти ошибочную запись для эквипотенциальных поверхностей:

а) $q\Delta\varphi = 0$; б) $\varphi = \mathbf{const}$; в) $\vec{E} \perp d\vec{\ell}$;

г) $\oint\limits_{\ell} E_{\ell} = 0$; д) $\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\varphi = \vec{E}$; е) $E = \mathbf{const}$.

где $d\vec{\ell}$ - элемент длины эквипотенциальной поверхности.

Примеры решения задач

Задача 2.10. В вершинах квадрата со стороной a расположены три положительных заряда и один отрицательный. Значение каждого заряда равно Q. Определить потенциал электростатического поля в центре квадрата.

Решение. Согласно принципу суперпозиции (2.11), потенциал результирующего поля

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4.$$

Внимание: при расчете потенциала знаки зарядов учитываются **автоматически**, поэтому значение результирующего потенциала **не зависит** от того, как расположены положительные и отрицательные заряды в вершинах квадрата.

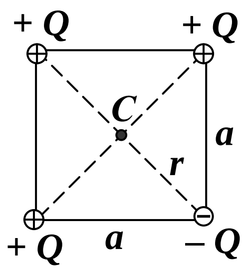


Рис. 30.

Как видно из рис. 30, расстояние от любого из зарядов до рассматриваемой точки одинаково и вычисляется из теоремы Пифагора:

$$(2r)^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow r = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Потенциал, создаваемый каждым зарядом, согласно (2.12) равен:

$$\varphi = k\frac{Q}{r}.$$

Подставив в принцип суперпозиции значение потенциала и значение r, получим:

$$\varphi = k\frac{Q}{r} + k\frac{Q}{r} + k\frac{Q}{r} - k\frac{Q}{r} = 2k\frac{Q}{r} = 4k\frac{Q}{a\sqrt{2}}.$$

<u>Задача 2.11.</u> Тонкий стержень длиной ℓ равномерно заряжен зарядом $\boldsymbol{Q}$. Найти потенциал поля в точке $\boldsymbol{C}$, расположенной на оси стержня на расстоянии, равном длине стержня от его ближайшего конца.

<u>Решение.</u> Разобьем стержень на элементарные участки длиной $d\ell$ с зарядом dQ. Каждый такой участок можно принять за точечный заряд, создающий по формуле (2.12) потенциал

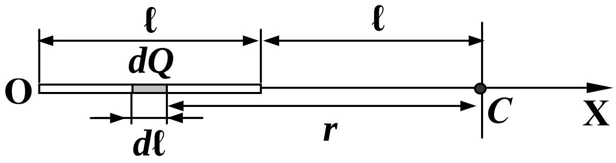


Рис. 31.

$$d\varphi = k\frac{dQ}{r},$$

где r – расстояние от элемента $d\ell$ до точки C;

$dQ = \tau d\ell$ – из определения линейной плотности заряда (1.3).

Потенциал результирующего поля

$$\varphi = \int d\varphi = \int k\frac{dQ}{r},$$

где интегрирование ведется по всему заряду.

Поскольку требуется найти потенциал в точке, лежащей на оси стержня, введем ось **OX** (рис. 31). Тогда длина элемента $d\ell = dx$, а расстояние от этого элемента до точки C $r = x$, которое изменяется от ℓ до 2ℓ. Тогда потенциал в точке C вычисляется так:

$$\varphi = \int_{a}^{a+\ell} k\frac{\tau dx}{x} = k\tau\int_{a}^{a+\ell}\frac{dx}{x} = k\tau\ln\frac{2\ell}{\ell}.$$

С учетом того, что $\tau = \frac{Q}{\ell}$, окончательно получим:

$$\varphi = k\frac{Q}{\ell}\ln 2.$$

<u>Задача 2.12.</u> Тонкий диск радиуса ***R*** равномерно заряжен с поверхностной плотностью **σ**. Найти потенциал поля в точке ***A***, лежащей на оси диска на расстоянии ***a*** от него.

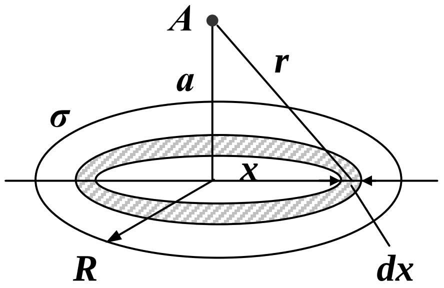


Рис. 32.

<u>Решение.</u> Чтобы найти потенциал в точке ***A***, надо применить принцип суперпозиции полей (2.11). Разобьем диск на элементарные кольца толщиной ***dx*** (рис. 32). Площадь кольца радиуса ***x***

$$S = 2\pi x dx,$$

а заряд кольца (из формулы (1.4))

$$Q = \sigma S = 2\pi\sigma x dx.$$

Потенциал поля элементарного кольца равен сумме потенциалов, созданных всеми его точечными элементами. Так как эти элементы находятся на одинаковом расстоянии от точки ***A***, то, заменив заряд кольца точечным зарядом той же величины, удаленным на расстоянии

$$r = \sqrt{a^2 + x^2}$$

от точки ***A***, найдем по формуле (2.12) потенциал элементарного кольца:

$$d\varphi = k\frac{Q}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi\sigma x}{\sqrt{a^2 + x^2}}dx = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{\sigma x}{\sqrt{a^2 + x^2}}d\,.$$

Чтобы определить потенциал диска, надо проинтегрировать потенциалы элементарных колец:

$$\varphi = \int d\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^r \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{a^2 + r^2} - a\right).$$

3. СВЯЗЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЁННОСТЬЮ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ И ПОТЕНЦИАЛОМ

Как было отмечено выше, электростатическое поле можно описать либо с помощью векторной величины $\vec{E}$, являющейся силовой характеристикой поля, либо с помощью скалярной величины **φ**, являющейся энергетической характеристикой поля. Связь между этими величинами аналогична связи между потенциальной энергией и консервативной силой:

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right) = -\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\varphi = -\vec{\nabla}\varphi \qquad (3.1)$$

где $\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\varphi$ – градиент потенциала, ВФВ, равная возрастанию потенциала в определенном направлении. Знак минус показывает, что вектор напряжённости поля направлен в сторону **убывания** потенциала (рис. 29).

Эта формула выражает **фундаментальную связь между напряженностью и потенциалом: напряжённость поля равна градиенту потенциала со знаком минус**.

Если перемещение происходит только вдоль направления оси ОХ, то можно записать:

$$E_X = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Связь между напряжённостью и потенциалом позволяет по известной напряжённости поля найти разность потенциалов между двумя произвольными точками:

$$d\varphi = E\,dx; \quad \Delta\varphi = \int_{X_1}^{X_2} d\varphi = \int_{X_1}^{X_2} E\,dx\,.$$

Рассмотрим частные случаи, используя формулы напряженности электростатического поля, выведенные ранее с использованием теоремы Остроградского – Гаусса (раздел 2.2).

- <u>Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости</u>

Напряжённость поля, согласно выражению (2.6) (см. рис. 17):

$$\boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0};$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{x} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} d\boldsymbol{x} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1). \tag{3.2}$$

- <u>Поле двух бесконечных параллельных разноимённо заряженных плоскостей</u>

Разность потенциалов между плоскостями, расстояние между которыми равно $\boldsymbol{d}$:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^{d} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{x} = \int_0^{d} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d\boldsymbol{x} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\boldsymbol{d}. \tag{3.3}$$

- <u>Поле равномерно заряженного бесконечного цилиндра (нити)</u>

Напряжённость поля (2.5) зависит от расстояния до оси цилиндра $\boldsymbol{r} > \boldsymbol{R}$ (см. рис. 16).

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{\boldsymbol{r}}.$$

Разность потенциалов между точками, лежащими на расстояниях $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{d\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r}} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\boldsymbol{r}_2}{\boldsymbol{r}_1} \tag{3.4}$$

- <u>Поле равномерно заряженной сферы</u>

Разность потенциалов между точками, лежащими на расстояниях $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ от центра сферы:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{r} = \int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{k}\frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{r}^2}d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{kQ}\left(\frac{1}{\boldsymbol{r}_1} - \frac{1}{\boldsymbol{r}_2}\right). \tag{3.5}$$

► Если принять $r_1 = r$ и $r_2 = \infty$, то потенциал поля вне сферической поверхности задаётся выражением

$$\varphi = k\frac{Q}{r}, \tag{3.6}$$

где $r > R$ – расстояние от центра сферы.

► Так как напряженность $\vec{E}$ внутри сферы равна нулю (см. рис. 19), разность потенциалов тоже равна нулю. Следовательно, внутри сферической поверхности потенциалы точек одинаковы $(\varphi = \mathrm{const})$ и равны потенциалу на поверхности сферы (рис. 33):

$$\varphi = k\frac{Q}{R}, \tag{3.7}$$

где R – радиус сферы.

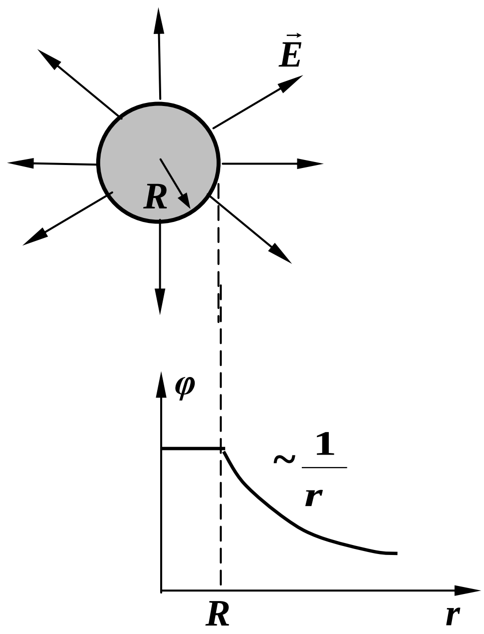


Рис. 33.

• <u>Поле объёмно заряженного шара.</u>

Разность потенциалов вне шара между точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от его центра, определяется так же, как и для сферы (3.5).

В любой точке внутри шара $r < R$ напряжённость поля, согласно (2.9):

$$E = k\frac{Q}{R^3}r.$$

Разность потенциалов

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E\,dr = \int_{r_1}^{r_2} k\frac{Q}{R^3}r\,dr = k\frac{Q}{2R^3}\left(r_2^2 - r_1^2\right). \tag{3.8}$$

4. РАБОТА ПОЛЯ ПО ПЕРЕМЕЩЕНИЮ ЗАРЯДА. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

Если в электростатическом поле, созданном неподвижным точечным зарядом $\boldsymbol{Q}$, вдоль произвольной траектории перемещать другой точечный заряд $\boldsymbol{q}$, то сила, приложенная к заряду $\boldsymbol{q}$, совершает работу. Можно доказать, что эта работа не зависит от траектории перемещения, а определяется только начальной и конечной точками. Следовательно, электростатическое поле точечного заряда является ***потенциальным,*** а электростатические силы - ***консервативными.***

Согласно теореме о потенциальной энергии, работа консервативных сил совершается за счёт убыли потенциальной энергии. Поэтому работу сил электростатического поля можно представить как разность потенциальных энергий, которыми обладает точечный заряд $\boldsymbol{q}$ в начальной и конечной точках поля заряда $\boldsymbol{Q}$:

$$A_{12} = -\Delta W = -(W_{п2} - W_{п1}) = W_{п1} - W_{п2}. \tag{4.1}$$

Выразив потенциальную энергию из формулы (2.10), получим формулу ***работы сил электростатического поля по перемещению заряда*** :

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = q\Delta\varphi. \tag{4.2}$$

Отсюда можно выразить разность потенциалов:

$$\Delta\varphi = \frac{A_{12}}{q_+}. \tag{4.3}$$

<u>Разность потенциалов</u> численно равна работе, совершаемой электростатическими силами по перемещению единичного положительного точечного заряда из начальной точки в конечную.

Если заряд $\boldsymbol{q}_+$ перемещается в бесконечность, т. е. $\boldsymbol{r}_2 \to \infty \Rightarrow \varphi_2 = 0$, то можно дать еще одно определение потенциала:

$$\varphi = \frac{A_{1\to\infty}}{q_+}.$$

Потенциал поля в данной точке численно равен работе сил электростатического поля по перемещению единичного положительного точечного заряда из данной точки в бесконечность.

☝☝☝ **<u>Обратите внимание</u>**:

- если поле совершает **положительную** работу, то **потенциальная энергия** заряда в поле **уменьшается**. Одновременно, согласно закону сохранения энергии, **растет его кинетическая энергия**. Наоборот, если работа **отрицательна** (например, при движении положительно заряженной частицы против направления поля), то **потенциальная энергия растет, а кинетическая – уменьшается,** частица тормозится;
- работа внешних сил по перемещению заряда численно равна работе сил поля, взятой со знаком ″ – ″(например, работа по раздвижению одноименных зарядов < 0);
- работа, совершаемая при перемещении заряда во внешнем электростатическом поле по любому замкнутому пути ***L*** равна нулю:

$$\oint_L dA = \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \oint_L E_{\ell}\, d\ell = 0 . \qquad (4.4)$$

Это является достаточным признаком консервативности поля.

- **Циркуляция вектора напряжённости электростатического поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю**.

Электростатическое поле может по-разному влиять на движение заряда. Это зависит от знака заряда, направления скорости и направления напряженности поля.

► Если положительно заряженная частица движется по направлению линий напряженности, то со стороны поля на нее действует сила, ***сонаправленная*** со скоростью частицы. Эта сила вызывает ускоренное движение частицы и, следовательно, увеличение ее кинетической энергии. Если положительно заряженная частица движется против поля, то сила, действующая со стороны поля, направлена против скорости частицы и скорость частицы уменьшается. Таким образом, ***положительно заряженную частицу электростатическое поле ускоряет, если частица движется по полю, и замедляет, если частица движется против поля.***

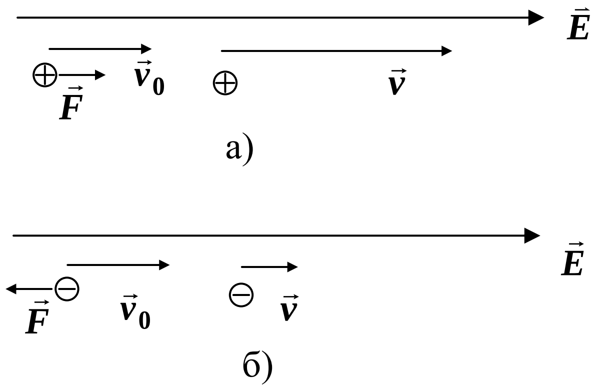


Рис. 34

► Сила, действующая на отрицательную частицу со стороны поля, направлена в сторону, противоположную напряженности, поэтому ***отрицательная частица, движущаяся по полю, замедляется, а движущаяся против поля – ускоряется***.

Тело, находящееся в потенциальном поле, обладает потенциальной энергией. Если в теорему о потенциальной энергии подставить потенциал точечного заряда (2.12), то можно вывести формулу **потенциальной энергии взаимодействия точечных зарядов:**

$$W_{\text{п}} = k\frac{q_1 q_2}{r}. \quad (4.5)$$

Потенциальная энергия взаимодействия точечных зарядов равна работе электростатического поля по перемещению одного из этих зарядов из данной точки пространства в бесконечность.

Потенциальная энергия взаимодействия одноимённых зарядов (энергия отталкивания) положительна, а разноимённых (энергия притяжения) – отрицательна.

По мере уменьшения взаимного расстояния энергия взаимодействия растет по модулю, а при удалении в бесконечность ($r \to \infty$) стремится к нулю.

Если поле создаётся системой n точечных зарядов, то работа, совершаемая над зарядом q_+, равна алгебраической сумме работ сил полей всех зарядов кроме q_+, а потенциальная энергия – сумме потенциальных энергий, создаваемых всеми зарядами, кроме q_+:

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i = q_+ \sum_{i=1}^{n} k\frac{Q_i}{r_i}. \quad (4.6)$$

Для решения задач используется формула потенциальной энергии, выраженная через потенциал поля. В случае n неподвижных зарядов энергия системы

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \varphi_i, \quad (4.7)$$

где φ_i – потенциал поля в той точке, где находится заряд q_i, создаваемого всеми (n-1) зарядами, кроме i – го.

Примеры решения задач

<u>Задача 4.1</u>. Электрон и протон, обладающие одинаковой кинетической энергией $\boldsymbol{W_0}$, влетели в однородное электростатическое поле в направлении силовых линий, Найти скорости частиц после того, как они прошли одинаковую разность потенциалов $\boldsymbol{\Delta\varphi}$.

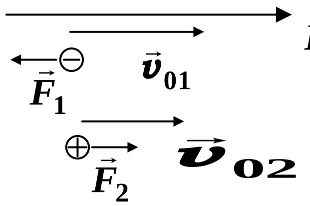


Рис. 35

<u>Решение</u>. На электрон и протон со стороны электростатического поля действует сила $\vec{F}$. Так как у электрона отрицательный заряд, а у протона - положительный, то сила $\vec{F}_1$, действующая на электрон, направлена против поля, а сила $\vec{F}_2$, действующая на протон, направлена по полю (рис. 35). Вследствие этого электрон будет замедляться, т. е. терять энергию, а протон – ускоряться, т. е. приобретать энергию.

Работа сил поля равна изменению кинетической энергии частицы:

$$\boldsymbol{A = \Delta W_{кин}}.$$

Работа сил поля по перемещению заряда

$$\boldsymbol{A = q\,\Delta\varphi}$$

Изменение кинетической энергии протона > 0, так как энергия увеличивается:

$$\Delta W_p = W - W_0 = \frac{m_p v_p^2}{2} - W_0.$$

Изменение кинетической энергии электрона < 0, так как энергия уменьшается:

$$\Delta W_e = -(W - W_0) = -\left(\frac{m_e v_e^2}{2} - W_0\right).$$

Приравняв работу и изменение энергии, выразим скорость частиц.

Для протона:

$$q_p\Delta\varphi = \frac{m_p v_p^2}{2} - W_0 \Rightarrow \quad v_p = \sqrt{\frac{2(W_0 + q_p\Delta\varphi)}{m_p}}.$$

Для электрона:

$$q_e\Delta\varphi = -\left(\frac{m_e v_e^2}{2} - W_0\right) = W_0 - \frac{m_e v_e^2}{2} \Rightarrow \quad v_e = \sqrt{\frac{2(W_0 - q_e\Delta\varphi)}{m_e}}.$$

Задача 4.2. Найти энергию взаимодействия трех точечных зарядов Q_1, Q_2 и Q_3, находящихся на одной прямой. Расстояние между соседними зарядами равно a (рис. 36).

Решение. Энергия системы зарядов равна сумме энергий всех зарядов:

$$W = W_1 + W_2 + W_3.$$

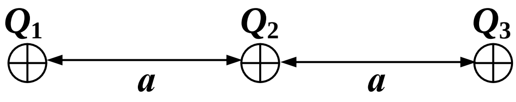


Рис. 36.

Энергия первого заряда Q_1

$$W_1 = \frac{1}{2}Q_1(\varphi_2 + \varphi_3),$$

где φ_2, φ_3 – потенциал поля, созданного зарядами Q_2 и Q_3 соответственно в точке, где находится заряд Q_1.

Аналогично находится потенциальная энергия зарядов Q_2 и Q_3. Подставив в формулу потенциал поля точечного заряда, получим:

$$W = \frac{1}{2}\left[Q_1(\varphi_2 + \varphi_3) + Q_2(\varphi_1 + \varphi_3) + Q_3(\varphi_1 + \varphi_2)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[Q_1 k\left(\frac{Q_2}{a} + \frac{Q_3}{2a}\right) + Q_2 k\left(\frac{Q_1}{a} + \frac{Q_3}{a}\right) + Q_3 k\left(\frac{Q_1}{2a} + \frac{Q_2}{a}\right)\right] =$$

$$\frac{k}{2a}\left[Q_1(Q_2 + 0{,}5Q_3) + Q_2(Q_1 + Q_3) + Q_3(0{,}5Q_1 + Q_2)\right].$$

5. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЁМКОСТЬ. КОНДЕНСАТОРЫ

Электрическая ёмкость уединённого проводника – СФВ, характеризующая способность проводника накапливать электрические заряды и численно равная заряду, который необходимо сообщить проводнику, чтобы его потенциал относительно бесконечно удалённой точки стал равен 1 В:

$$C = \frac{Q}{\varphi}.$$

Единица измерения – Фарад. [С] =Кл/В = Ф.

Конденсатор* –** система, состоящая из двух разноименно заряженных ***сильновзаимодействующих параллельных проводников (обкладок), разделённых слоем диэлектрика, толщина которого намного меньше площади пластин (рис. 37). Для обеспе́чения сильного взаимодействия поле, создаваемое накапливаемыми зарядами, должно быть сосредоточено в узком зазоре между обкладками. Этому условию удовлетворяют:

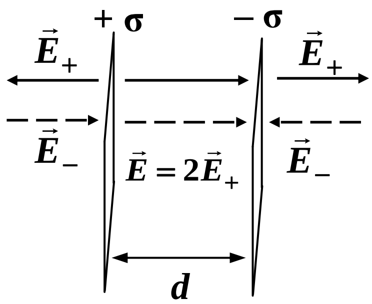


Рис. 37.

– две плоские пластины (плоский конденсатор);
– два коаксиальных цилиндра (цилиндрический конденсатор);
– две концентрические сферы (сферический конденсатор).

Ёмкость конденсатора - СФВ, характеризующая способность конденсатора накапливать электрические заряды и численно равная заряду, который может быть перенесён с одной обкладки на другую, чтобы разность потенциалов между ними стала равной 1 В:

$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi}. \quad (5.1)$$

- Ёмкость заряженного шара (сферы)

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R, \quad (5.2)$$

где R – радиус шара (сферы);

ε – диэлектрическая проницаемость окружающей среды.

- Ёмкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}, \qquad (5.3)$$

где S – площадь пластин;

d – расстояние между пластинами;

ε – диэлектрическая проницаемость материала диэлектрика (между обкладками).

- Ёмкость цилиндрического конденсатора

$$C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 \ell}{\ln R_2 / R_1}, \qquad (5.4)$$

где ℓ – высота;

R_1 и R_2 – радиусы внутреннего и внешнего цилиндров.

- Ёмкость сферического конденсатора

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}, \qquad (5.5)$$

где R_1 и R_2 –внутренний и внешний радиусы сфер.

На практике часто ёмкости соединяют в батареи, при этом используются их параллельное и последовательное соединения.

Параллельное соединение конденсаторов

Соединение называется параллельным, если все элементы включены между одними и теми же точками цепи (рис. 38).

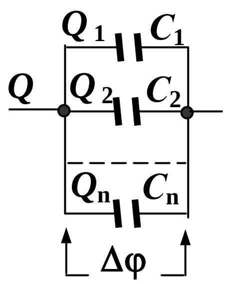


Рис. 38.

При параллельном соединении разности потенциалов обкладок всех конденсаторов равны между собой. В соответствии с законом сохранения заряда, общий заряд системы равен сумме зарядов конденсаторов:

$$\Delta\varphi = \mathrm{const} \quad Q = \sum_{i=1}^{N} Q_i;$$

$$C_{\text{пар}} = \sum_{i=1}^{n} C_i = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_n. \qquad (5.6)$$

Последовательное соединение конденсаторов

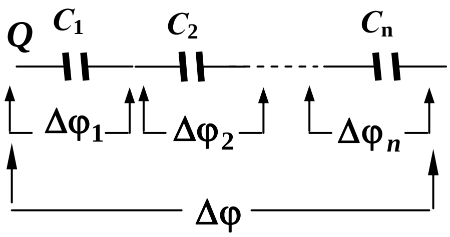


Рис. 39.

Соединение называется последовательным, если каждый вывод элемента цепи соединён только с одним выводом другого элемента цепи (рис. 39).

При последовательном соединении заряды всех конденсаторов одинаковы, а разность потенциалов на концах батареи равна сумме разностей потенциалов конденсаторов:

$$\boldsymbol{Q} = \mathbf{const}; \quad \Delta\varphi = \sum_{i=1}^{N} \Delta\varphi_i$$

$$\frac{1}{C_{\text{посл}}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \ldots + \frac{1}{C_N} \tag{5.7}$$

Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{C\,\Delta\varphi^2}{2} = \frac{Q\,\Delta\varphi}{2} = \frac{Q^2}{2C}.$$

Энергия электростатического поля

$$W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} V,$$

где $\boldsymbol{E}$ – напряжённость электростатического поля;

$\boldsymbol{V}$ – объём конденсатора;

$\boldsymbol{\varepsilon}$ – диэлектрическая проницаемость среды.

Объёмная плотность энергии – энергия в единице объема:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2},$$

где $\boldsymbol{D}$ – электрическое смещение (индукция электростатического поля).

Задания для самостоятельной работы к главе 5

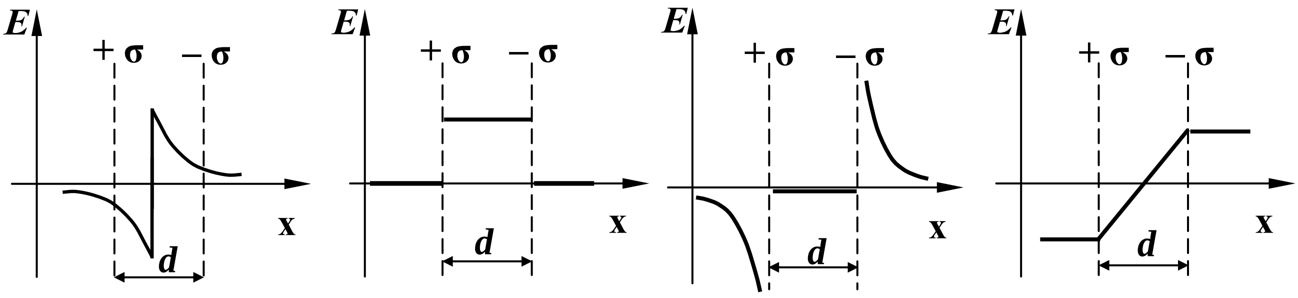
1. Выполнив построения, показать, где сосредоточено электростатическое поле, ($|\boldsymbol{\sigma_1}| = |\boldsymbol{\sigma_2}|$) в случаях:

   а) двух разноименно заряженных пластин;
   б) двух одноименно заряженных пластин.

2. От чего зависит емкость плоского конденсатора?

   а) $\boldsymbol{\varepsilon}$; б) $\boldsymbol{q}$; в) $\boldsymbol{U}$; г) $\boldsymbol{S}$; д) $\boldsymbol{d}$; е) $\left|\vec{E}\right|$.

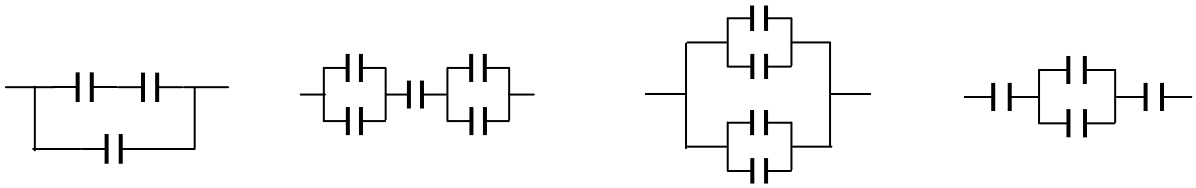
3. Найти правильный график зависимости $\boldsymbol{E(x)}$ поля плоского заряженного конденсатора (ось **OX** перпендикулярна пластинам конденсатора).



а) б) в) г)

4. Двум металлическим шарам разного радиуса сообщили одинаковые заряды. Будут ли переходить заряды с одного шара на другой, если их соединить проводником?

5. Определить общую емкость батареи конденсаторов. Емкость каждого конденсатора равна C



а) б) в) г)

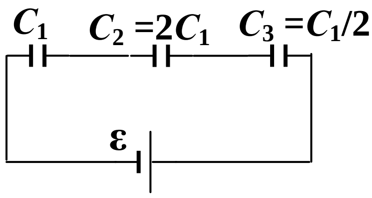
д) е)

6. Во сколько раз изменится емкость батареи из трех одинаковых конденсаторов, если в начале они соединяются последовательно, а потом параллельно?

а) увеличится в 3 раза;	б) увеличится в 9 раз;
в) увеличится в 27 раз;	г) уменьшится в 3 раза;
д) уменьшится в 9 раз;	е) не изменится.

7. Три конденсатора соединены, как показано на схеме. Сравните напряжение на конденсаторах.

а) $U_2 > U_1 > U_3$;	б) $U_3 > U_1 > U_2$;
в) $U_1 > U_2 = U_3$;	г) $U_1 = U_2 = U_3$;
д) $U_1 > U_2 > U_3$;	е) $U_3 > U_2 > U_1$.



Примеры решения задач

<u>Задача 5.1.</u> В плоский конденсатор вдвинули плитку парафина толщиной d, которая вплотную прилегает к его пластинам. На сколько нужно увеличить расстояние между пластинами Δd, чтобы получить прежнюю емкость, которая была до вдвижения плитки? Диэлектрическая проницаемость парафина ε.

<u>Решение</u>. Первоначальная емкость конденсатора (рис. 39, а)

$$C_1 = C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \Rightarrow \varepsilon_0 S = Cd\,.$$

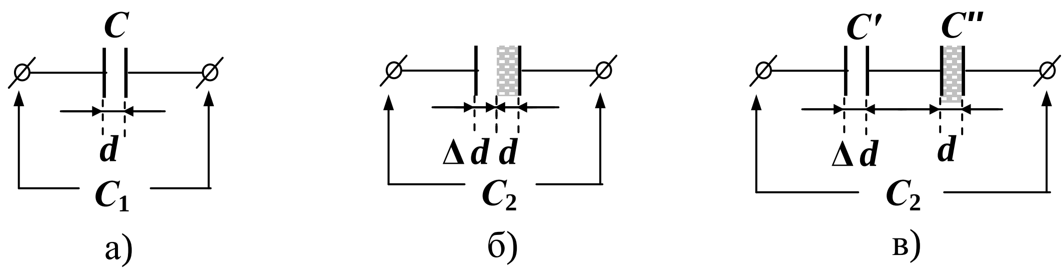


Рис. 39.

После того как в конденсатор вдвинули диэлектрическую плитку и раздвинули пластины, то емкость получившегося конденсатора (рис. 39, б) можно определить как емкость батареи, состоящей из двух конденсаторов, соединенных последовательно (рис. 39, в), один из которых содержит диэлектрик – парафин толщиной d, а другой – воздушный. Расстояние между обкладками воздушного конденсатора равно расстоянию, на которое нужно раздвинуть пластины, т. е. Δd. При последовательном соединении емкость определяется по формуле

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{C'} + \frac{1}{C''} = \frac{C' + C''}{C'C''} \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{C'C''}{C' + C''}\,.$$

Емкость воздушного конденсатора

$$C' = \frac{\varepsilon_0 S}{\Delta d} = \frac{Cd}{\Delta d}\,.$$

Емкость конденсатора с парафиновым диэлектриком

$$C'' = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d} = C\varepsilon\,.$$

Получившаяся емкость

$$C_2 = \frac{\dfrac{Cd}{\Delta d} C\varepsilon}{\dfrac{Cd}{\Delta d} + C\varepsilon} = \frac{\dfrac{d}{\Delta d} C^2 \varepsilon}{C\left(\dfrac{d}{\Delta d} + \varepsilon\right)} = \frac{\dfrac{d}{\Delta d} C\varepsilon}{\dfrac{d}{\Delta d} + \varepsilon} = \frac{dC\varepsilon}{d + \Delta d \varepsilon}\,.$$

По условию задачи емкость должна остаться прежней, т. е. $C_1 = C_2$, или

$$\frac{Cd}{\Delta d} = \frac{dC\varepsilon}{d + \Delta d\varepsilon}; \quad \frac{1}{\Delta d} = \frac{\varepsilon}{d + \Delta d\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \Delta d = d\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Задача 5.2. Плоский воздушный конденсатор ёмкостью $\boldsymbol{C}$ заряжается от батареи до разности потенциалов $\boldsymbol{\Delta\varphi_1}$. Определить разность потенциалов на обкладках конденсатора $\boldsymbol{\Delta\varphi_2}$ после увеличения расстояния между пластинами в 2 раза и работу внешних сил А по раздвижению пластин для двух случаев:

а) если конденсатор отключён от источника;

а) если конденсатор не отключён от источника.

Решение.

а) Источник отключен.

Если конденсатор **отключён от источника**, то **заряд**, накопленный конденсатором, **не изменяется**, т. е.

$$\boldsymbol{Q = \text{const}}.$$

Из определения емкости конденсатора выразим заряд до и после раздвижения пластин и приравняем правые части:

$$\boldsymbol{Q_1 = \Delta\varphi_1 C_1}; \qquad \boldsymbol{Q_2 = \Delta\varphi_2 C_2};$$

$$\boldsymbol{Q_1 = Q_2};$$

$$\boldsymbol{\Delta\varphi_1 C_1 = \Delta\varphi_2 C_2. \Rightarrow \Delta\varphi_2 = \Delta\varphi_1 \frac{C_1}{C_2}}.$$

Выразим емкость плоского воздушного конденсатора в начальном и конечном состояниях:

$$\boldsymbol{C_1 = C = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1}; \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_2} = \frac{\varepsilon_0 S}{2d_1} = \frac{C}{2}}.$$

Тогда разность потенциалов в конечном состоянии:

$$\boldsymbol{\Rightarrow \Delta\varphi_2 = \Delta\varphi_1 \frac{C \cdot 2}{C} = 2\Delta\varphi_1}.$$

Работа по раздвижению пластин равна изменению энергии электростатического поля конденсатора:

$$\boldsymbol{A = \Delta W = W_2 - W_1}.$$

Так как нам известны емкости конденсаторов и разности потенциалов в начальном и конечном состояниях, то работа по раздвижению пластин

$$\boldsymbol{A = \frac{C_2\Delta\varphi_2^2}{2} - \frac{C_1\Delta\varphi_1^2}{2} = \frac{C \cdot 4 \cdot \Delta\varphi_1^2}{4} - \frac{C\Delta\varphi_1^2}{2} = \frac{C\Delta\varphi_1^2}{2}}.$$

б) Источник не отключен.

Если конденсатор **не отключён от источника**, то **разность потенциалов не изменяется:**

$$\Delta\varphi = \mathrm{const};$$

$$\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2.$$

Тогда работа по раздвижению пластин

$$A = W_1 - W_2 = \frac{C_1\Delta\varphi_1^2}{2} - \frac{C_2\Delta\varphi_2^2}{2} = \frac{C\ \Delta\varphi_1^2}{2} - \frac{C\,\Delta\varphi_1^2}{4} = \frac{C\Delta\varphi_1^2}{4}.$$

При отключенном источнике энергия увеличилась, а при включенном – уменьшилась.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Металлический шар диаметром $\boldsymbol{d}$ = 20 см имеет заряд $\boldsymbol{Q} = 3{,}14 \cdot 10^{-7}$Кл. Найти поверхностную плотность заряда.

(2,5 мкКл/м^2)

2. Заряженный шарик приводят в соприкосновение с таким же незаряженным шариком. На расстоянии $\boldsymbol{r}$ = 15 см шарики взаимодействуют с силой $\boldsymbol{F}$ = 1 мН. Найти первоначальный заряд заряженного шарика.

(0,1 мкКл)

3. Два одинаковых заряженных шарика подвешаны на нитях одинаковой длины по 2 м каждая. Заряд каждого шарика $\boldsymbol{q}$ = 9 нКл. Расстояние между центрами шариков $\boldsymbol{r}$ = 0,3 м. Найти силу натяжения нитей.

(2,7 $\cdot 10^5$ Н)

4. Два точечных заряда, находясь в воздухе на расстоянии $\boldsymbol{r_1}$ = 40 см друг от друга, взаимодействуют с некоторой силой. На каком расстоянии $\boldsymbol{r_2}$ нужно поместить эти заряды в масле ($\boldsymbol{\varepsilon_м}$ = 2), чтобы сила их взаимодействия осталась прежней?

(0,2 м)

5. Шар равномерно заряжен с поверхностной плотностью заряда $\boldsymbol{\sigma} = 6{,}4 \cdot 10^{-8}$ Кл/м^2. Определить напряженность электрического поля в точке, отстоящей от центра шара на $\boldsymbol{r = 6R}$.

(201 В/м)

6. Найти силу, действующую на заряд $\boldsymbol{Q} = 2 \cdot 10^{-9}$Кл, если он помещён на расстоянии $\boldsymbol{r}$ =2 см от заряженной нити с линейной плотностью заряда $\boldsymbol{\tau} = 2 \cdot 10^{-9}$Кл/см.

(350 мкН)

7. Заряженная пылинка влетает в вертикальное однородное электрическое поле напряжённостью $\boldsymbol{E} = 1{,}3 \cdot 10^5$ В/м вдоль силовых линий. Какой заряд она должна иметь, чтобы находиться в равновесии? Масса пылинки $\boldsymbol{m} = 2 \cdot 10^{-12}$ кг.

($1{,}5 \cdot 10^{-16}$ Кл)

8. ∗ Расстояние между двумя точечными зарядами q_1 = 1 мкКл и $q_2 = — q_1$ равно 10 см. Определить силу F, действующую на точечный заряд q = 0,l мкКл, удаленный на r_1 = 6 см от первого заряда и на r_2 = 8 см – от второго.

($F = kqq\sqrt{\frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^4}}$ = 287 мН)

9. ∗ Два положительных точечных заряда q и $4q$ закреплены на расстоянии ℓ = 60 см друг от друга. Определить, в какой точке на прямой, проходящей через заряды, следует поместить третий заряд q_1, так, чтобы он находился в равновесии. Указать, какой знак должен иметь этот заряд для того, чтобы равновесие было устойчивым, если перемещения заряда возможны только вдоль прямой, проходящей через закрепленные заряды.

(Между зарядами на расстоянии x = 40 см от заряда $4q$; положительный)

10. ∗ Две параллельные, бесконечно длинные прямые нити несут заряд, равномерно распределенный по длине с линейными плотностями τ_1 =0,1 мкКл/м и τ_2 = 0,2 мкКл/м. Определить силу F взаимодействия, приходящуюся на отрезок нити длиной 1 м. Расстояние r между нитями равно 10 см.

($F = \tau_1 \tau_2/\varepsilon_0$ = 1,13 мН)

11. ∗ Металлический шар имеет заряд q_1 = 0,1 мкКл. На расстоянии, равном радиусу шара, от его поверхности находится конец нити, вытянутой вдоль силовой линии. Нить несет равномерно распределенный по длине заряд q_2 = 10 нКл. Длина нити равна радиусу шара. Определить силу F, действующую на нить, если радиус R шара равен 10 см.

($F = q_1 q_2/(24\pi\varepsilon_0 R^2)$ = 150 мкН)

12. ∗∗ Вычислить отношение электростатической и гравитационной сил взаимодействия между двумя электронами, между двумя протонами. При каком значении удельного заряда q/m частицы эти силы оказались бы равными по модулю?

(Отношение Fэл/Fгр равно соответственно $4\cdot10^{42}$ и $1\cdot10^{36}$;
$q/m = 0{,}86\cdot10^{-10}$ Кл/кг)

13. ∗∗ Два положительных заряда q_1 и q_2 находятся в точках с радиус-векторами r_1 и r_2. Найти отрицательный заряд q_3 и радиус-вектор $\boldsymbol{r_3}$ точки, в которую его надо поместить, чтобы сила, действующая на каждый из этих трех зарядов, была равна нулю

$$\left(q_3 = \frac{-q_1 q_2}{(\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2})^2}; \quad r_3 = \frac{r_1\sqrt{q_2}+r_2\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}} \right)$$

14. Бесконечная плоскость заряжена с поверхностной плотностью заряда $\boldsymbol{\sigma} = 10^{-6}$Кл/м^2. На некотором расстоянии от неё параллельно ей расположен круг радиусом $\boldsymbol{R}$ =10 см. Вычислить поток вектора напряжённости $\boldsymbol{\Phi}$ через площадь этого круга.

$$\left(\Phi = \frac{\sigma\pi R^2}{2\varepsilon_0} = 1{,}8 \text{ кВб}\right)$$

15. ∗ Расстояние $\boldsymbol{d}$ между двумя точечными зарядами $\boldsymbol{q_1}$ = +8 нКл и $\boldsymbol{q_2}$ = — 5,3 нКл равно 40 см. Вычислить напряженность $\boldsymbol{E}$ поля в точке, лежащей посередине между зарядами. Чему равна напряженность, если второй заряд будет положительным?

(2,99 кВ/м; 607 В/м)

16. ∗ Электрическое поле создано двумя точечными зарядами $\boldsymbol{q_1}$ = 10нКл и $\boldsymbol{q_2}$ = — 20 нКл, находящимися на расстоянии $\boldsymbol{d}$ = 20 см друг от друга. Определить напряженность $\boldsymbol{E}$ поля в точке, удаленной от первого заряда на $\boldsymbol{r_1}$ = 30 см, от второго – на $\boldsymbol{r_2}$ = 50 см.

(280 В/м)

17. ∗На металлической сфере радиусом $\boldsymbol{R}$ = 10 см находится заряд $\boldsymbol{q}$ = l нКл. Определить напряженность $\boldsymbol{E}$ электрического поля в следующих точках: а) на расстоянии $\boldsymbol{r_1}$ =8 см от центра сферы; б) на ее поверхности; в) на расстоянии $\boldsymbol{r_2}$ = 15 см от центра сферы.

(а) 0; б) 900В/м; в) 400 В/м)

18. ∗ Две концентрические металлические заряженные сферы радиусами $\boldsymbol{R_1}$ = 6 см и $\boldsymbol{R_2}$ = 10 см несут соответственно заряды $\boldsymbol{q_1}$ = 1 нКл и $\boldsymbol{q_2}$ = —0,5 нКл. Найти напряженности $\boldsymbol{E}$ поля в точках, отстоящих от центра сфер на расстояниях $\boldsymbol{r_1}$ = 5 см, $\boldsymbol{r_2}$ = 9 см, $\boldsymbol{r_3}$ = 15 см.

$$\left(E_1 = 0; \quad E_2 = k\frac{q_1}{r_2^2} = 1{,}11 \text{ кВ/м}; \quad E_3 = k\frac{q - |q_2|}{r_3^2} = 200 \quad \text{В/м}\right)$$

19. * Очень длинная тонкая прямая проволока несет заряд, равномерно распределенный по всей ее длине. Вычислить линейную плотность $\boldsymbol{\tau}$ заряда, если напряженность $\boldsymbol{E}$ поля на расстоянии $\boldsymbol{a}$ = 0,5 м от проволоки против ее середины равна 200 В/м.

(5,55 нКл/м)

20. * Прямой металлический стержень диаметром $\boldsymbol{d}$ = 5 см и длиной $\boldsymbol{\ell}$ = 4 м несет равномерно распределенный по его поверхности заряд $\boldsymbol{q}$ = 500 нКл. Определить напряженность $\boldsymbol{E}$ поля в точке, находящейся против середины стержня на расстоянии $\boldsymbol{a}$ = 1 см от его поверхности.

(64,3 кВ/м)

21. * Две длинные тонкостенные коаксиальные трубки радиусами $\boldsymbol{R_1}$ = 2 см и $\boldsymbol{R_2}$ = 4 см несут заряды, равномерно распределенные по всей длине с линейными плотностями $\boldsymbol{\tau_1}$ = 1 нКл/м и $\boldsymbol{\tau_2}$ = — 0,5 нКл/м. Пространство между трубками заполнено эбонитом. Определить напряженность $\boldsymbol{E}$ поля в точках, находящихся на расстояниях $\boldsymbol{r_1}$ = 1 см, $\boldsymbol{r_2}$ = 3 см, $\boldsymbol{r_3}$ = 5 см от оси трубок.

$$\left(E_1 = 0; \quad E_2 = \frac{\tau_1}{2\pi\pi_0 r_2} = 200 \text{ В/м}; \quad E_3 = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2\pi\pi_0 r_3} = 180 \text{ В/м}\right)$$

22. * Электрическое поле создано двумя бесконечными параллельными пластинами, несущими равномерно распределенный по площади заряд с поверхностными плотностями $\boldsymbol{\sigma_1}$ = 2 нКл/м^2 и $\boldsymbol{\sigma_2}$ = — 5 нКл/м^2. Определить напряженность $\boldsymbol{E}$ поля: а) между пластинами; б) вне пластин.

(а) 396 В/м; б) 170 В/м)

23. ** Тонкое полукольцо радиуса $\boldsymbol{R}$ = 20 см заряжено равномерно зарядом $\boldsymbol{q}$ = 0,70 нКл. Найти модуль напряженности электрического поля в центре кривизны этого полукольца.

($E = q/2\pi^2 \varepsilon_0 R^2$= 0,10 кВ/м)

24. ** Кольцо радиуса $\boldsymbol{r}$ из тонкой проволоки имеет заряд $\boldsymbol{q}$. Найти модуль напряженности электрического поля на оси кольца как функцию расстояния $\boldsymbol{\ell}$ до его центра. Исследовать полученную зависимость при $\boldsymbol{\ell} \gg \boldsymbol{r}$. Определить максимальное значение напряженности и соответствующее расстояние $\boldsymbol{\ell}$. Изобразить примерный график функции $\boldsymbol{E(\ell)}$

($E = q\ell/[4\pi\varepsilon_0(r^2+\ell^2)^{3/2}]$. При $\ell >> r$ напряженность $E \approx q/4\pi\varepsilon_0\ \ell^{\,2}$, как для точечного заряда. $E_{\max}=q/6\cdot 3^{1/2}\pi\varepsilon_0\ r^2$ при $\ell = r/2^{1/2}$)

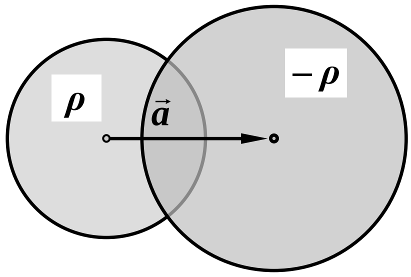
25. ** Очень длинная прямая равномерно заряженная нить имеет линейную плотность заряда $\boldsymbol{\tau}$. Найти модуль и направление напряженности электрического поля в точке, которая отстоит от нити на расстояние $\boldsymbol{y}$ и находится на перпендикуляре к нити, проходящем через один из ее концов.

($E= \tau\ 2^{1/2}/4\pi\varepsilon_0\ y$. Вектор E направлен под углом 45^0 к нити.)

26. ** Шар радиуса $\boldsymbol{R}$ имеет положительный заряд, объемная плотность которого зависит только от расстояния $\boldsymbol{r}$ до его центра как $\boldsymbol{\rho = \rho_o}(1 — \boldsymbol{r/R})$, где $\boldsymbol{\rho_0}$ — постоянная. Полагая, что диэлектрическая проницаемость $\boldsymbol{\varepsilon}$ = 1 всюду, найти:

а) модуль напряженности электрического поля внутри и вне шара как функцию $\boldsymbol{r}$;
б) максимальное значение модуля напряженности $\boldsymbol{E_{max}}$ и соответствующее ему значение $\boldsymbol{r_m}$.

(а) $E = (\rho_o r/3\varepsilon_0)(1\text{-}3r/4R)$ при $r\leq R$, $E = \rho_o R^3/12\varepsilon_0 r^2$ при $r\geq R$;
б) $E_{\max}=\rho_o R/9\varepsilon_0$ при $r_т=2R/3$)



27. ** Найти напряженность $\boldsymbol{E}$ электрического поля в области пересечения двух шаров, равномерно заполненных разноименными по знаку зарядами с объемной плотностью $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{—\rho}$, если расстояние между центрами шаров характеризуется вектором $\vec{\boldsymbol{a}}$, как показано на рисунке.

($E = a\rho/3\varepsilon_0$)

28. Мыльный пузырёк с зарядом $\boldsymbol{Q}$ = 222·пКл находится в равновесии в поле горизонтального плоского конденсатора. Найти разность потенциалов $\boldsymbol{\Delta\varphi}$ между пластинами, если масса пузырька $\boldsymbol{m}$ = 0,01 г, а расстояние между пластинами $\boldsymbol{d}$ = 5 см.

(22 кВ)

29. Металлическому шару радиусом $\boldsymbol{R}$ = 10 см сообщён заряд $\boldsymbol{q}$ = 1 мкКл. Найти потенциал поля в центре, на поверхности и на расстоянии 10 см от поверхности шара.

(45 кВ)

30. ∗ На отрезке тонкого прямого проводника равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\boldsymbol{\tau}$ = 10 нКл/м. Вычислить потенциал $\boldsymbol{\varphi}$, создаваемый этим зарядом в точке, расположенной на оси проводника и удаленной от ближайшего конца отрезка на расстояние, равное длине этого отрезка.

($\varphi = \tau \ln 2/(4\pi\varepsilon_0) = 62{,}4$ В)

31. ∗ Имеются две концентрические металлические сферы радиусами $\boldsymbol{R_1}$ = 3 см и $\boldsymbol{R_2}$ = 6 см. Пространство между сферами заполнено парафином. Заряд $\boldsymbol{q_1}$ внутренней сферы равен —1 нКл, внешний – $\boldsymbol{q_2}$ = 2 нКл. Найти потенциал $\boldsymbol{\varphi}$ электрического поля на расстоянии: а) $\boldsymbol{r_1}$ = 1 см; б) $\boldsymbol{r_2}$ = 5 см; в) $\boldsymbol{r_3}$ = 9 см от центра сфер.

(а) 75 В; б) 135 В; в) 100 В)

32. ∗ Бесконечная плоскость равномерно заряжена с поверхностной плотностью $\boldsymbol{\sigma}$ = 4 нКл/м^2. Определить значение и направление градиента потенциала электрического поля, созданного этой плоскостью.

(grad $\varphi = -E$; $|\text{grad } \varphi| = E = \sigma/(2\varepsilon_0) = 226$ В/м;
градиент направлен к плоскости перпендикулярно ей)

33. ∗∗ Бесконечно длинная прямая нить заряжена равномерно с линейной плотностью $\boldsymbol{\tau}$ = 0,40 мкКл/м. Вычислить разность потенциалов точек 1 и 2, если точка 2 находится дальше от нити, чем точка 1, в $\boldsymbol{m}$ = 2,0 раза.

($\varphi_1 - \varphi_2 = (\tau/2\pi\varepsilon_0)\ln m = 5$кВ)

34. ∗∗ Найти потенциал и напряженность электрического поля в центре полусферы радиуса $\boldsymbol{R}$, заряженной равномерно с поверхностной плотностью $\boldsymbol{\sigma}$.

($\varphi = \sigma R/2\varepsilon_0$, $E = \sigma/4\varepsilon_0$)

35. ∗∗ Заряд $\boldsymbol{q}$ распределен равномерно по объему шара радиуса $\boldsymbol{R}$. Полагая диэлектрическую проницаемость всюду равной единице, найти потенциал:

а) в центре шара;
б) внутри шара как функцию расстояния r от его центра.

(а) $\varphi_0 = 3q/8\pi\varepsilon_0 R$; б) $\varphi = \varphi_0(1 - r^2/3R^2)$, $r \leq R$)

36. Два металлических шара радиусами $\boldsymbol{R_1}$= 2 см и $\boldsymbol{R_2}$= 6 см соединены проводником, ёмкостью которого можно пренебречь. Шарам сообщён заряд $\boldsymbol{Q}$ = 10^{-8}Кл. Определить поверхностную плотность заряда каждого шара $\boldsymbol{\sigma_1}$, $\boldsymbol{\sigma_2}$.

(σ_1 = 499 нКл/м^2; σ_2 = 166 нКл/м^2)

37. Шар радиусом $\boldsymbol{R_1}$ = 6 см заряжен до потенциала $\boldsymbol{\varphi_1}$ = 300 В, а шар радиусом $\boldsymbol{R_2}$ = 4 см заряжен до потенциала $\boldsymbol{\varphi_2}$ = 500 В. Определить потенциал шаров $\boldsymbol{\varphi}$ после соединения.

(380 В)

38. Восемь заряженных капель радиусом $\boldsymbol{r}$ = 1 мм и зарядом $\boldsymbol{q}$ = 10^{-10} Кл каждая сливаются в одну большую каплю. Определить потенциал $\boldsymbol{\varphi}$ большой капли.

(3,6 кВ)

39. Заряженный шар радиусом $\boldsymbol{R_1}$ = 2 см приводится в соприкосновение с незаряженным шаром радиусом $\boldsymbol{R_2}$ = 3 см. После присоединения энергия второго шара стала $\boldsymbol{W'_2}$= 0,4 Дж. Определить потенциал первого шара $\boldsymbol{\varphi_1}$ до соприкосновения.

(1,22 мВ)

40. Между пластинами плоского конденсатора находится плотно прилегающая пластина из стекла ($\boldsymbol{\varepsilon_{ст}}$ = 7). Конденсатор заряжен до разности потенциалов $\boldsymbol{\Delta\varphi_1}$ и отключён от источника. Найти разность потенциалов $\boldsymbol{\Delta\varphi_2}$, если вынуть пластинку.

($\Delta\varphi_2 = \Delta\varphi_1\ \varepsilon_{ст}$)

41. В плоский конденсатор вдвинули вплотную плитку парафина ($\boldsymbol{\varepsilon_п}$ = 2) толщиной $\boldsymbol{d}$ = 1 см. На сколько нужно увеличить расстояние между пластинами, чтобы получить прежнюю емкость?

(0,5 см)

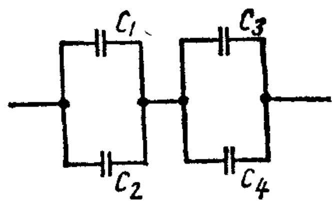
42. ∗ Расстояние между пластинами плоского конденсатора $\boldsymbol{d}$ = 1,33 мм, площадь пластин $\boldsymbol{S}$ = 20 см^2. В пространстве между пластинами конденсатора находятся два слоя диэлектриков: слюды ($\boldsymbol{\varepsilon_1}$ = 6) толщиной $\boldsymbol{d_1}$ = 0,7 мм и эбонита ($\boldsymbol{\varepsilon_2}$ = 2,6) толщиной $\boldsymbol{d_2}$ = 0,3 мм. Определить электроемкость $\boldsymbol{C}$ конденсатора.

$$\left(C = \frac{S\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2(d - d_1 - d_2)} = 31{,}5\ \text{пФ}\right)$$

43. ∗ К воздушному конденсатору, заряженному до разности потенциалов $\Delta\varphi_1$ = 600 В и отключенному от источника напряжения, присоединили параллельно второй незаряженный конденсатор таких же размеров и формы, но с диэлектриком из фарфора. Определить диэлектрическую проницаемость ε фарфора, если после присоединения второго конденсатора разность потенциалов уменьшилась до $\Delta\varphi_2$ =100 В.

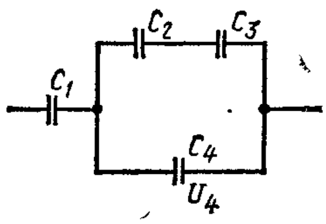
$(\varepsilon = \left(\frac{\Delta\varphi_1}{\Delta\varphi_2} - 1\right) = 5)$

44. ∗ Конденсаторы соединены так, как это показано на схеме. Электроемкости конденсаторов: C_1 = 0,2 мкФ, C_2 = 0,1 мкФ, C_3 = 0,3мкФ, C_4 = 0,4 мкФ. Определить электроемкость C батареи конденсаторов.



$(C=(C_1+C_2)(C_3+C_4)/(C_1+C_2+C_3+C_4)$ = 0,21 мкФ)

45. ∗ Конденсаторы электроемкостями C_1 = 2 мкФ, C_2 = 2 мкФ, C_3 = 3мкФ, C_4 = 1 мкФ соединены так, как указано на схеме Разность потенциалов на обкладках четвертого конденсатора $\Delta\varphi_4$ = 100 В. Найти заряды и разности потенциалов на обкладках каждого конденсатора, а также общий заряд и разность потенциалов батареи конденсаторов.



(200 мкКл; 120 мкКл; 120 мкКл; 100 мкКл; 110 В; 60 В; 40 В; 220 мкКл; 210 В)

46. ∗∗ Найти емкость сферического конденсатора, радиусы обкладок которого равны a и b, причем $a < b$, если пространство между обкладками заполнено:

а) однородным диэлектриком с проницаемостью ε;
б) диэлектриком, проницаемость которого зависит от расстояния r до центра конденсатора как $\varepsilon = \alpha/r$, где α — постоянная.

(а)$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon\, ab/(b-a)$; б) $C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon\alpha/\ln(b/a)$)

47. Разность потенциалов между пластинами плоского воздушного конденсатора $\Delta\varphi$ = 90 В. Площадь каждой пластины $\boldsymbol{S}$ = 60 см^2, её заряд $\boldsymbol{q}$ = 1 нКл. Найти расстояние $\boldsymbol{d}$ между пластинами.

(4,8 мм)

48. Какая будет совершена работа при перемещении точечного заряда $\boldsymbol{q}$ = 20 нКл из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии $\boldsymbol{r}$ = 1 см от поверхности заряженного шара радиусом $\boldsymbol{R}$ = 1 см, если поверхностная плотность заряда $\boldsymbol{\sigma}$ = 10^{-9}Кл/см^2.

(113 мкДж)

49. Электрон, пройдя в плоском конденсаторе путь от одной пластины к другой, приобретает скорость $\boldsymbol{v}$ = 10^{6}м/с. Расстояние между пластинами $\boldsymbol{d}$ = 5,3 мм. Найти разность потенциалов между пластинами $\Delta\varphi$, напряжённость электрического поля $\boldsymbol{E}$ внутри конденсатора и поверхностную плотность заряда $\boldsymbol{\sigma}$ на пластинах.

(2,8 В; 537 В/м; 4,75 нКл/м^2)

50. Плоский воздушный конденсатор с площадью пластин $\boldsymbol{S}$ = 100 см^2 и расстоянием между ними $\boldsymbol{d_1}$ = 1 мм заряжен до $\Delta\varphi_1$ = 100 В. Затем пластины раздвигаются до $\boldsymbol{d_2}$ = 25 мм. Найти энергию конденсатора до $\boldsymbol{W_1}$ и после $\boldsymbol{W_2}$ раздвижения пластин для двух случаев:

а) если источник не отключался;
б) если источник перед раздвижением пластин отключён.

(443 нДж, а) 17,9 нДж, б) 11,08 мкДж)

51. Ёмкость плоского конденсатора $\boldsymbol{C}$ = 110 пФ, площадь одной пластины $\boldsymbol{S}$ = 20 см^2, диэлектрик стекло ($\boldsymbol{\varepsilon}$ = 5). Конденсатор зарядили до $\Delta\varphi_1$ = 600 В и отключили от источника. Какую работу надо совершить, чтобы убрать стекло из конденсатора?

(80 мкДж)

52. Какую работу надо совершить, чтобы увеличить расстояние между пластинами воздушного конденсатора от $\boldsymbol{d_1}$ = 3 см до $\boldsymbol{d_2}$ = 10 см? Площадь пластин $\boldsymbol{S}$ = 100 см^2. Конденсатор подключён к источнику напряжения $\boldsymbol{U}$ = 220 В.

(5·10^{-8} Дж)

53. ** Заряд $\boldsymbol{q}$ распределен равномерно по объему шара радиуса $\boldsymbol{R}$. Считая диэлектрическую проницаемость $\boldsymbol{\varepsilon}$ = 1, найти:

а) собственную электрическую энергию шара;

б) отношение энергии $\boldsymbol{W_1}$ внутри шара к энергии $\boldsymbol{W_2}$ в окружающем пространстве.

(а) $W=3q^2/20\pi\varepsilon_0 R$; б) $W_1/W_2=1/5$)

54. ∗∗ В центре сферической оболочки, равномерно заряженной зарядом $\boldsymbol{q}$ = 5,0 мкКл, расположен точечный заряд $\boldsymbol{q_0}$ = 1,5 мкКл. Найти работу электрических сил при расширении оболочки — увеличении ее радиуса от $\boldsymbol{R_1}$ = 50 мм до $\boldsymbol{R_2}$ = 100 мм.

($A=q(q_0+q/2)(1/R_1-1/R_2)/4\pi\varepsilon_0$=1,8 Дж)

Ответы к заданиям для самостоятельной работы

К разделу 1.1

1. По закону сохранения заряда, заряд никуда не исчезает и ни откуда не появится. Так как шарики одинаковые, то после их соприкосновения заряд перераспределится поровну. С учетом их знака получим:

$$q = \frac{3q - q}{2} = q .$$

Правильный ответ а).

2. Сила взаимодействия шариков до соприкосновения

$$F_1 = k\frac{|-5q|q}{r^2} = k\frac{5q^2}{r^2} .$$

После соприкосновения заряд каждого шарика стал (см. пояснение к п. 1)

$$q = \frac{q - 5q}{2} = -2q ,$$

а сила взаимодействия

$$F_2 = k\frac{|-2q|^2 q}{r^2} = k\frac{4q^2}{r^2} ;$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{k5q^2}{r^2}\frac{r^2}{k4q^2} = \frac{5}{4} = 1{,}25 .$$

Правильный ответ г).

3. $F_1 = k\dfrac{q_1 q_2}{r_1^2}$; $F_2 = k\dfrac{q_1' q_2'}{r_2^2} = k\dfrac{q_1 q_2}{16 r_2^2}$.

По условию $F_1 = F_2$.

Приравняв правые части, получим:

$$r_1^2 = 16 r_2^2 \quad \Rightarrow \quad r_2 = \frac{r_1}{4} .$$

Правильный ответ в).

4. $F_1 = k\dfrac{q_1 q_2}{r^2}$; $F_2 = k\dfrac{q_1' q_2'}{r_2^2} = k\dfrac{(q_1/2)4q_2}{r_2^2} = k\dfrac{2q_1 q_2}{r^2} = 2F_1$.

Правильный ответ б).

К разделу 1.2

1. На заряд $\boldsymbol{q_1}$ со стороны заряда $\boldsymbol{q_2}$ действует сила Кулона. Согласно II закону Ньютона,

$$\vec{F} = m\vec{a}\,.$$

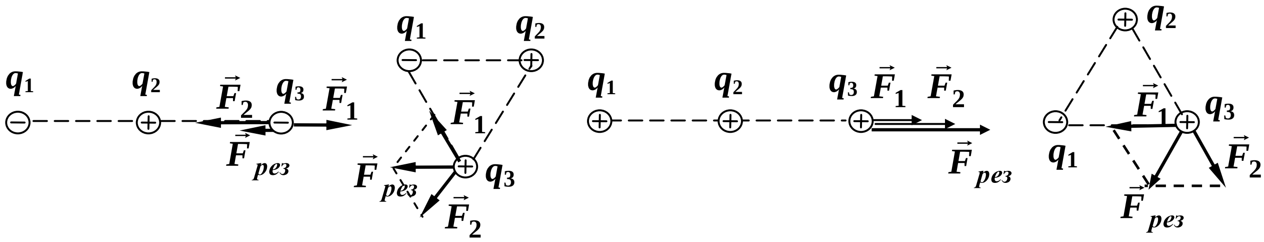
Заряд $\boldsymbol{q_1}$ движется равноускоренно к заряду $\boldsymbol{q_2}$.

Правильный ответ б).

2. Модуль силы не зависит от знака зарядов, а направление – зависит.

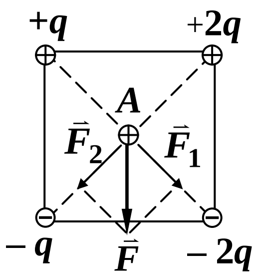
Правильный ответ а).

3.



а) б) в) г)

4.



$\vec{F}_1$ - сила, действующая на данный заряд со стороны зарядов $+\boldsymbol{q}$ и $-2\boldsymbol{q}$;

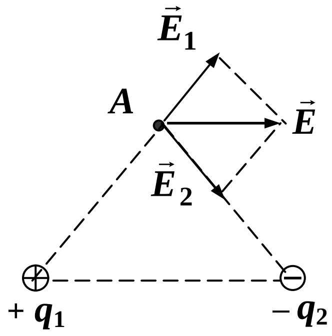
$\vec{F}_2$ - сила, действующая на данный заряд со стороны зарядов $+2\boldsymbol{q}$ и $-\boldsymbol{q}$;

$\vec{F}$ - результирующая сила.

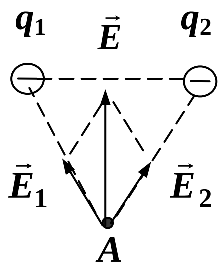
Правильный ответ д).

К разделу 2.1

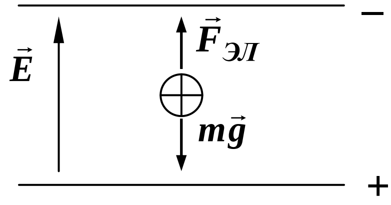
1. Правильный ответ в)



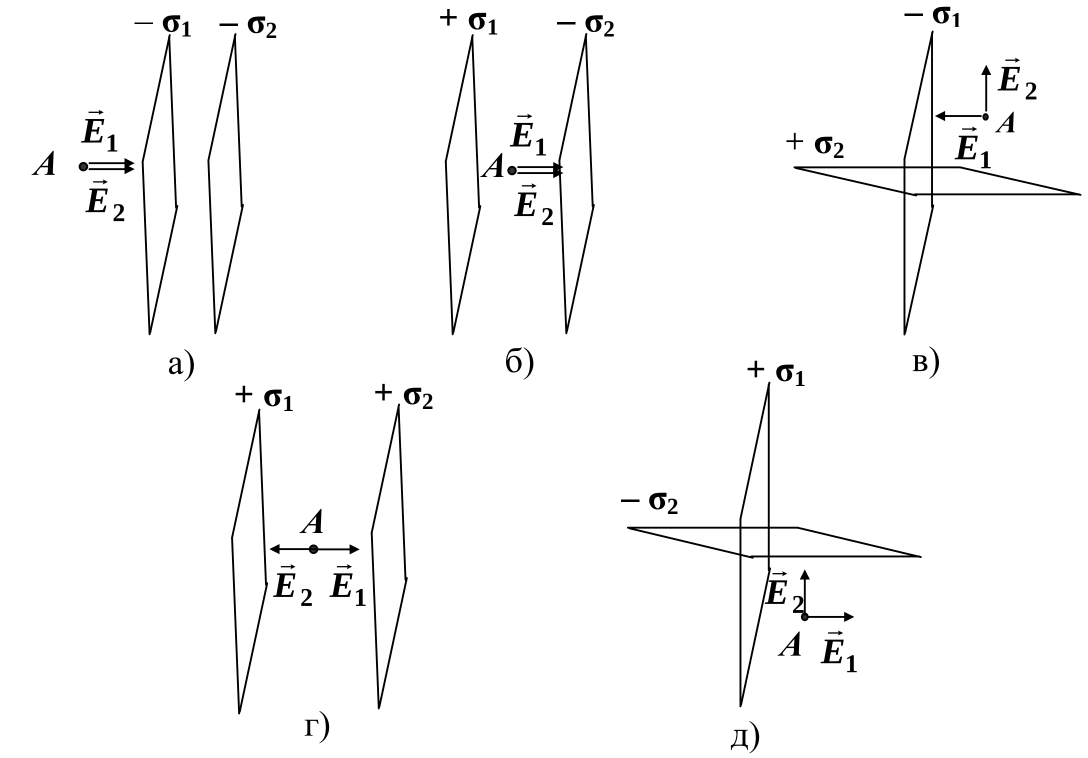
2. Напряженность результирующего поля $\vec{E}$ в точке A направлена вертикально вверх в случае д).



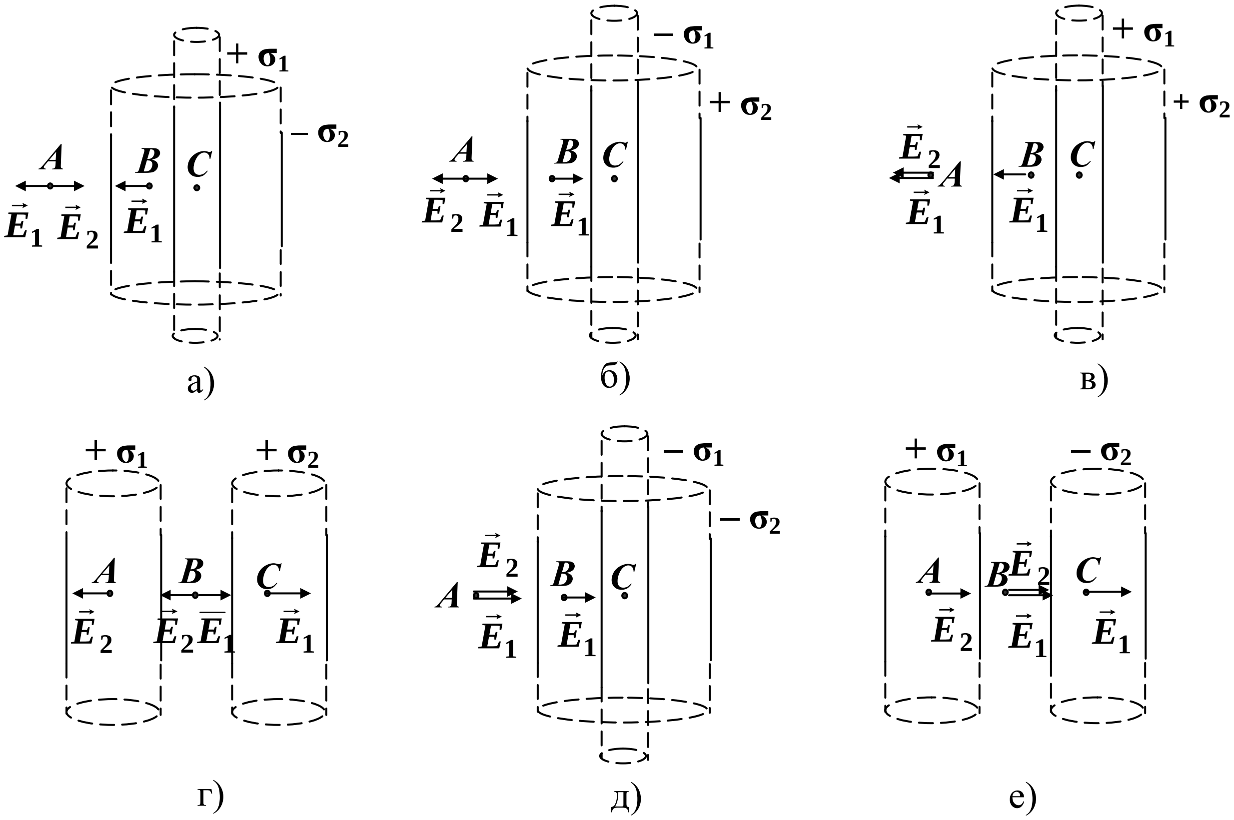
3. Заряженная пылинка может находиться в равновесии, если векторная сумма всех сил, действующих на нее, будет равна нулю. На пылинку действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила со стороны электростатического поля $\vec{F}_{эл}$. Они должны быть равны по модулю и противоположны по направлению. Это условие выполняется для случая а).



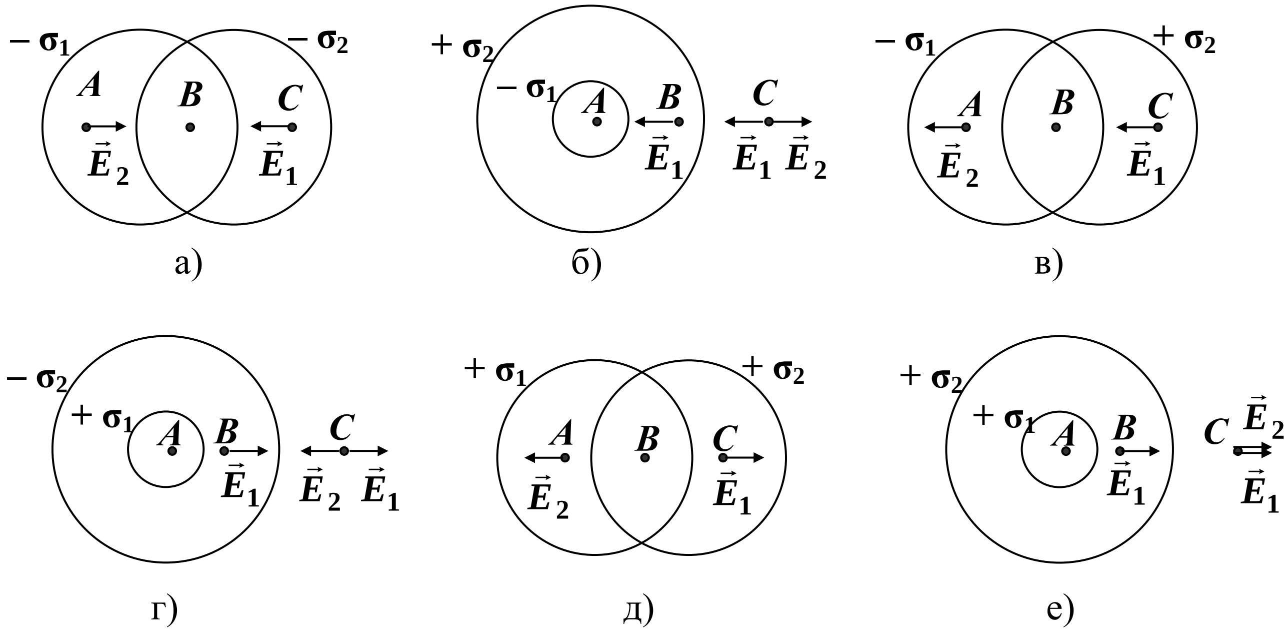
4. В случае г) векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ направлены в противоположные стороны, напряженность результирующего поля равна нулю.



5. Поле создано двумя заряженными бесконечно длинными полыми цилиндрами.



6. Поле создано равномерно заряженными концентрическими и пересекающимися сферами.



К разделу 2.3

1. Потенциал в точке A равен нулю. Ошибочная запись д).

2. Потенциал в точке A равен нулю в случае а), так как заряды имеют разные знаки.

3. Потенциалы в точках A и O поля одинаковы и положительны. Правильный ответ а).

4. Правильный ответ а).

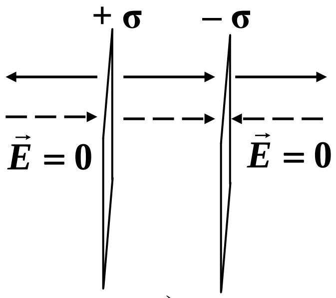
5. Правильный ответ г).

6. На эквипотенциальной поверхности градиента потенциала нет. Правильный ответ д).

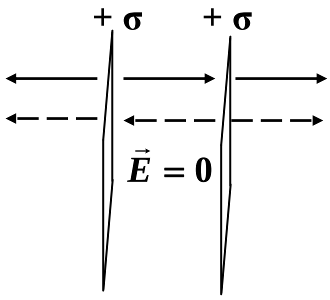
К главе 5

1. а) поле сосредоточено внутри пластин;

б) поле сосредоточено вне пластин.



а)



б)

2. Как видно из формулы (5.3), емкость плоского конденсатора зависит от материала диэлектрика **ε**, площади пластин $\boldsymbol{S}$ и расстояния между ними $\boldsymbol{d}$: а); г); д).

3. Как видно из рисунка к п. 1, поле плоского конденсатора однородно и сосредоточено между пластинами. Правильный ответ б).

4. Да. Заряд будет перераспределяться до тех пор, пока потенциалы шаров не сравняются.

5. а) 1,5С; б) 0,5С; в) 4С;

г) 0,4С; д) С; е) 0,5С.

6. $\boldsymbol{C}_{\textbf{посл}} = \boldsymbol{C}/3$; $\boldsymbol{C}_{\textbf{пар}} = 3\boldsymbol{C}$; $\boldsymbol{C}_{\textbf{посл}} / \boldsymbol{C}_{\textbf{пар}} = 9$.

Правильный ответ б).

7. При последовательном соединении конденсаторов $\boldsymbol{Q}$ = **const**. Отсюда следует, что максимальное напряжение на конденсаторе с наименьшей емкостью, и наоборот.

Правильный ответ б) $\boldsymbol{U_3} > \boldsymbol{U_1} > \boldsymbol{U_2}$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основной

Савельев И. В. Курс общей физики. Т. 2. М.: Наука, 1982. 11 – 97 с.

Трофимова Т. И. Курс физики: Учебное пособие для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Высшая школа, 1990. 128 – 151 с.

Чертов А. Г., Воробьев А. А. Задачник по физике. 5-е изд., переработ. и доп. М.: Высшая школа, 1988. 170 – 236 с.

Гофман Ю. В. Законы, формулы, задачи физики. Справочник. Киев.: Наукова думка, 1977. 267 – 304 с.

Дополнительный

Иродов И. Е. Задачи по общей физике. М.: Наука, 1979. 8 –117 с.

Ивлиев А. Д. Физика: Учебное пособие. Екатеринбург: Изд-во ГОУ ВПО „УГТУ–УПИ“, 2004. 132 – 189 с.

Новодворская Е. М., Дмитриев Э. М. Методика проведения упражнений по физике во втузе. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Высшая школа, 1981. 142 – 186 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ