

Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВПО
«Уральский государственный горный университет»

Факультет геологии и геофизики
кафедра физики

Электронный
учебно-методический комплекс

Механика, специальная теория относительности, молекулярная физика и термодинамика

по дисциплине общая «Физика»
для студентов заочного и дневных факультетов всех
направлений, специалитета и бакалавриата
по циклу Б.2. Математический и естественнонаучный цикл.
Объем аудиторных часов 40

Составители:

Горбатов Владимир Иванович,
кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры физики УГГУ

Полев Владимир Федорович,
кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры физики УГГУ

Екатеринбург, 2012

Г 67

Рецензент: *Ивлиев А. Д.*, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры
общей физики РГППУ

Курс лекций рассмотрен на заседании кафедры физики «6» марта 2012 г.
(протокол № 56) и рекомендован для издания в УГГУ

Г 67

Горбатов В. И., Полев В. Ф.

ФИЗИКА. Часть 1. Механика, специальная теория относительности, молекулярная физика и термодинамика: курс лекций по общей физике для студентов всех специальностей заочного обучения / В. И. Горбатов, В. Ф. Полев; Урал. гос. горный ун-т. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2012. – 105 с.

Курс лекций составлен в соответствии с государственными образовательными стандартами третьего поколения и предназначен для студентов геофизического факультета всех направлений (профилизаций) и специальностей (специализаций) УГГУ. Рассмотрены классическая механика, специальная теория относительности, молекулярная физика и термодинамика. Наиболее важные понятия, законы и определения выделены курсивом и иллюстрированы. Несмотря на краткость изложения, достаточно полно представлены важнейшие физические явления. Приведены исторические справки открытия законов и опытов, подтверждающих эти законы. Описано также применение основных законов в современной науке и технике. Изложение материала направлено на самостоятельное осмысление и уяснение предмета физики. Учебное издание рекомендуется для изучения общего курса физики студентам дневного обучения.

© Горбатов В. И., Полев В. Ф., 2012
© Уральский государственный
горный университет, 2012

МЕХАНИКА

1. Предмет физики. Основная задача механики

Мир представляет собой совокупность материальных объектов, находящихся в постоянном взаимодействии и непрерывном движении. Все, что нас окружает, называется *материей*. Это не только вещество, но вообще все, что находится вне нашего сознания. Например, силовые поля – поле тяготения, электромагнитное поле, поле ядерных сил – также являются различными формами материи. Материя познается через наши ощущения. Иногда восприятие материи может осуществляться не только непосредственно нашими органами чувств, но и с помощью различного вида приборов.

Место расположения и протяженность объектов материального мира составляет содержание понятия *пространство*. Длительность и последовательность изменения окружающего нас мира составляет содержание понятия *время*. Пространство и время являются взаимосвязанными формами существования материи.

Всякое изменение материи называется *движением*. Оно понимается не только как механическое перемещение тел в пространстве, но и как всякий происходящий в природе процесс: физический, химический, биологический, общественный. Каждая наука занимается изучением определенных форм движения материи.

Физика занимается изучением простейших форм движения материи, под которыми понимают механическое, тепловое, электромагнитное, внутриатомное, внутриядерное движения. Соответственно формам движения физика делится на разделы: механика, молекулярная физика, электродинамика, оптика, квантовая физика.

В своей основе физика – экспериментальная наука. В результате обобщения экспериментальных данных устанавливаются *физические законы* – *устойчивые повторяющиеся объективные закономерности, устанавливающие связь между физическими величинами*. Физическая величина – это характеристика свойств физических объектов или явлений, имеющая числовое значение, которое получается в результате измерений. Физические величины могут быть скалярными и векторными. *Физические величины, характеризующиеся числовым значением, направлением и геометрическим способом сложения, называются векторными*.

Каждая физическая величина имеет свою единицу измерения. Для измерения пространства и времени в системе СИ вводятся следующие единицы: 1 м – длина, в которой укладывается 1 650 763 730 длина волны оранжевых лучей, испускаемых атомом криптона в вакууме; 1 с – интервал времени, в течение которого совершается 9 192 631 770 колебаний, соответствующих частоте излучения атома цезия 133.

Механика – это раздел физики, в котором изучаются закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение. *Основная задача механики* состоит в обобщении полученных результатов в

виде законов движения, с помощью которых можно определять положение тела в любой момент времени.

Решение этой задачи приводит к установлению законов кинематики и динамики, а также к обнаружению законов сохранения энергии, импульса и момента импульса.

2. Модели в механике

Механическое движение – изменение положения тела относительно других тел с течением времени.

Для описания движения тел, в зависимости от условий конкретных задач, в механике используются различные *физические модели*, в которых из всего многообразия проявлений движения выделены главные, определяющие характер движения. Простейшей моделью является *материальная точка*.

Материальная точка – это модель тела, размерами и формой которого можно пренебречь по сравнению с масштабами движения.

При взаимодействии тел друг с другом они могут деформироваться, т. е. изменять свою форму и размеры. Поэтому в механике вводится еще одна модель – *абсолютно твердое тело*. Абсолютно твердым телом называется тело, которое ни при каких условиях не может деформироваться, т.е. при всех условиях расстояние между двумя частицами этого тела остается постоянным.

Любое движение твердого тела можно представить как комбинацию поступательного и вращательного движения. *Поступательное движение* – это движение, при котором любая прямая, жестко связанная с движущимся телом, остается параллельной своему первоначальному положению. *Вращательное движение* – это движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой *осью вращения*.

3. Система отсчета. Траектория, длина пути. Вектор перемещения

Для описания движения тела надо знать, в каких местах пространства оно находится и в какие моменты времени проходит то или иное положение. Определять положение тела по отношению к пустому пространству невозможно и физически бессмысленно. Произвольно выбранное, условно неподвижное тело,

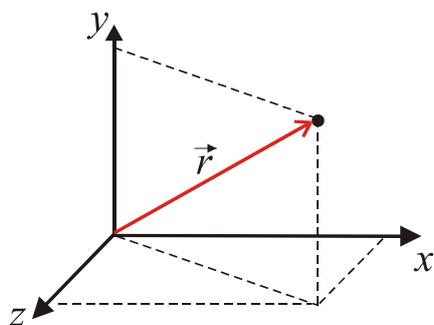


Рис. 1. Радиус-вектор

относительно которого определяется положение других (движущихся) тел называется *телом отсчета*. Связанная с ним произвольная система координат, необходимая для измерения расстояний, и прибор для измерения времени, составляют *систему отсчета*. Единственное требование к системе отсчета состоит в том, что её выбор не должен вносить усложнения в описание движения тел.

В наиболее часто используемой *декартовой системе координат*, положение материальной точки в данный момент времени определяется либо с помощью координат: x , y ,

z , либо с помощью радиус-вектора $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$, соединяющего центр системы координат с данной движущейся точкой (рис.1). При этом получается, что проекции радиус-вектора на оси системы отсчета эквивалентны значениям координат: $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$.

Совокупность последовательных положений, занимаемых материальной точкой при своем движении, образует в пространстве линию, которая называется *траекторией*. В зависимости от формы траектории движение может быть *прямолинейным* или *криволинейным*.

Расстояние, пройденное телом по траектории, с момента начала отсчета времени, называется *длиной пути*. Это длина траектории ΔS (рис. 2).

Вектор, соединяющий начальное положение материальной точки с последующим положением, называют *вектором линейного перемещения*

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

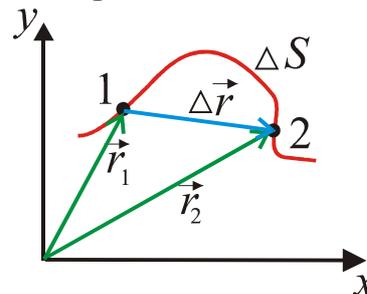


Рис. 2. Путь и вектор перемещения

Перемещение равно изменению радиус-вектора.

Радиус-вектор, путь и перемещение являются геометрическими характеристиками движения.

4. Кинематика материальной точки. Скорость и ускорение точки

Кинематика – это раздел механики, изучающий движение тел без учета взаимодействия, т. е. без учета причин, вызывающих это движение.

Для того чтобы характеризовать, как быстро меняется положение точки в пространстве, пользуются понятием *скорости*. Под *средней скоростью* движения по траектории понимают отношение пройденного конечного пути ΔS ко времени Δt :

$$\langle v_s \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}.$$

Скорость движения точки по траектории – скалярная величина. Наряду с ней можно говорить о *средней скорости перемещения* точки

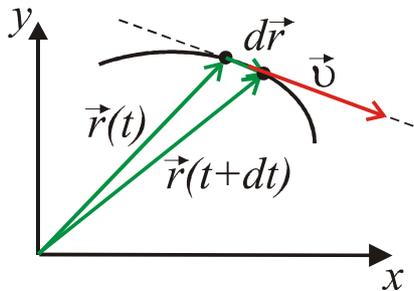


Рис. 3. Мгновенная скорость

$$\langle \vec{v}_r \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}.$$

Это – векторная физическая величина, направленная вдоль вектора перемещения.

За бесконечно малое время dt точка проходит бесконечно малое расстояние dS . Их отношение образует *модуль мгновенной скорости* точки

модуль мгновенной скорости точки

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}.$$

Мгновенная скорость перемещения точки (рис. 3) определяется как

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Поскольку перемещение совпадает с бесконечно малым элементом траектории ($dr = dS$), то вектор скорости направлен по касательной к траектории в сторону движения, а его величина равна

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{dr}{dt}.$$

Другим важным понятием, характеризующим движение точки, является *ускорение*. Среднее ускорение – это векторная физическая величина, равная отношению приращения вектора скорости ко времени этого приращения:

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

Мгновенное ускорение – это векторная физическая величина, характеризующая быстроту изменения скорости и равная *первой производной от вектора скорости по времени*:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Вектор ускорения направлен вдоль вектора приращения скорости $d\vec{v}$. Если $a = \text{const}$, то решением данного дифференциального уравнения являются функции:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}(0)t + \frac{\vec{a}t^2}{2}, \quad \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(0) + \vec{a}t.$$

Этот важный и часто встречаемый случай носит название равноускоренного или равнозамедленного движения (в зависимости от знака проекции \vec{a}).

При использовании прямоугольной декартовой системы координат движение материальной точки описывается кинематическими уравнениями

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t).$$

В этом случае вектор скорости и вектор ускорения могут быть разложены на

три взаимно перпендикулярные компоненты так, что

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

где $v_x = dx/dt$; $v_y = dy/dt$; $v_z = dz/dt$; $a_x = dv_x/dt$; $a_y = dv_y/dt$; $a_z = dv_z/dt$.

5. Нормальное, тангенциальное и полное ускорения

Если траектория материальной точки – произвольная кривая, то скорость и ускорение точки при ее движении по этой кривой меняются и по *величине* и по *направлению*. Как всякий вектор, вектор ускорения можно представить в виде суммы его составляющих по двум взаимно перпендикулярным осям. В качестве одной из осей возьмем направление *касательной* в рассматриваемой точке траектории (это направление задает единичный вектор $\vec{\tau}$), а в качестве другой – направление *нормали* к кривой в этой же точке (задает единичный вектор \vec{n}). Составляющая ускорения, направленная по касательной к траектории, носит название *тангенциального ускорения* a_τ , а направленная к ней перпендикулярно – *нормального ускорения* a_n (рис. 4).

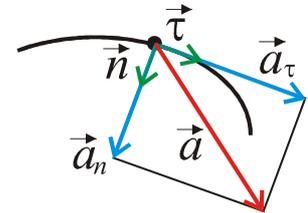


Рис. 4. Ускорения

Тангенциальное ускорение зависит только от величины скорости, изменение которой за время dt равно dv . Поэтому тангенциальное ускорение может быть записано как производная по времени от величины скорости (модуля вектора)

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

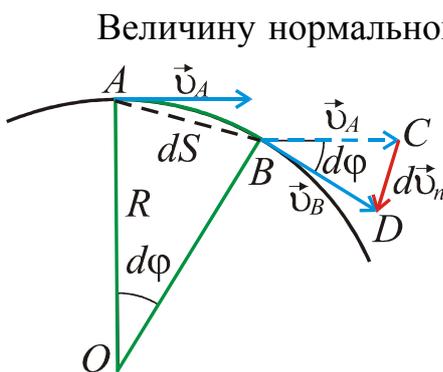


Рис. 5. Локальный радиус кривизны

Величину нормального ускорения a_n проще всего найти, если рассмотреть наиболее простой случай криволинейного движения – равномерное движение по окружности ($a_\tau = 0$). Пусть за время dt материальная точка переместилась из положения A в положение B (рис. 5). В этом случае скорости \vec{v}_A и \vec{v}_B остаются равными по величине, но изменяются по направлению на вектор $d\vec{v}_n$, который при малых угловых перемещениях $d\phi$ будет всегда направлен перпендикулярно к вектору скорости. При этом перемещение точки с хорошей точностью можно считать равным дуге dS .

Из подобия треугольников $\triangle OAB$ и $\triangle BCD$ (как равнобедренных с равными углами при вершинах) следует, что $\frac{dv_n}{v} = \frac{dS}{R}$. Тогда

$$a_n = \frac{dv_n}{dt} = \frac{v}{R} \cdot \frac{dS}{dt} = \frac{v^2}{R}.$$

Полученное соотношение справедливо для всякого плоского криволинейного движения, а не только для движения по окружности. Это связано с тем, что всякий участок криволинейной траектории в достаточно малой окрестности можно приближенно заменить дугой окружности. Радиус этой окружности, называемый *локальным радиусом кривизны* траектории, будет меняться от точки к точке, и требовать специального вычисления.

Так как компоненты \vec{a}_n и \vec{a}_τ взаимно перпендикулярны, то формула для полного ускорения при криволинейном движении имеет вид

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}.$$

Данная формула остается справедливой и для любого случая пространственной кривой.

В общем случае, связь между полным, нормальным и тангенциальным ускорениями можно получить из определения ускорения, полагая, что $\vec{v}(t) = v \cdot \vec{\tau}$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v \cdot \vec{\tau})}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + v \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Отсюда следует, что модуль тангенциального ускорения $a_\tau = \frac{dv}{dt}$. Модуль нормального ускорения можно найти, взяв производную от единичного вектора: $\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \omega \cdot \vec{n}$. Можно сказать, что оператор дифференцирования поворачивает единичный вектор $\vec{\tau}$ на 90° , превращая его в вектор \vec{n} , и удлиняет его в ω раз, где ω – угловая скорость материальной точки в данном месте траектории (смотри далее § 6, 7). Тогда модуль нормального ускорения будет равен

$$a_n = v \cdot \omega = \omega^2 \cdot R = \frac{v^2}{R}.$$

Таким образом, полное ускорение состоит из двух составляющих:

- 1) нормального ускорения \vec{a}_n характеризующего изменение скорости по направлению;
- 2) тангенциального ускорения \vec{a}_τ характеризующего изменение скорости по величине.

6. Угловая скорость и угловое ускорение

Рассмотрим вращение материальной точки вокруг неподвижной оси OO' (рис. 6). Пусть за время dt она совершила по окружности бесконечно малый поворот на угол $d\varphi$. Для описания этого движения введем вектор *углового перемещения* $d\vec{\varphi}$, направление которого свяжем с направлением вращения правилом правого винта. Векторы, направление которых связывают с направлением вращения, называют *псевдовекторами* или *аксиальными векторами*. Аксиальный вектор углового перемещения располагается на оси вращения и не имеет определенной точки приложения.

Изменение вектора углового перемещения в единицу времени характеризуется *вектором угловой скорости*:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

Вектор $\vec{\omega}$ совпадает по направлению с вектором $d\varphi$ и представляет собой также аксиальный вектор.

Изменение вектора $\vec{\omega}$ со временем характеризуется *вектором углового ускорения* $\vec{\varepsilon}$, который определяется как:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}.$$

Направление вектора $\vec{\varepsilon}$ совпадает с направлением $d\vec{\omega}$ – приращением вектора $\vec{\omega}$. Вектор $\vec{\varepsilon}$ также является аксиальным.

При равномерном вращении ($\vec{\varepsilon} = 0$ и $\vec{\omega} = \text{const}$) угловое перемещение изменяется во времени по закону:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t.$$

В этом случае вращательное движение можно характеризовать периодом T и частотой вращения n . Частота вращения $n = \frac{N}{t}$, или $n = \frac{1}{T}$, где N – число оборотов, совершаемых телом за время t ; T – период вращения (время одного полного оборота).

При равнопеременном вращении $\vec{\varepsilon} = \text{const}$. Решением этого уравнения являются функции

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}, \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t,$$

где φ_0 – начальное угловое перемещение; ω_0 – начальная угловая скорость.

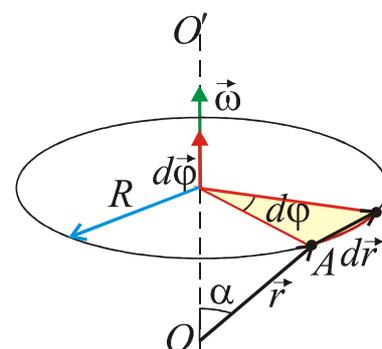


Рис. 6. Угловые перемещение и скорость

7. Связь между линейными и угловыми величинами

Линейное перемещение конца радиус-вектора \vec{r} , проведенного в точку A из любой точки O , лежащей на неподвижной оси OO' , связано с вектором угловым перемещением $d\vec{\varphi}$ соотношением $dr = r \cdot \sin \alpha \cdot d\vec{\varphi}$ или в векторном виде

$$d\vec{r} = [d\vec{\varphi} \times \vec{r}].$$

Линейную скорость \vec{v} материальной точки A можно найти, если поделить левую и правую часть формулы для линейного перемещения на промежуток времени dt

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r} \right].$$

Учитывая, что $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ и $\frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{\omega}$, получим

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}].$$

Модуль вектора скорости равен $v = \omega \cdot r \sin \alpha = \omega \cdot R$, где R – радиус окружности, по которой движется точка A .

Продифференцируем выражение для линейной скорости по времени:

$$\vec{a} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \right] + \left[\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right].$$

Так как $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$, $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]$, то

$$\vec{a} = [\vec{\varepsilon} \times \vec{r}] + [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]].$$

Здесь вектор $\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon} \times \vec{r}]$ – тангенциальное ускорение, а вектор $\vec{a}_n = [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]]$ – нормальное ускорение. Модули этих ускорений равны

$$a_\tau = \varepsilon R, \quad a_n = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}.$$

Модуль полного ускорения вычисляется как:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Контрольные вопросы

- Что называется материальной точкой? Почему в механике вводят такую модель?
- Что такое система отсчета?
- Что такое вектор перемещения? Всегда ли модуль вектора перемещения равен пройденному пути по траектории?
- Какое движение называется поступательным, а какое – вращательным?
- Дайте определения векторов средней скорости и среднего ускорения, мгновенной скорости и мгновенного ускорения. Каковы их направления?
- Что характеризуют тангенциальная составляющая ускорения и нормальная составляющая ускорения? Каковы их модули?
- Возможны ли движения, при которых отсутствует нормальное ускорение? тангенциальное ускорение? Приведите примеры.
- Что называется угловой скоростью и угловым ускорением? Как определяются их направления?
- Какова связь между линейными и угловыми величинами?

8. Масса. Импульс. Сила. Законы Ньютона

Динамика – раздел механики, в котором изучается механическое движение с учетом причин, вызывающих движение.

Основные понятия динамики – масса, импульс и сила.

Масса – скалярная физическая величина (СФВ), которая характеризует инертность тела и определяется как количество вещества, содержащегося в теле. Инертность – это свойство тел сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. В классической механике инертная масса считается постоянной и не зависящей от скорости движения. Масса тела может быть вычислена как $m = \rho \cdot V$, если известен объем тела V и его плотность ρ .

Масса – величина аддитивная, т. е. масса системы $m_S = \sum_{i=1}^n m_i$.

В Международной системе единиц (СИ) масса тела измеряется в килограммах: $[m] = \text{кг}$. За единицу массы принят эталон – сплав платины и иридия, хранящийся в палате мер и весов в Париже.

Импульс – векторная величина численно равная произведению массы материальной точки на ее скорость и имеющая направление скорости:

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Сила \vec{F} – векторная физическая величина (ВФВ), характеризующая интенсивность воздействия на тело со стороны других тел или полей, в результате которого тело приобретает ускорение или изменяет свою форму и размеры, либо имеет место и то, и другое. В том случае, когда тело при взаимодействии

получает ускорение, говорят о *динамическом* проявлении сил. В том случае, когда тело при взаимодействии деформируется, говорят о *статическом* проявлении сил.

Векторный характер силы определяется тем, что всякая сила может быть охарактеризована *величиной, направлением* в пространстве и *точкой приложения*.

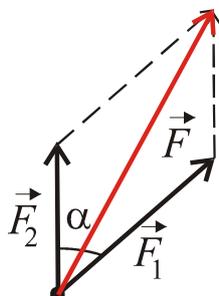


Рис. 7. Сложение сил

Единица измерения силы в СИ *ньютон*: $[F] = \text{Н}$.

Для сил справедлив *принцип суперпозиции*: они действуют независимо друг от друга. Если на материальную точку действуют две силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 (рис. 7), то их действие эквивалентно действию одной силы

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

которая определяется по правилу параллелограмма, построенного на этих векторах. Модуль результирующей силы вычисляется как

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}.$$

Если на тело действуют n сил, суммарное действие эквивалентно действию одной равнодействующей, являющейся геометрической суммой сил:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

Законы Ньютона представляют собой *постулаты* классической (или ньютоновской) механики. Они не могут быть *доказаны* аналитически и являются осмыслением многочисленных опытных данных и результатов наблюдений.

Первый закон Ньютона гласит: *существуют такие системы отсчета, относительно которых тело покоится или движется прямолинейно и равномерно, если на него не действуют другие тела или действие этих тел компенсировано.*

Система отсчета, которая может покоиться или двигаться только равномерно и прямолинейно (по инерции), называется *инерциальной*, а закон называют *законом инерции*.

Второй закон Ньютона – основной закон динамики поступательного движения – отвечает на вопрос, как изменяется механическое движение материальной точки (тела) под действием приложенных к ней сил.

Под действием некоторой силы тело приобретает ускорение. Если материальная точка (тело) испытывает действие несколь-

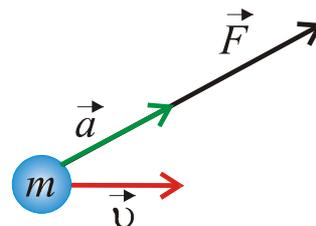


Рис. 8. Сила и ускорение

ких сил, то оказывается, что ускорение, приобретенное телом, всегда прямо пропорционально равнодействующей или результирующей приложенных сил, т. е. $\vec{a} \sim \vec{F}$ при $m = \text{const}$ (рис. 8).

При действии одной и той же силы на тела с разными массами их ускорения оказываются различными: $\vec{a} \sim 1/m$ при $\vec{F} = \text{const}$. Используя эти соотношения и учитывая, что сила и ускорение – векторные величины, можно записать

$$\vec{a} = k \frac{\vec{F}}{m},$$

где k – коэффициент пропорциональности. В системе СИ коэффициент $k = 1$. Тогда:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Это соотношение и выражает *второй закон Ньютона*: ускорение, приобретаемое материальной точкой (телом), пропорционально вызывающей его силе, совпадает с ней по направлению и обратно пропорционально массе материальной точки (тела).

Второму закону Ньютона можно придать другой вид, представив его так:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Если масса тела постоянна (не зависит от скорости), то ее можно внести под знак производной. В этом случае

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Это выражение – более общая формулировка второго закона Ньютона: *скорость изменения импульса материальной точки равна векторной сумме действующих на нее сил*.

В общем случае результирующая сила, действующая на тело, изменяется со временем и по величине, и по направлению. Но в течение элементарного промежутка времени dt можно считать, что $\vec{F} = \text{const}$. Тогда второй закон Ньютона можно представить в виде: $d\vec{p} = \vec{F}dt$. Векторная величина $d\vec{p}$ называется *элементарным импульсом силы*.

Третий закон Ньютона определяет взаимодействие между материальными точками (телами). *Две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными в противоположные стороны вдоль соединяющей*

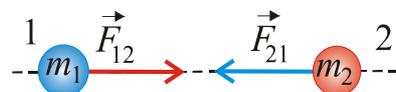


Рис. 9. Силы взаимодействия

эти точки прямой: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, где \vec{F}_{12} – сила, действующая на первую материальную точку со стороны второй; \vec{F}_{21} – сила, действующая на вторую материальную точку со стороны первой (рис. 9). Условно их называют «действием» и «противодействием».

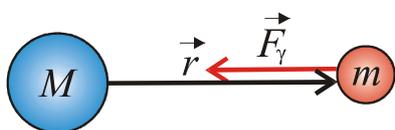
Свойства «действия» и «противодействия»:

- а) они равны по величине и противоположны по направлению;
- б) так как силы приложены к разным телам, они не могут скомпенсировать друг друга;
- в) они всегда имеют одинаковую природу, так как характеризуют одно и то же взаимодействие;
- г) они «включаются» и «выключаются» одновременно. Время их действия одинаково, так как они существуют только вместе.

Законы Ньютона в классической механике *применимы* для описания движения: а) макротел; б) для тел постоянной массы; в) при скоростях, значительно меньших скорости света.

9. Силы гравитационного взаимодействия

Анализ законов движения планет Солнечной системы (законов Кеплера), а также нормального ускорения, возникающего при движении Луны вокруг Земли, позволил Исааку Ньютону сделать вывод о том, что *сила гравитационного взаимодействия двух материальных точек пропорциональна их массам и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними* (рис. 10):



$$\vec{F}_g = -G \frac{mM}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}.$$

Рис. 10. Силы гравитации

В системе СИ гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$. Знак минус означает, что сила, действующая на тело, всегда противоположна по направлению радиус-вектору, направленному на тело, т. е. гравитационное взаимодействие всегда приводит к притяжению любых тел.

Детальный расчет, проведенный Ньютоном, показал, что приведенная формула справедлива также для расчета сил гравитационного взаимодействия между *однородными телами сферической формы* при условии, что расстояние между центрами сфер r не меньше суммы их радиусов ($r \geq R_1 + R_2$).

При исследовании взаимодействия тел, находящихся на некотором расстоянии друг от друга, возникает вопрос о *механизме* передачи действия одного тела на другое. Современная физика дает ответ следующим образом.

Любое тело, имеющее массу, создает в окружающей области пространства *гравитационное поле*, которое и оказывает действие на другое тело, также имеющее массу. Из соображений симметрии следует, что второе тело также создает соответствующее поле, воздействующее на первое тело. В соответствии с третьим законом Ньютона силы действия тел друг на друга равны по величине

не и противоположны по направлению. Таким образом, *гравитационное поле – особый физический объект, посредством которого осуществляется взаимодействие масс.*

Гравитационное поле может быть обнаружено по его воздействию на физические тела или измерительные приборы.

Сила гравитационного взаимодействия в соответствии с законом всемирного тяготения зависит как от массы тела M , создающего поле, так и от массы внесенного в него тела m . Сила взаимодействия могла бы оказаться характеристикой поля в том случае, если при исследовании его силового действия использовать пробное точечное тело заранее оговоренной массы, например $m = 1$ кг. Эти соображения позволяют ввести в рассмотрение новую физическую величину называемую *напряженностью гравитационного поля.*

Напряженность гравитационного поля – ВФВ, характеризующая силовое действие гравитационного поля и численно равная силе, действующей с его стороны на точечное тело единичной массы:

$$\vec{E}_\gamma = \frac{\vec{F}_\gamma}{m}.$$

Очевидно, что модуль напряженности гравитационного поля, созданного точечным телом (или однородным телом сферической формы) с массой M на расстоянии r от него можно рассчитать по формуле $E_\gamma = G \frac{M}{r^2}$.

10. Сила тяжести. Ускорение свободного падения

Рассмотрим тело массой m , находящееся на поверхности Земли. Землю в первом приближении будем считать однородным шаром, а тело, ввиду малости его размеров по сравнению с радиусом Земли, материальной точкой. Тело вместе с Землей совершает равномерное вращательное движение. Это означает, что сила земного тяготения \vec{F}_γ , направленная к центру Земли, и сила реакции опоры \vec{N} совместным действием $\vec{F}_\gamma + \vec{N} = \vec{F}$ сообщают ему центростремительное ускорение, направленное перпендикулярно к оси вращения (рис. 11).

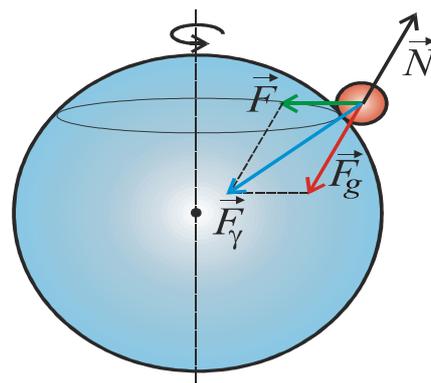


Рис. 11. Сила тяжести

Вместе с тем, рассматривая соответствующий параллелограмм сил, можно условно считать, что сила \vec{F}_γ состоит из двух составляющих – силы тяжести \vec{F}_g и силы \vec{F} , связанной с вращением Земли. Таким образом, *сила тяжести* определяется как

$$\vec{F}_g = \vec{F}_\gamma - \vec{F}.$$

Иначе говоря, *сила тяжести* – это отвесная составляющая гравитационной силы, приложенной к телу. Сила тяжести не направлена по радиусу к центру Земли, а идет по отвесу. Это отклонение весьма незначительно (не превышает сотых долей процента), что позволяет в целом ряде задач пренебречь различием в величинах силы тяготения и силы тяжести, считая $\vec{F}_\gamma \approx \vec{F}_g$. Сила тяжести, таким образом, может быть рассчитана как

$$\vec{F}_g = m\vec{g},$$

где $g = G \frac{M_3}{R_3^2} = 9,822 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения.

По мере удаления от поверхности Земли (на высоту h) ускорение свободного падения и, соответственно, сила тяжести убывают по закону:

$$g = G \frac{M_3}{(R_3 + h)^2}.$$

В дополнение отметим, что на различных широтах земного шара величина ускорения свободного падения (и сила тяжести) оказываются различными. Это связано с двумя обстоятельствами:

а) Земля имеет сплюснутую с полюсов форму (ее полярный радиус несколько меньше экваториального);

б) наличием центростремительного ускорения $a = \omega^2 r$ в системах отчета, связанных с вращающейся Землей. Поскольку $m\vec{g} = \vec{F}_\gamma - \vec{F}$ (см. рис. 11), то ускорение свободного падения равно: $g = G \frac{M_3}{R_3^2} - \omega^2 r$. Угловая скорость ω одинакова для всех точек земной поверхности, а радиус вращения r зависит от широты. Он максимален (и равен радиусу Земли) на экваторе и равен нулю на полюсах.

Оба фактора приводят к тому, что ускорение свободного падения (а значит, и сила тяжести тела) на полюсах несколько больше, чем на экваторе (разница составляет около половины процента).

Оба фактора приводят к тому, что ускорение свободного падения (а значит, и сила тяжести тела) на полюсах несколько больше, чем на экваторе (разница составляет около половины процента).

Оба фактора приводят к тому, что ускорение свободного падения (а значит, и сила тяжести тела) на полюсах несколько больше, чем на экваторе (разница составляет около половины процента).

11. Вес тела. Силы трения

Вес – сила, с которой тело, притягиваясь к Земле, действует на *подвес* или *опору*.

В общем случае сила тяжести и вес представляют собой различные по природе, точке приложения, величине и направлению силы. Сила тяжести равна весу только в том случае, когда опора или подвес неподвижны относительно

Земли. По модулю вес \vec{P}_g может быть как больше, так и меньше силы тяжести \vec{F}_g . Эти силы приложены к разным телам: \vec{F}_g – приложена к самому телу, \vec{P}_g – к подвесу или опоре, ограничивающим свободное движение тела в поле земного тяготения.

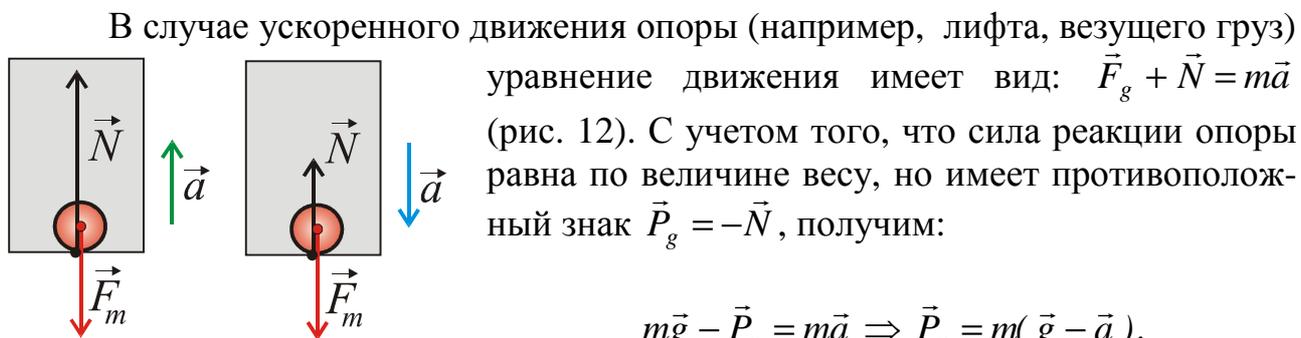


Рис. 12. Груз в лифте

Если движение происходит вверх, то $P_g = m(g + a)$, если вниз, то $P_g = m(g - a)$.

При свободном падении тела его вес равен нулю, т. е. оно находится в состоянии *невесомости*. Определим, что свободное падение – движение тела под действием единственной силы – силы тяжести. Свободное падение «в чистом виде» в реальных условиях наблюдать не удастся, так как на тело, кроме силы тяжести, всегда действуют какие-либо силы (силы трения, силы взаимодействия с другими телами, кроме Земли). Наиболее «похожим» на свободное падение можно считать, например, падение тела в вакууме, движение Луны вокруг Земли и т. д. Очень близки к состоянию свободного падения и невесомости космонавты, совершающие орбитальный полет вокруг Земли.

Следует отметить, что вес *не является характеристикой тела*, так как его величина и направление зависят от условий, в которых находится тело. При решении подавляющего большинства задач можно совсем не использовать эту физическую величину.

Трение является одним из проявлений контактного взаимодействия тел. Трение различают двух видов: *внешнее* и *внутреннее*.

Силы *внешнего трения* возникают на поверхности контакта двух тел. *Внутреннее трение* – это тангенциальное взаимодействие между слоями одного и того же тела. Если сила трения возникает при движении твердого тела в жидкой или газообразной среде, то ее относят к силам внутреннего трения.

Различают три вида внешнего трения: трение покоя, трение скольжения и трение качения:

а) *сила трения-покоя* – это сила, действующая между соприкасающимися телами, находящимися в состоянии покоя, равная по величине и противоположно направленная силе, понуждающей тело к движению.

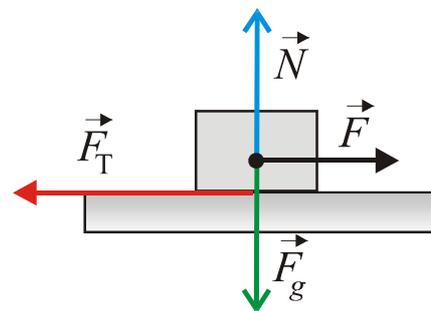


Рис. 13. Сила трения покоя

До возникновения скольжения сила трения покоя может иметь любое направление и принимать любое значение от нуля до некоторого максимального значения, при котором возникает скольжение: $0 \leq \vec{F}_T \leq \vec{F}_T^{\max}$ (рис. 13).

Силу трения покоя, равную по модулю внешней силе, при которой начинается скольжение данного тела по поверхности другого, называют *максимальной силой трения-покоя*.

Французские физики Г. Амонтон и Ш. Кулон установили, что: *максимальная сила трения покоя пропорциональна силе реакции опоры (нормального давления) и не зависит от площади соприкосновения трущихся тел*:

$$F_T^{\max} = \mu \cdot N,$$

где μ – коэффициент трения покоя, который зависит от физической природы соприкасающихся тел и обработки их поверхностей;

б) *трение скольжения*. Если к телу приложить внешнюю силу, превышающую $|\vec{F}_T^{\max}|$, то тело начинает скользить. Сила трения продолжает существовать и называется *силой трения-скольжения* (рис. 14).

Силы трения-скольжения действуют вдоль поверхности контакта двух тел. Они приложены к обеим трущимся поверхностям в соответствии с третьим законом Ньютона и направлены по касательной к трущимся поверхностям в сторону, противоположную движению данного тела относительно другого.

Силы трения-скольжения зависят от нормального давления на поверхность соприкосновения. При постоянной скорости движения

$$F_T = \mu_S \cdot N,$$

где μ_S – коэффициент трения скольжения, который зависит от материала тел, состояния поверхностей и от относительной скорости движения тел.

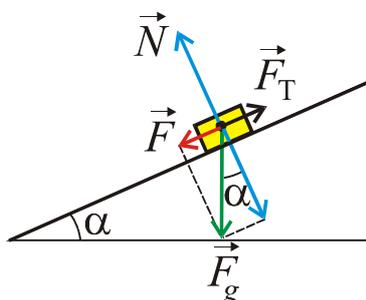


Рис. 14. Сила трения скольжения

Можно приближенно считать его равным коэффициенту трения-покоя μ . Для определения μ положим тело на наклонную плоскость и начнем увеличивать угол наклона α . При определенном значении угла тело начинает движение вниз. Тело приходит в движение, когда сила $F \geq F_T$. Поэтому:

$$\mu = \frac{F}{N} = \frac{F_T \sin \alpha}{F_T \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Таким образом, коэффициент трения равен тангенсу угла α , при котором начинается скольжение тела по наклонной плоскости;

в) *трение-качения*. При качении тела по поверхности другого возникает

особая сила – сила трения-качения, которая препятствует качению тела. Сила трения-качения при тех же материалах соприкасающихся тел всегда меньше силы трения-скольжения. Этим пользуются на практике, заменяя подшипники скольжения шариковыми или роликовыми подшипниками. Кулон опытным путем установил, что для катящегося цилиндра сила трения-скольжения равна

$$F_K = \mu_K \frac{N}{R},$$

где R – радиус цилиндра; μ_K – коэффициент трения-качения, величина которого уменьшается с увеличением твердости материала и шероховатости его поверхности. Для катящегося обода

$$F_K = \mu_K \frac{N}{2R}.$$

На тело, движущееся в вязкой (жидкой или газообразной) среде, действует *сила жидкого трения (сила сопротивления)*, тормозящая его движение.

Сила сопротивления вместе со скоростью обращается в нуль. При небольших скоростях она растет пропорционально скорости: $\vec{F}_G = -k_1 \vec{v}$.

Коэффициент k_1 зависит от формы и размеров тела, характера его поверхности, а также от свойства среды, называемого вязкостью.

12. Деформации. Силы упругости. Закон Гука

Помимо изменения скорости тела (так называемое динамическое действие), сила может оказывать на тело статическое действие, проявляющееся в его деформации. *Деформация* – изменение формы и (или) объема тела под действием внешних сил.

Основные виды деформации твердых тел это:

а) *растяжение-сжатие* – деформация, возникающая в стержне под действием продольных (растягивающих или сжимающих) сил;

б) *сдвиг* – деформация, при которой слои тела смещаются параллельно друг другу;

Деформации могут быть также проклассифицированы по изменениям внутреннего состояния деформируемого тела:

а) *упругая* деформация, при которой тело восстанавливает первоначальную форму (объем) после прекращения действия деформирующей силы.

Следует иметь в виду, что упругая деформация не проходит для деформируемого тела «бесследно». Изменения структуры могут накапливаться при многократных деформациях и привести к изменениям упругих свойств тела. Однако в ряде случаев можно пренебречь этими изменениями, а деформацию считать *абсолютно упругой*;

б) *пластическая* деформация, при которой тело сохраняет искаженную форму после прекращения действия деформирующей силы.

Наблюдение показывает, что любое тело при неупругой деформации проявляет в той или иной степени тенденции к восстановлению исходной формы. Для простоты рассмотрения в ряде случаев можно пренебречь этим фактом и считать деформацию *абсолютно неупругой*, т. е. предполагается, что тело полностью лишено упругих свойств.

Рассмотрим простой эксперимент по деформации упругого тела, например резинового цилиндра, к которому будем прикладывать различные внешние силы \vec{F} , измеряя при этом изменение его длины (рис. 15). Опыт показывает, что при малых деформациях удлинение или сжатие цилиндра Δl направлено в сторону действия внешней силы и пропорционально величине силы $F \sim \Delta l$.

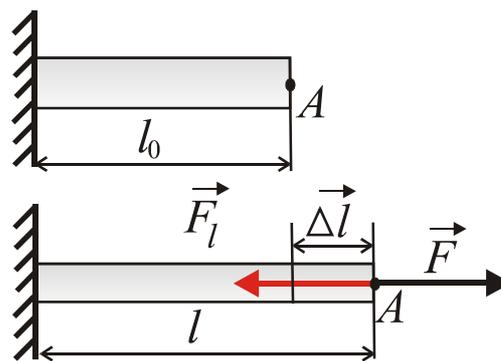


Рис. 15. Упругие силы

В соответствии с третьим законом Ньютона, в цилиндре возникает сила, которая стремится восстановить его прежние размеры и форму. Эта сила возникает вследствие электромагнитного взаимодействия между атомами и молекулами вещества. Ее называют *силой упругости*. Сила упругости также пропорциональна деформации тела и направлена в сторону, противоположную направлению перемещения частиц тела при деформации

$$\vec{F}_{\text{упр}} = -\vec{F} = -k \cdot \Delta \vec{l},$$

где k – коэффициент жесткости тела; $\Delta \vec{l}$ – вектор удлинения. Коэффициент жесткости зависит от формы и размеров тела, а также от материала. Это выражение носит название *закона Гука*. Следствием из закона Гука является следующее положение: *сила упругости, возникающая в упруго деформированном теле, пропорциональна его удлинению*.

В физике закон Гука для деформации растяжения или сжатия принято записывать в другой форме

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma,$$

где $\varepsilon = \Delta l/l$ – называется относительной деформацией; $\sigma = -F_{\text{упр}}/S$ – называется напряжением; S – площадь поперечного сечения деформированного тела. Коэффициент E в этой формуле называется модулем Юнга. Модуль Юнга зависит только от свойств материала. Для различных материалов модуль Юнга меняется в широких пределах. Для стали, например, $E \approx 2 \cdot 10^{11}$ Н/м², а для резины $E \approx 2 \cdot 10^6$ Н/м².

Контрольные вопросы

- Какая система отсчета называется инерциальной?
- Что такое масса и импульс?
- Что такое сила? Как ее можно охарактеризовать?
- Является ли первый закон Ньютона следствием второго закона Ньютона?
- Какими свойствами обладают силы «действия» и «противодействия»?
- В чем заключается принцип независимости действия сил?
- Объясните механизм гравитационного взаимодействия?
- Что такое состояние невесомости? При каких условиях оно реализуется?
- На какой высоте над планетой ускорение свободного падения вдвое меньше, чем на ее поверхности?
- Какова физическая сущность трения? Какие виды внешнего трения вы знаете?
- Какие виды деформаций Вы знаете?
- Сформулируйте закон Гука. Когда он справедлив?
- Каков физический смысл модуля Юнга?

13. Работа и мощность

Состояние любой физической системы описывается совокупностью физических величин, называемых *параметрами состояния*.

Изменение состояния системы, сопровождающееся изменением ее параметров состояния, называется *физическим процессом*, который в принципе может осуществляться множеством способов. Очевидно, что для описания физических процессов и их сравнение между собой (для аналогичных систем) требуется введения специальной физической величины, которую называют *работой*.

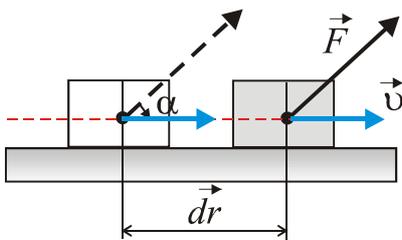


Рис. 16. Работа силы

Переход рассматриваемой системы из одного состояния в другое не имеет пространственного направления и, следовательно, работа должна быть скалярной величиной. С другой стороны, величина, описывающая *процесс изменения состояния*, должна зависеть от того, как именно он протекал –

т. е. являться *функцией процесса*.

Изменение состояния механической системы неразрывно связано с действием сил. В противном случае, в соответствии с первым законом Ньютона, тело движется равномерно и прямолинейно, сохраняя свое механическое состояние неограниченно долго. Следовательно, работа в механике должна зависеть от величины силы, действующей на тело. В то же время, степень изменения механического состояния тела (или системы тел) зависит также от расстояния, которое было пройдено под действием силы. Расстояния в механике могут задаваться двумя способами – длиной пути S и перемещением $d\vec{r}$. Единствен-

ным способом преобразования векторной величины в скалярную является скалярное умножение вектора силы на вектор перемещения (рис. 16).

Таким образом, определим, что *элементарная механическая работа* – СФВ, характеризующая процесс изменения механического состояния системы и численно равная скалярному произведению векторов силы и перемещения:

$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = Fdr \cos \alpha,$$

где α – угол между направлениями элементарного перемещения $d\vec{r}$ и силы \vec{F} . В зависимости от значения угла α элементарная работа может быть отрицательной, положительной или равной нулю.

Важным свойством работы является ее *аддитивность*. Это означает, что:

а) Полная работа, совершенная несколькими силами, действующими в системе, равна алгебраической сумме работ, совершенных каждой силой в отдельности;

б) Полная работа, совершенная силой на всей траектории движения тела, равна алгебраической сумме работ, совершенных этой силой на отдельных ее участках.

Выразим свойство аддитивности равенством $A = \sum_{i=1}^n A_i$, где n – число сил

(для первого случая) или число рассматриваемых участков траектории (для второго случая).

В общем случае сила, действующая на тело, может меняться в процессе движения, как по величине, так и по направлению. Для того чтобы получить формулу для расчета работы переменной силы, рассмотрим движение тела под действием произвольной силы \vec{F} из точки 1 в точку 2 (рис. 17). Разобьем весь путь на бесконечно малые участки таким образом, чтобы сила на каждом участке была постоянной и по величине, и по направлению. Тогда, в соответствии с определением, на каждом из них сила \vec{F} совершает элементарную работу

$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = Fdr \cos \alpha.$$

Поскольку участки малы, то можно приравнять между собой модули перемещения и пути $|d\vec{r}| = dS$. Тогда формулу для элементарной работы можно записать и в виде:

$$dA = F dS \cos \alpha = F_S dS,$$

где F_S – проекция силы на перемещение.

Чтобы найти работу на всем пути S_{12} , необходимо, пользуясь свойством аддитивности, просуммировать элементарные работы, перейдя к интегралу

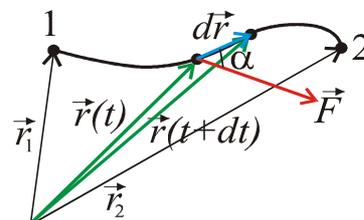


Рис. 17. Элементарное перемещение при действии силы

$$A = \int_1^2 F_S dS.$$

Единицей работы в СИ является джоуль: $[A] = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}$.

По отношению к изменению состояния механической системы все силы можно разделить на две группы:

а) *консервативные силы* – силы, работа которых не зависит от формы траектории движения, а определяется только начальным и конечным положениями тела (силы тяжести, силы упругости, кулоновские силы и т. д.). Поля, создаваемые консервативными силами, называются *потенциальными*. Из определения вытекает важное следствие: *работа консервативной силы на замкнутой траектории равна нулю*;

б) *неконсервативные силы* – силы, работа которых помимо начального и конечного положения точки зависит и от *формы траектории* ее движения (все силы сопротивления и трения, силы тяги, создаваемые механизмами, силы давления, магнитные силы и т. д.).

Помимо факта совершения силой работы в ряде случаев имеет значение время, за которое она совершается. Это вызывает необходимость ввести в рассмотрение физической величины, называемой мощностью.

Мощность – СФВ, характеризующая быстроту (интенсивность) совершения механизмом работы и численно *равная работе, совершаемой в единицу времени*:

$$\langle N \rangle = \frac{A}{t}.$$

Перейдя к пределу, получим выражение для мощности:

$$N = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt}.$$

Учитывая, что

$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = (\vec{F} \cdot \vec{v}) \cdot dt,$$

получим

$$N = (\vec{F} \cdot \vec{v}) = F \cdot v \cdot \cos \alpha = F_S \cdot v.$$

Мощность в данный момент времени равна произведению проекции силы на скорость движения в этот момент. Размерностью мощности в СИ является ватт: $[N] = \text{Дж}/\text{с} = \text{Вт}$.

В механике работа силы, способствующей достижению требуемого состояния системы, считается *полезной*, а силы препятствующей – *бесполезной*. Например, при подъеме груза с помощью какого-либо механизма наряду с работой по преодолению силы тяжести совершается работа против сил сопротив-

ления и трения. Соотношение полезной и бесполезной работ, совершаемых механизмом, может служить мерой его эффективности.

Коэффициент полезного действия (КПД) η – СФВ, характеризующая эффективность механизма и численно равная отношению полезной работы A_p к работе затраченной A . КПД – величина безразмерная, она выражается в долях (или процентах):

$$\eta = \frac{A_p}{A} 100 \text{ \%}.$$

14. Механическая энергия. Кинетическая энергия

Для сравнения разных состояний одной и той же системы или состояний различных типов физических систем между собой, требуется введения некоторой универсальной физической величины, которая позволяла бы оценить способность различных форм движения к взаимным превращениям, и в тоже время, являлась бы однозначной, конечной и непрерывной функцией параметров состояния системы.

Совершая работу (например, изменяя скорость тела или деформируя его), сила изменяет состояние соответствующей механической системы. Следовательно, работа может быть представлена в виде изменения некоторой непрерывной функции параметров состояния, которую называют *энергией*:

$$A = W_2 - W_1.$$

Энергия, как и работа, измеряется в джоулях.

Заметим, что сама энергия системы W не может быть измерена непосредственно. В экспериментах обычно определяется лишь ее изменение (т. е. работа, совершенная в том или ином процессе). Поэтому для энергии системы необходимо устанавливать уровень, относительно которого она отсчитывается.

Наличие двух групп параметров механического состояния – координат и импульсов – приводит к необходимости разделения механической энергии на две составляющие: *кинетическую* и *потенциальную*.

Кинетической энергией называют энергию, зависящую от скорости движения тела.

Сила, действующая на покоящееся тело, вызывает его движение. При этом она совершает работу, которая на малом перемещении $d\vec{r}$ определяется как $dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r})$. Энергия движущегося тела возрастает на величину затраченной работы, т. е. $dW_k = dA$. Пусть в начальной точке пути скорость была равной v_1 , а в конечной точке пути стала равной v_2 . Тогда изменение кинетической энергии равно

$$W_{k2} - W_{k1} = \int_{v_1}^{v_2} dA = \int_{v_1}^{v_2} (\vec{F} \cdot d\vec{r}).$$

Учитывая, что $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$ и $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, получим

$$\Delta W_k = \int_{v_1}^{v_2} m\vec{v} \cdot d\vec{v}.$$

Так как векторы \vec{v} и $d\vec{v}$ направлены в одну сторону, то $d\vec{v} \cdot \vec{v} = dv \cdot v$ и

$$\Delta W_k = m \int_{v_1}^{v_2} v \cdot dv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

Отсюда вытекает формула, определяющая кинетическую энергию тела как:

$$W_k = \frac{mv^2}{2} + C,$$

где C – произвольная постоянная. В классической механике принимается, что $C = 0$. Тогда получим

$$W_k = \frac{mv^2}{2}.$$

Кинетическая энергия может быть только положительной величиной. Ее значение определяется выбором системы отсчета.

15. Потенциальная энергия

Потенциальной называется энергия, зависящая от взаимного расположения тел или взаимодействия частей одного и того же тела и определяемая характером сил взаимодействия между ними. Физический смысл имеет только понятие потенциальная энергия системы.

Пусть в пространстве существует стационарное силовое поле, созданное некоторым телом, которое будем считать точечным. Примем, что это тело является одновременно и телом отсчета. Если в некоторую точку поля M поместить другое тело (материальную точку), то оно испытывает действие силы, зависящей от расстояния r до источника поля, т. е. $F = F(r)$. При движении тела сила, действующая со стороны поля, совершают работу. В общем случае работа зависит от формы и длины пути. Но поскольку мы будем иметь дело с *потенциальными полями*, т. е. *полями консервативных сил*, то работа будет определяться только начальным и конечным положением тела и не зависеть от формы траектории, по которой происходит перемещение этого тела. В физике принято присваивать работе положительный знак в том случае, если она совершена консервативными силами и отрицательной – если работа совершена против кон-

сервативных сил.

Сформулированное свойство потенциальных полей математически означает следующее:

$$dA_k = -dW_p(r).$$

Работа, совершаемая в стационарном силовом поле при перемещении тела из некоторой точки 1 в точку 2, равна:

$$A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Тогда изменение потенциальной энергии между этими точками определяется соотношением:

$$-(W_{p2} - W_{p1}) = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Таким образом, *потенциальная энергия – это СФВ, изменение которой равно (взятой со знаком минус) работе, совершаемой консервативными силами поля.*

Найдем потенциальную энергию тела массой m в гравитационном поле, созданным телом массой M . Условимся считать, что когда они находятся на бесконечности ($r = \infty$), их потенциальная энергия взаимодействия $W_p(\infty) = 0$.

Тогда

$$W_p(r) = \int_r^\infty \vec{F}_\gamma \cdot d\vec{r}.$$

Согласно закону всемирного тяготения

$$\vec{F}_\gamma = -G \frac{mM}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}.$$

Подставим это выражение в формулу для потенциальной энергии. Получим

$$W_p(r) = -\int_r^\infty G \frac{mM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} d\vec{r} = -\int_r^\infty G \frac{mM}{r^2} dr = G \frac{mM}{r} \Big|_r^\infty = -G \frac{mM}{r}.$$

Таким образом, под потенциальной энергией гравитационного взаимодействия $W_p(r)$ следует понимать работу, совершаемую силами поля при перемещении тела из данной точки поля в бесконечность.

Теперь вычислим потенциальную энергию тела массой m , находящегося в

однородном поле силы тяжести у поверхности Земли. Пусть под действием силы тяжести тело переместилось из точки с координатой h_1 в точку с координатой h_2 (рис. 18). Движение прямолинейное и происходит под действием постоянной силы. В этом случае разность потенциальных энергий будет равна

$$W_p(h_2) - W_p(h_1) = - \int_{h_1}^{h_2} \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = \int_{h_1}^{h_2} F_{gy} \cdot dy = mg(h_2 - h_1).$$

Здесь учтено, что проекция силы тяжести $\vec{F}_{gy} = m\vec{g}$ на ось y отрицательна.

Начало отсчета потенциальной энергии выберем так, чтобы у поверхности Земли она равнялась нулю. Тогда потенциальная энергия тела, поднятого на высоту h , равна

$$W_p = mgh,$$

а потенциальная энергия тела, находящегося на дне шахты (глубина h)

$$W_p = -mgh.$$

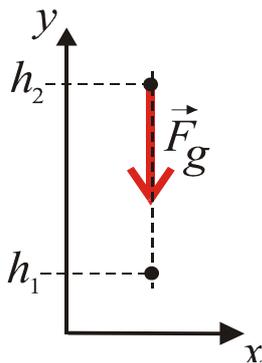


Рис. 18. Работа силы тяжести

Таким образом, она может быть как положительной, так и отрицательной: ее величина определяется выбором нулевого уровня.

Найдем потенциальную энергию упругодеформированного стержня. Под действием силы упругости деформированного стержня точка A переместилась из положения с координатой x_1 в положение с координатой x_2 (рис. 19). За начало отсчета выберем положение, соответствующее недеформированному стержню. В этом случае проекция силы упругости на ось x пропорциональна координате: $F_1 = -k \cdot x$ (проекция вектора удлинения Δl равна величине деформации x). Тогда разность потенциальных энергий

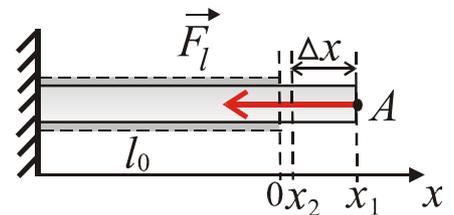


Рис. 19. Работа упругой силы

$$W_p(x_2) - W_p(x_1) = - \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}_l \cdot d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} kx \cdot dx = k \left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} \right).$$

Таким образом, потенциальная энергия упругодеформированного тела относительно энергии недеформированного тела, принятой за ноль, оказывается равной

$$W_p(x) = k \frac{x^2}{2}.$$

Контрольные вопросы

- В чем различие между понятиями энергии и работы?
- Как найти работу переменной силы?
- Чем отличаются консервативные силы от не консервативных сил?
- Что такое мощность? Выведите ее формулу.
- Какова связь между силой и потенциальной энергией?
- Чем обусловлено изменение потенциальной энергии?
- Дайте определения и выведите формулы для известных видов механической энергии.

16. Законы Ньютона для системы материальных точек

Третий закон Ньютона в соединении с первым и вторым законами позволяют перейти от динамики отдельной материальной точки к динамике произвольной механической системы.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из N материальных точек (тел) (рис. 20). Все тела, не входящие в рассматриваемую механическую систему, называются внешними, а силы, действующие со стороны этих тел на систему, называются *внешними силами*. Силы взаимодействия между материальными точками самой системы называются *внутренними*.

Пусть $\vec{F}_i^{\text{внеш}}$ – сумма всех внешних сил, действующих на i -тую точку системы; \vec{F}_{ik} – внутренняя сила, действующая на i -тую точку со стороны k -той. Тогда результирующая сила, действующая на i -тую материальную точку равна:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{внеш}} + \sum_{k=1}^N \vec{F}_{ik}.$$

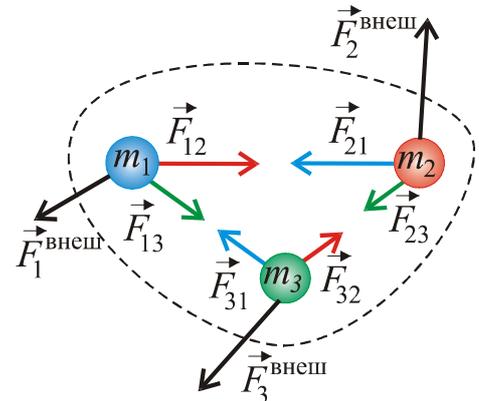


Рис. 20. Силы взаимодействия

В этом случае второй закон Ньютона примет вид:

$$\frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = \vec{F}_i^{\text{внеш}} + \sum_{k=1}^N \vec{F}_{ik}; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Просуммируем левые и правые части этого выражения по i для всех материальных точек:

$$\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{внеш}} + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \vec{F}_{ik}.$$

По третьему закону Ньютона: $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$. Отсюда $\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \vec{F}_{ik} = 0$. Обозначим:

$$\vec{F}^{\text{внеш}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{внеш}} \quad \text{— как результирующую всех внешних сил и} \quad \vec{p} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

— как полный импульс механической системы. Тогда

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\text{внеш}}.$$

Получили закон изменения импульса механической системы: *производная по времени от импульса механической системы равна вектору внешних сил, действующих на систему.*

17. Закон сохранения импульса

Рассмотрим *замкнутую* (изолированную) систему. Если система замкнута, то $\vec{F}_i^{\text{внеш}} = 0$. В отсутствии внешних сил

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0, \quad \text{а} \quad \vec{p} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \text{const.}$$

Это выражение является математической формой записи *закона сохранения импульса*, который утверждает, что *при любом характере взаимодействия тел, образующих замкнутую систему, вектор полного импульса этой системы все время остается постоянным.*

Закон сохранения полного импульса изолированной системы — это универсальный закон природы. В более общем случае, когда система незамкнута, полный импульс системы не остается постоянным. Его изменение за единицу времени равно геометрической сумме всех внешних сил. Однако в некоторых случаях импульс незамкнутой системы также может сохраняться. Такое возможно:

а) если (например, при взрыве, ударе или выстреле) импульсы частей системы претерпевают большие изменения за сравнительно короткие промежутки времени. Это связано с возникновением в системе кратковременных, но весьма значительных по величине внутренних сил взаимодействия частей системы, по сравнению с которыми все постоянно действующие на систему внешние силы оказываются малыми. В этом случае внешними силами можно пренебречь и импульс всей системы в целом не изменяется;

б) если результирующая внешних сил $\vec{F}^{\text{внеш}} = 0$;

в) если система замкнута в каком-либо направлении. Например, если на систему действуют внешние силы, направленные только вертикально (проекция $F_x^{\text{внеш}} = 0$), то проекция $p_x = \text{const.}$

В основе закона сохранения импульса лежит однородность пространства, т. е. одинаковость свойств пространства во всех точках. Одинаковость следует понимать в том смысле, что параллельный перенос замкнутой системы из одного места в другое без изменения взаимного расположения и скоростей частиц не изменяет механические свойства системы. Это означает, что если в системе происходит какой-то процесс (например, столкновение тел и их дальнейшее разлетание), то он будет происходить точно так же, если вся система как целое сдвинута на некоторое расстояние.

18. Энергия системы материальных точек

Рассмотрим сначала незамкнутую систему материальных точек, в которой действуют внутренние консервативные силы, и выясним, как изменяется энергия в такой системе. Для этого запишем уравнение движения для i -той точки:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \dots + \vec{F}_{in} + \vec{F}_i^{\text{внеш}} + \vec{f}_i; \quad i=1,2,\dots,n,$$

где $\vec{F}_{i1}; \vec{F}_{i2}; \dots; \vec{F}_{in}$ – внутренние силы, действующие на i -тую точку; $\vec{F}_i^{\text{внеш}}$ – внешние консервативные силы; \vec{f}_i – внешние не консервативные силы.

За бесконечно малое время dt точка совершит перемещение $d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt$. Умножим левую и правую часть уравнения движения на это перемещение:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \vec{v}_i dt = (\vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \dots + \vec{F}_{in}) d\vec{r}_i + \vec{F}_i^{\text{внеш}} d\vec{r}_i + \vec{f}_i d\vec{r}_i.$$

Произведение $m_i \vec{v}_i d\vec{v}_i$ является изменением кинетической энергии одной материальной точки, сумма $(\vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \dots + \vec{F}_{in} + \vec{F}_i^{\text{внеш}}) d\vec{r}_i$ – изменением ее потенциальной энергии, а произведение $\vec{f}_i d\vec{r}_i$ – элементарной работой внешних не консервативных сил. Тогда

$$dW_{ki} = -dW_{pi} + dA_{i\text{внеш}}^{\text{неконс}}.$$

Просуммируем левые и правые части этого выражения по всем материальным точкам

$$\sum_{i=1}^n dW_{ki} = -\sum_{i=1}^n dW_{pi} + \sum_{i=1}^n dA_{i\text{внеш}}^{\text{неконс}}.$$

Получим

$$dW_k = -dW_p + dA_{\text{внеш}}^{\text{неконс}},$$

где dW_k – изменение кинетической энергии системы; dW_p – изменение потенциальной энергии взаимодействия всех материальных точек; $dA_{\text{внеш}}^{\text{неконс}}$ – работа внешних не консервативных сил над всей системой за время dt .

Преобразуем его к виду $d(W_k + W_p) = dA_{\text{внеш}}^{\text{неконс}}$. Выражение в круглых скобках представляет собой полную механическую энергию системы $W = W_k + W_p$. Тогда

$$dW = dA_{\text{внеш}}^{\text{неконс}},$$

Интегрируя эту формулу по промежутку времени от t_1 до t_2 , получим

$$W_2 - W_1 = A_{\text{внеш}}^{\text{неконс}}.$$

Изменение полной механической энергии в незамкнутой консервативной системе равно работе внешних не консервативных сил.

19. Закон сохранения механической энергии в консервативной системе

Если консервативная система замкнута (внешние не консервативные силы отсутствуют $A_{\text{внеш}}^{\text{неконс}} = 0$), то

$$W_k + W_p = \text{const.}$$

Получили закон сохранения энергии в замкнутой консервативной системе: *сумма кинетической и потенциальной энергии всех материальных точек, входящих в замкнутую консервативную систему, остается величиной постоянной, какие бы изменения в ней не происходили.*

Для тела, находящегося в поле силы тяжести, закон сохранения энергии имеет вид

$$\frac{mv^2}{2} + mgh = \text{const.}$$

При решении задач его удобнее брать в форме, связывающей два разных момента времени, а именно:

$$\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2.$$

Если система подвергается действию *не консервативных* сил, механическая энергия убывает, переходя в другие виды энергии (например, в тепловую энергию при действии сил трения). Согласно всеобщему закону сохранения и превращения энергии, уменьшение или увеличение полной механической энергии системы в точности компенсируется увеличением или уменьшением како-

го-либо другого вида энергии. Энергия никуда не исчезает и не появляется вновь, а лишь переходит от одного тела к другому или превращается из одного вида в другой.

В основе сохранения энергии лежит однородность времени, т. е. равнозначность всех моментов времени. Равнозначность следует понимать в том смысле, что замена момента времени t_1 моментом t_2 без изменения координат и скоростей частиц не изменяет механические свойства системы. Это означает, что если какой-то процесс начался в момент времени t_1 , то он будет протекать точно так же, как если бы он начался в момент времени t_2 .

20. Соударение двух тел

Примером применения законов сохранения импульса и энергии при решении реальной физической задачи является удар абсолютно упругих и неупругих тел.

Удар или соударение – это столкновение двух или более тел, при котором взаимодействие длится очень короткое время. Процесс соударения двух тел

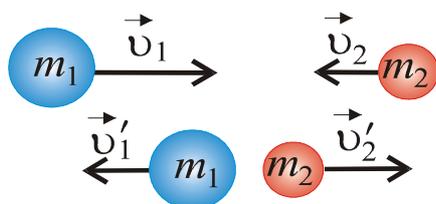


Рис. 21. Упругий удар

можно разделить на две фазы. Первая фаза начинается с момента соприкосновения тел, имеющих в этот момент скорость сближения $(v_2 - v_1)$. К концу первой фазы сближение тел прекращается, а часть их кинетической энергии переходит в потенциальную энергию деформации. Во второй фазе происходит обратный переход потенциальной энергии упругой деформации в кинетическую энергию тел. При этом тела начинают расходиться, и к концу второй фазы будут иметь скорость расхождения $(v_2' - v_1')$.

энергии упругой деформации в кинетическую энергию тел. При этом тела начинают расходиться, и к концу второй фазы будут иметь скорость расхождения $(v_2' - v_1')$.

При рассмотрении столкновений необходимо знать форму тел, массы покоя, скорости движения и их упругие свойства. Простейшим видом соударений является *центральный удар тел, при котором тела до удара движутся поступательно вдоль прямой, проходящей через их центры масс.*

Существует два предельных вида удара: центральный абсолютно упругий и центральный абсолютно неупругий.

1. *Абсолютно упругий удар* – столкновение двух тел (рис. 21), в результате которого не происходит превращения механической энергии системы соударяющихся тел в другие виды энергии. Следовательно, для абсолютно упругого удара выполняются законы сохранения механической энергии и импульса:

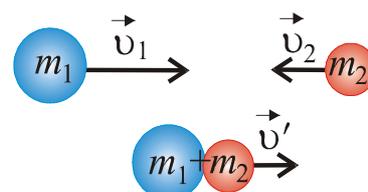


Рис. 22. Неупругий удар

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}, \quad m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'.$$

2. *Абсолютно неупругий удар* – это такой удар (рис. 22), в результате которого тела объединяются, двигаясь дальше как единое целое.

При абсолютно неупругом ударе кинетическая энергия тел полностью или частично превращается во внутреннюю энергию, поэтому здесь неприменим закон сохранения механической энергии, а применим лишь закон сохранения импульса:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}', \Rightarrow v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

В общем случае во внутреннюю энергию тел переходит часть кинетической энергии (идет на работу деформации и нагревание тел), величину которой можно определить по разности кинетической энергии тел до и после удара:

$$\Delta W_k = \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \right) - \frac{(m_1 + m_2) v'^2}{2} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2.$$

Таким образом, для неупругого удара не выполняется закон сохранения механической энергии, но справедлив закон сохранения суммарной энергии различных видов – механической и внутренней.

Контрольные вопросы

- Какие механические системы являются замкнутыми?
- В чем заключается закон сохранения импульса? В каких системах он выполняется? Почему он является фундаментальным законом природы?
- Каким свойством пространства обуславливается справедливость закона сохранения импульса?
- Необходимо ли условие замкнутости системы для выполнения закона сохранения механической энергии?
- В чем заключается закон сохранения механической энергии? Для каких систем он выполняется?
- В чем физическая сущность закона сохранения и превращения энергии? Почему он является фундаментальным законом природы?
- Чем отличается абсолютно упругий удар от абсолютно неупругого?
- Как определить скорости тел после центрального абсолютно упругого удара? Следствием каких законов являются эти выражения?

21. Момент силы. Момент импульса

Теперь рассмотрим вращательное движение тел под действием внешних сил. Для начала введем основные физические величины применительно к простым случаям вращения материальной точки. Такими величинами являются

момент силы и момент импульса относительно центра и оси вращения.

Моментом силы относительно центра вращения O называется ВФВ, характеризующая вращательное действие силы, равная векторному произведению радиус-вектора, проведенному из центра вращения к точке приложения силы, на силу

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}].$$

Модуль момента силы равен

$$M = r \cdot F \cdot \sin \alpha = F \cdot d,$$

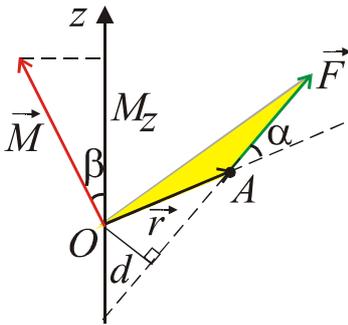


Рис. 23. Момент силы относительно точки

где α – угол между \vec{F} и \vec{r} ; $d = r \cdot \sin \alpha$ – кратчайшее расстояние между линией действия силы и центром вращения (точка O) – плечо силы. Размерность момента силы $[M] = \text{Н} \cdot \text{м}$ (рис. 23).

Моментом силы относительно неподвижной оси z называется СФВ M_z , равная проекции на эту ось вектора \vec{M} момента силы, определенного относительно произвольной точки O данной оси z . Значение $M_z = M \cdot \cos \beta$ не зависит от выбора положения

точки O на оси z (рис. 24).

Моментом импульса материальной точки A относительно центра вращения O называется ВФВ, являющаяся мерой механического движения материальной точки при вращательном движении, равная векторному произведению радиус-вектора, проведенному из центра вращения к материальной точке, на её импульс:

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}].$$

Модуль момента импульса

$$L = r \cdot p \cdot \sin \alpha,$$

где α – угол между \vec{p} и \vec{r} . Размерность момента импульса $[L] = \text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$.

Моментом импульса относительно неподвижной оси z называется СФВ L_z , равная проекции на эту ось вектора \vec{L} момента импульса, определенного относительно произвольной точки O данной оси z . Значение $L_z = L \cdot \cos \beta$ не зависит от выбора положения точки O на оси z .

Моменты силы и импульса – псевдовектора, перпендикулярные плоскости, в которой лежат векторы-сомножители, и направленные в сторону, совпадающую с направлением поступательного движения правого винта при его

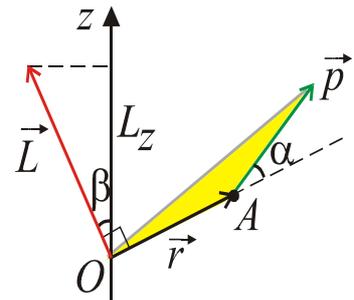


Рис. 24. Момент силы относительно оси

вращении в направлении силы или импульса.

Установим связь между моментом силы и моментом импульса материальной точки. Если на материальную точку массы m действует сила F , то уравнение движения согласно второму закону Ньютона имеет вид

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

Проведем из точки O к точке A массой m радиус-вектор \vec{r} . Теперь умножим векторно с левой стороны обе части уравнения движения на \vec{r} :

$$\left[\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \right] = [\vec{r} \times \vec{F}].$$

Правая часть этого уравнения есть момент сил относительно выбранной оси:

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}].$$

Левая часть есть производная по времени от момента импульса материальной точки относительно выбранной оси:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \frac{d}{dt} [\vec{r} \times \vec{p}].$$

Чтобы убедиться в этом, продифференцируем момент импульса по времени

$$\frac{d}{dt} [\vec{r} \times \vec{p}] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} \right] + \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \right].$$

Так как $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, а $\vec{p} = m\vec{v}$, то $\left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} \right] = [\vec{v} \times m\vec{v}] = 0$, т. е. векторное произведение двух коллинеарных векторов \vec{v} и $m\vec{v}$ равно нулю. Окончательно можно записать

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

Это выражение представляет собой основное уравнение динамики вращательного движения материальной точки.

22. Момент инерции

Рассмотрим простой случай вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Пусть эта ось совпадает, например, с осью z декартовой системы координат. Разобьем тело на столь малые элементы, чтобы их можно было бы считать

материальными точками. При вращении абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси каждая отдельная точка тела массой m_i движется по окружности постоянного радиуса \vec{r}_i с некоторой скоростью \vec{v}_i . Скорость и импульс \vec{p}_i перпендикулярны этому радиусу. Поэтому для отдельной материальной точки (частицы) можно записать: $L_i = r_i \cdot m_i \cdot v_i$. Принимая во внимание, что $v_i = \omega \cdot r_i$, получим

$$L_i = (m_i \cdot r_i^2) \omega.$$

Введем новую величину – *момент инерции материальной точки относительно оси вращения* – СФВ, характеризующую инерционные свойства материальной точки при движении по окружности и численно равную произведению массы на квадрат радиуса круговой траектории: $I = mr^2$. Тогда момент импульса отдельной материальной точки можно определить как:

$$L_i = I_i \cdot \omega.$$

Момент инерции твердого тела относительно оси вращения определяется как сумма моментов инерции материальных точек, составляющих тело

$$I = \sum m_i r_i^2.$$

Если тело сплошное, то момент инерции тела определяется интегралом:

$$I = \int_0^m r^2 dm.$$

Момент инерции тела существенно зависит от его геометрии (формы), а также от положения оси вращения, т.е. зависит от распределения массы тела относительно оси вращения. Если выбрать новую ось вращения, оставив без изменения форму и размеры тела, то изменится и момент инерции тела. Поэтому определенный смысл момент инерции имеет только в том случае, когда задана ось вращения.

Значительное упрощение в вычислениях момента инерции тела относительно оси, не проходящей через центр масс этого тела, можно получить, если применить **теорему Штейнера**: *момент инерции тела I относительно произвольной оси равен моменту инерции I_0 относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния d между осями:*

$$I = I_0 + md^2.$$

23. Определение моментов инерции тел

1. Момент инерции тонкостенного цилиндра массы m и радиуса R относительно его оси.

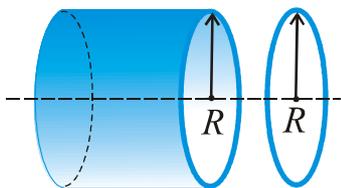


Рис. 25. Полый цилиндр и обруч

Все малые элементы такого цилиндра находятся на одном и том же расстоянии R от его оси, проходящей через центр его масс. Поэтому

$$I_c = \int_{(m)} R^2 dm = mR^2.$$

По этой же формуле вычисляется момент инерции однородного обруча относительно оси, перпендикулярной к плоскости обруча и проходящей через его центр (рис. 25).

2. Момент инерции сплошного однородного кругового цилиндра массы m и радиуса R относительно его оси.

Разобьем мысленно цилиндр высотой H на очень большое число соосных тонкостенных цилиндров (рис. 26). Выделим один из них. Пусть радиус этого цилиндра равен r . Тогда момент инерции выделенного цилиндра можно определить как

$$dI_0 = r^2 dm = r^2 2\pi r H dr = r^3 2\pi r H dr.$$

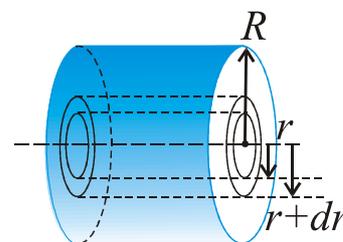


Рис. 26. Сплошной цилиндр

Так как $dm = \rho dV = \rho H dS = 2\pi r H dr$, то момент инерции сплошного цилиндра равен

$$I_0 = \int_0^R r^3 2\pi r H dr = 2\pi r H \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} R^4 \pi r H.$$

С учетом того, что $m = \rho V = \rho \pi R^2 H$, получим: $I_0 = mR^2 / 2$. По этой же формуле вычисляется момент инерции однородного диска относительно оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через его центр.

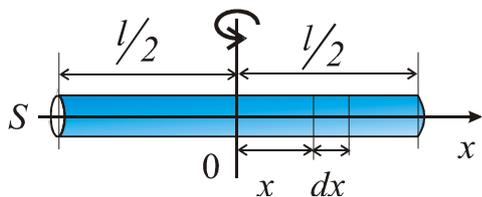


Рис. 27. Стержень с осью вращения в центре

3. Момент инерции стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через центр масс.

Разобьем стержень на малые элементы (рис. 27). Пусть x – расстояние до оси, dx – длина элемента. Момент инерции этого элемента

$$I_0 = \int_{(m)} x^2 dm = \int_0^{l/2} x^2 \rho S dx + \int_0^{l/2} x^2 \rho S dx = 2 \int_0^{l/2} x^2 \rho S dx = \frac{2}{3} \rho S \left(\frac{l}{2}\right)^3 = \frac{ml^2}{12},$$

где $m = \rho V = \rho l S$, $\sqrt{S} \ll l$.

Если ось вращения параллельна данной и проходит через один из концов стержня, то для нахождения момента инерции воспользуемся теоремой Штейнера: $I = I_0 + md^2$ (рис. 28). В данном случае $d = l/2$, а $I_0 = ml^2/12$, тогда

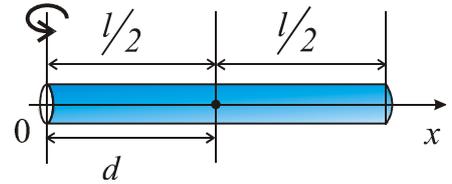


Рис. 28. Стержень с осью вращения на одном из концов

$$I = I_0 + md^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{(3+1)ml^2}{12} = \frac{ml^2}{3}.$$

Следовательно, момент инерции при таком переносе оси вращения увеличился в 4 раза. Подобные рассуждения приводят к выражению моментов инерции других тел.

4. Момент инерции шара относительно его диаметра

$$I_0 = \frac{2}{5} mR^2.$$

Момент инерции шара относительно оси, параллельной диаметру и проходящей на расстоянии l от центра масс

$$I = \frac{2}{5} mR^2 + ml^2.$$

5. Момент инерции цилиндра с отверстием (колесо, муфта)

$$I_0 = \frac{1}{2} m(R_1^2 + R_2^2).$$

24. Уравнение динамики вращательного движения твердого тела

Рассмотрим вначале материальную точку массой m , движущуюся по окружности радиуса r (рис. 29). Пусть на нее действует постоянная сила F , направленная по касательной к окружности. По второму закону Ньютона эта сила вызывает тангенциальное ускорение: $\vec{F} = m\vec{a}_\tau$. Используя соотношение $\vec{a}_\tau = [\vec{\epsilon} \times \vec{r}]$, получим

$$\vec{F} = m[\vec{\epsilon} \times \vec{r}].$$

Умножим с левой стороны обе части полученного равенства векторно на радиус вектор \vec{r} :

$$[\vec{r} \times \vec{F}] = m[\vec{r} \times [\vec{\epsilon} \times \vec{r}]] = mr^2 \vec{\epsilon}.$$

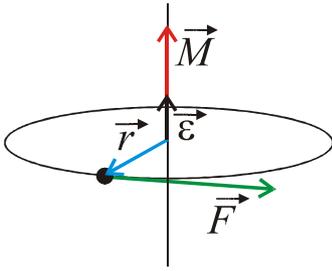


Рис. 29. Ориентация векторов

Левая часть этого равенства является моментом силы: $\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]$. В правой части произведение $I = mr^2$ является моментом инерции. Таким образом

$$\vec{M} = I \cdot \vec{\epsilon}.$$

Получили основное уравнение динамики вращательного движения материальной точки: *угловое ускорение материальной точки при ее вращении вокруг неподвижной оси пропорционально вращающему моменту и обратно пропорционально моменту инерции.*

Так как твердое тело представляет систему жестко связанных друг с другом материальных точек, то уравнение движения одного элемента (среди совокупности других) имеет вид

$$I_i \vec{\epsilon}_i = \vec{M}_i^{\text{внеш}} + \vec{M}_i^{\text{внут}},$$

где $\vec{M}_i^{\text{внут}}$ – моменты внутренних сил; $\vec{M}_i^{\text{внеш}}$ – моменты внешних сил. Просуммируем это соотношением по всем элементам:

$$\sum I_i \vec{\epsilon}_i = \sum \vec{M}_i^{\text{внеш}} + \sum \vec{M}_i^{\text{внут}}.$$

Внутренние силы, взаимодействия между двумя элементами, одинаковы и эти силы имеют одинаковое плечо ($\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$), поэтому

$$\sum \vec{M}_i^{\text{внут}} = 0.$$

Под влиянием момента внешних сил тело будет вращаться с угловым ускорением ϵ , постоянным для всех элементов. Тогда

$$\vec{M}^{\text{внеш}} = I \cdot \vec{\epsilon},$$

где $I = \sum I_i$ – сумма моментов инерции всех элементов; $\vec{M}^{\text{внеш}} = \sum \vec{M}_i^{\text{внеш}}$ – полный момент внешних сил.

Это уравнение описывает *основной закон динамики вращательного движения твердого тела*: угловое ускорение твердого тела прямо пропорционально полному моменту внешних сил и обратно пропорционально моменту инерции тела.

25. Закон сохранения момента импульса

Величина полного момента импульса твердого недеформируемого тела относительно оси вращения равна арифметической сумме моментов импульса всех его точек, так как все они вращаются в одном и том же направлении:

$$\vec{L} = \vec{\omega}(\sum m_i r_i^2) = \vec{\omega}I .$$

Продифференцируем его по времени:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \frac{dI}{dt} .$$

Будем считать, что момент инерции тела I относительно рассматриваемой оси вращения остается все время постоянным, а угловая скорость изменяется со временем. Тогда

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\epsilon} .$$

Сопоставляя полученное выражение с основным законом динамики вращательного движения твердого тела, получим

$$\vec{M}^{\text{внеш}} = I\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{L}}{dt} .$$

Это соотношение справедливо не только для одного тела, но и для системы тел, вращающихся вокруг заданной оси.

В замкнутой системе момент внешних сил $\vec{M}^{\text{внеш}} = 0$ и, следовательно, $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, откуда получаем, что $\vec{L} = \text{const}$, где \vec{L} – векторная сумма моментов импульсов тел, входящих в эту систему. Данное выражение представляет собой закон сохранения момента импульса: *сумма моментов импульса всех тел замкнутой системы сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени.*

Если в процессе вращения момент инерции системы тел изменяется, то при этом должна изменяться и угловая скорость движения, причем, согласно закону сохранения момента импульса

$$I_1\vec{\omega}_1 = I_2\vec{\omega}_2 = \text{const} .$$

Закон сохранения момента импульса проявляется как в технике (например, в устройстве вертолета – для изменения ориентации), так и в природе (вращение Земли вокруг своей оси происходит с постоянной угловой скоростью, поскольку не изменяется ее момент инерции).

В основе сохранения момента импульса лежит изотропия пространства, т. е. одинаковость свойств пространства по всем направлениям. Одинаковость следует понимать в том смысле, что поворот замкнутой системы как целого не отражается на ее механических свойствах. Это означает, что если в системе происходит какой-то процесс (например, столкновение тел), то он будет происходить точно так же и в том случае, когда система повернута на некоторый угол.

26. Кинетическая энергия вращающегося тела

Определим кинетическую энергию вращающегося тела. Эта энергия должна быть равна сумме кинетических энергий отдельных материальных точек

$$W_k = \sum \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Учтем, что $v_i = \omega r_i$ и $I = \sum m_i r_i^2$, тогда получим

$$W_k = \sum \frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \omega^2 \sum \frac{m_i r_i^2}{2} = \frac{I \omega^2}{2}.$$

Если тело катится по поверхности другого тела (например, цилиндр скатывается без трения с наклонной плоскости), то центр масс движется поступательно, а само тело вращается, поэтому энергия движения складывается из энергии поступательного движения и энергии вращения:

$$W_k = \frac{m v_c^2}{2} + \frac{I \omega^2}{2},$$

где v_c – скорость центра масс тела; I – момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс; ω – угловая скорость вращения тела.

Из сопоставления кинетической энергии для поступательного и вращательного движения видно, что *мерой инертности* при вращательном движении служит *момент инерции*.

27. Работа внешних сил при вращении твердого тела

При вращении твердого тела его потенциальная энергия не изменяется, поэтому элементарная работа внешних сил равна приращению кинетической энергии тела:

$$dA_{\text{внеш}} = d \left(\frac{I \omega^2}{2} \right) = I \omega d\omega = I \omega \frac{d\omega}{dt} dt = I \omega \varepsilon dt.$$

Учитывая, что $I \varepsilon = M$, $\omega dt = d\varphi$, имеем

$$dA_{\text{внеш}} = M \cdot d\varphi.$$

Работа внешних сил при повороте твердого тела на конечный угол φ

$$A_{\text{внеш}} = \int_0^{\varphi} M \cdot d\varphi.$$

Если $M = \text{const}$, то работа вычисляется как: $A_{\text{внеш}} = M \cdot \varphi$.

Контрольные вопросы

- Что называется моментом силы относительно неподвижной точки? относительно неподвижной оси? Как определяется направление момента силы?
- Что такое момент импульса материальной точки? твердого тела? Как определяется направление вектора момента импульса?
- Что такое момент инерции тела? Какова роль момента инерции во вращательном движении?
- Выведите формулу для момента инерции обруча, цилиндра и стержня.
- Сформулируйте и поясните теорему Штейнера.
- Выведите и сформулируйте уравнение динамики вращательного движения твердого тела.
- В чем заключается физическая сущность закона сохранения момента импульса? В каких системах он выполняется? Приведите примеры.
- Каким свойством симметрии пространства обуславливается справедливость закона сохранения момента импульса?
- Какова формула для кинетической энергии тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, и как ее вывести?
- Какую работу совершает равнодействующая всех сил, приложенных к телу, равномерно движущемуся по окружности?

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

28. Преобразования Галилея.

Механический принцип относительности

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета. Первая система K с осями декартовых координат x, y, z – неподвижна, а другая (система K' с осями декартовых координат x', y', z') пусть равномерно и прямолинейно движется со скоростью \vec{v} относительно первой. Примем для простоты, что оси x и x'

совпадают, а скорость относительного движения направлена вдоль оси x или x' (рис.30).

Пусть теперь в момент t' в системе K' в точке M с координатами x', y', z' произошло событие – включение электрической лампочки. В классической физике принимается, что такое же время регистрирует и наблюдатель в системе K , т. е. $t = t'$. Если отсчет времени начинается с момента, когда начала координат обеих систем совпадали, то за время t система K' переместится на расстояние, равное $u \cdot t$, и координаты лампочки, измеренные наблюдателем в системе K , будут иметь значение x, y, z .

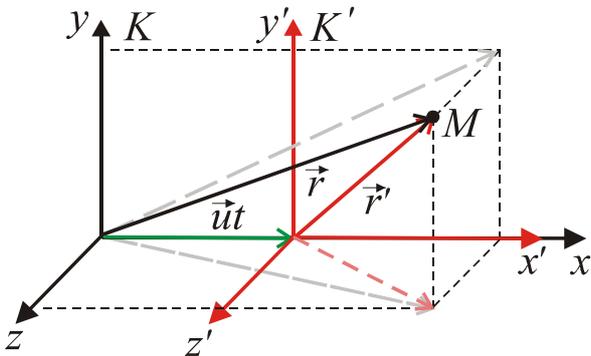


Рис. 30. Инерциальные системы отсчета

На рис.30 видно, что между координатами этого события в системах K и K' легко устанавливается связь:

$$t = t', \quad (1)$$

$$x' = x - ut, \quad (2)$$

$$y' = y, \quad (3)$$

$$z' = z, \quad (4)$$

или в векторной форме:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t.$$

Соотношения (1) – (4) называются *преобразованиями Галилея*. Они связывают координаты и время события в указанных двух инерциальных системах отсчета.

Дифференцируя формулы (2) – (4) по времени, получим классический закон сложения скоростей:

$$v'_x = v_x - u; \quad v'_y = v_y; \quad v'_z = v_z.$$

Здесь v'_x, v'_y, v'_z – проекции вектора относительной скорости тела \vec{v}' (по отношению к системе отсчета K'), а v_x, v_y, v_z – проекции вектора абсолютной скорости \vec{v} (по отношению к системе отсчета K). В векторной форме закон сложения скоростей примет вид: $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$. Это уравнение справедливо при любом выборе взаимных направлений координатных осей.

Продифференцируем его по времени и учтем, что $\vec{u} = \text{const}$. Получим

$$\vec{a} = \vec{a}'.$$

В классической механике считается, что масса тела не зависит от системы отсчета, т. е. $m = m'$. Следовательно, внешние силы, действующие на тело, со-

гласно второму закону Ньютона ($\vec{F} = m\vec{a}$) в обеих системах отсчета будут одинаковыми

$$F = F'.$$

Силы, с которыми взаимодействуют материальные точки (или тела) внутри системы (внутренние силы), также являются одинаковыми относительно преобразований Галилея

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \text{ и } \vec{F}'_{12} = -\vec{F}'_{21}.$$

Это следует из того, что силы взаимодействия:

а) зависят от расстояния между точками, которые в классической механике принимаются одинаковыми во всех системах отсчета;

б) зависят от относительных скоростей точек, которые одинаковы во всех системах отсчета.

Таким образом, законы Ньютона не изменяются при переходе от системы K в систему K' .

На этом основании можно сформулировать *механический принцип относительности Галилея*: во всех инерциальных системах отсчета одни и те же механические явления протекают одинаковым образом, и никакими механическими опытами, проводимыми внутри данной инерциальной системы отсчета, невозможно установить, покоится система отсчета или движется равномерно и прямолинейно.

29. Постулаты специальной теории относительности

Классическая механика Ньютона прекрасно описывает движение тел, если они перемещаются с малыми скоростями ($v \ll c$). Однако в конце XIX века выяснилось, что выводы классической механики противоречат некоторым опытным данным. Из экспериментов также следовало, что скорости света, измеренные в двух движущихся друг относительно друга системах, равны, что противоречило правилу сложения скоростей классической механики.

Возникли затруднения и при попытках применить механику Ньютона к объяснению распространения света. Было показано, что классическая теория противоречит уравнениям Максвелла, лежащим в основе понимания света как электромагнитной волны.

Создатель теории относительности А. Эйнштейн предложил (1905 г.) принципиально новый подход к электродинамике движущихся тел. Проанализировав огромный экспериментальный материал, Эйнштейн выбрал два наиболее бесспорных положения и построил на их основе свою теорию.

Эти положения называются постулатами специальной теории относительности. Они формулируются следующим образом:

1. *В любых инерциальных системах отсчета все физические явления (механические, электромагнитные и др.) при одних и тех же условиях протекают*

одинаково; иначе говоря, с помощью любых опытов, проведенных в замкнутой системе тел, нельзя обнаружить, покоится эта система или движется равномерно и прямолинейно.

2. Скорость света в вакууме не зависит от скорости движения источников света; она одинакова во всех направлениях и во всех инерциальных системах отсчета, т. е. представляет собой универсальную постоянную.

Первый постулат Эйнштейна выражает принцип относительности, являющийся обобщением механического принципа относительности Галилея на любые физические процессы. Его справедливость, как и второго постулата, подтверждают разнообразные опыты.

Принцип относительности можно сформулировать, исходя из понятия инвариантности, следующим образом: *уравнения, выражающие законы природы, инвариантны по отношению к преобразованиям координат и времени при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.*

30. Относительность одновременности

В классической механике считалось совершенно очевидным, что два события, одновременные в какой-либо системе отсчета, будут одновременными и во всех остальных системах отсчета. Однако это утверждение находится в противоречии с принципом постоянства скорости света. В этом можно убедиться, рассмотрев процесс распространения светового сигнала в двух инерциальных системах отсчета, одна из которых K – неподвижная, а другая K' движется относительно нее с некоторой скоростью \vec{u} .

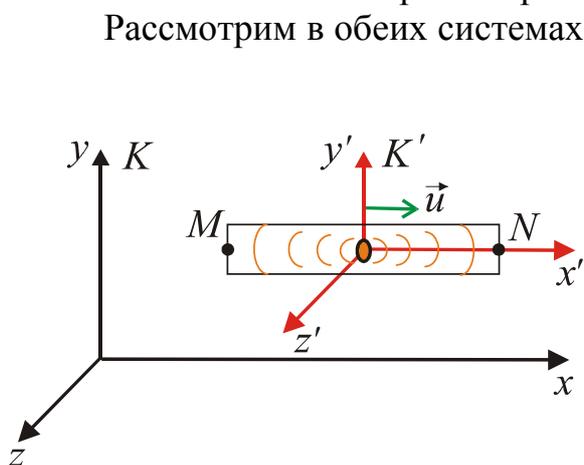


Рис. 31. События в различных системах отсчета

Рассмотрим в обеих системах один и тот же процесс – испускание из центра системы K' светового сигнала и его попадание в точки M и N (рис. 31), жестко связанные с движущейся системой K' и находящиеся от неё на одинаковом расстоянии. Так как скорость света во всех направлениях одинакова, то в системе K' свет достигнет точек M и N одновременно. В неподвижной системе K свет также распространяется во все стороны с одинаковой скоростью c , но точка M движется навстречу, а точка N – в ту же сторону, что и световой сигнал. Поэтому точка M сигнал достигнет раньше, чем точки N .

Итак, события, которые в системе K' были одновременными, в системе K оказываются неодновременными. Отсюда вытекает, что *время в разных системах отсчета течет неодинаковым образом, т. е. $t' \neq t$.*

Итак, события, которые в системе K' были одновременными, в системе K оказываются неодновременными. Отсюда вытекает, что *время в разных системах отсчета течет неодинаковым образом, т. е. $t' \neq t$.*

Если бы в нашем распоряжении имелись мгновенно распространяющиеся сигналы, то события, одновременные в одной системе отсчета, были бы одновременными и в любой другой системе. Это непосредственно следует из рас-

смотренного примера. В этом случае течение времени не зависело бы от системы отсчета и тогда можно было бы говорить об абсолютном времени, которое фигурирует в преобразованиях Галилея. Постоянство скорости света приводит к тому, что пространство и время оказываются взаимосвязанными, образуя единое пространство – время.

31. Преобразования Лоренца

Эйнштейн показал, что, в соответствии с двумя постулатами теории относительности, зависимости между координатами и временем в двух инерциальных системах отсчета K и K' , выражаются не преобразованиями Галилея, а более сложным образом.

Предположим, что правильное преобразование координат отличается от преобразования Галилея множителем γ :

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - ut); \\x &= \gamma(x' + ut').\end{aligned}$$

Для отыскания множителя γ рассмотрим распространение фронта светового сигнала.

Пусть световой сигнал начал свое движение вдоль оси x и x' из начала координат систем K и K' в тот момент времени, когда они совпадали. Тогда, согласно второму постулату Эйнштейна, к моменту времени t и t' сигнал распространится на расстояние $x = ct$, и $x' = ct'$.

Подставив эти выражения в преобразования координат, получим два уравнения:

$$\begin{aligned}ct' &= \gamma(ct - ut) = \gamma(c - u)t; \\ct &= \gamma(ct' + ut') = \gamma(c + u)t'.\end{aligned}$$

Из первого уравнения выразим время t и подставим его во второе уравнение. После несложных преобразований получим

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

где $\beta = u/c$.

С учетом этого выражения преобразования координат и времени переписутся в следующем виде:

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t' = \frac{t - x \frac{u}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

В направлении осей y и y' смещение не происходит. Соотношения между координатами y и y' от времени не зависят, так как оси перпендикулярны к вектору относительной скорости. Следовательно, в направлениях, перпендикулярных к вектору скорости, координаты преобразуются тождественно, т. е.

$$y = y'; \quad z = z'.$$

Объединяя полученные соотношения, найдем, что преобразования координат и времени при переходе от систем $K \rightarrow K'$ и $K' \rightarrow K$ будут иметь соответственно следующий вид:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \beta^2}} & x &= \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \\ y' &= y & y &= y'; \\ z' &= z & z &= z'; \\ t' &= \frac{t - x \frac{u}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} & t &= \frac{t' + x' \frac{u}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned}$$

Эти соотношения носят название *преобразований Лоренца*.

Преобразования Лоренца верны при любых скоростях, как при малых, так и при сколь угодно больших, возможных в природе скоростях. Но при малых скоростях, где $\frac{u}{c} \ll 1$, членами, содержащими $\frac{u^2}{c^2}$ и $\frac{u}{c^2}$, можно пренебречь и преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея. Следовательно, преобразования Галилея являются частным случаем более общих преобразований Лоренца.

Особенно важным являются следующие отличия преобразований Лоренца от преобразований Галилея. В рамках преобразований Галилея расстояния между двумя событиями есть абсолютная величина. Это расстояние не меняется при переходе от одной системы отсчета к другой. То же относится и к промежутку времени между этими событиями. Преобразования Лоренца показывают, что как расстояния, так и промежуток времени меняется при переходе от одной системы отсчета к другой. При этом оказывается, что пространственные и временные отношения зависимы.

Из преобразований Лоренца вытекает ряд необычных с точки зрения классической механики следствий.

32. Одновременность событий в разных системах отсчета

Пусть в системе K в двух точках с координатами x_1 и x_2 происходят одновременно два события в момент времени $t_1 = t_2 = b$.

Согласно преобразованиям Лоренца, в системе K' этим событиям будут

соответствовать координаты и моменты времени

$$x'_1 = \frac{x_1 - ub}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad x'_2 = \frac{x_2 - ub}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad t'_1 = \frac{b - \frac{u}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad t'_2 = \frac{b - \frac{u}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Если рассматривать два события, происходящие в системе K в разных точках, например $x_2 > x_1$, то из преобразований Лоренца следует, что в системе K' будет $t'_1 > t'_2$.

Таким образом, события одновременные в одной системе отсчета, будут неодновременными в другой системе, движущейся относительно первой, т. е. имеет место относительность одновременности двух событий, происходящих в разных точках пространства.

Если *одновременные* события в системе K происходят в одном и том же месте пространства: $x_2 = x_1$, то и в системе K' они также одноместны и одновременны: $x'_1 = x'_2$ и $t'_1 = t'_2$.

Следует отметить, что сказанное относится лишь к событиям, между которыми отсутствует причинно-следственная связь. Например, выстрел и попадание пули в мишень ни в одной из систем отсчета не будут одновременными. И во всех системах события, являющиеся причиной, будут предшествовать следствию.

33. Длина тел в разных системах отсчета

Рассмотрим стержень, расположенный вдоль оси x и покоящийся относительно подвижной системы отсчета K' . Длина стержня в системе K' равна $l_0 = x'_2 - x'_1$, где x'_1 и x'_2 – неизменяющиеся со временем координаты концов стержня. Эта величина называется *собственной длиной* или *собственными размерами тела* (рис. 32).

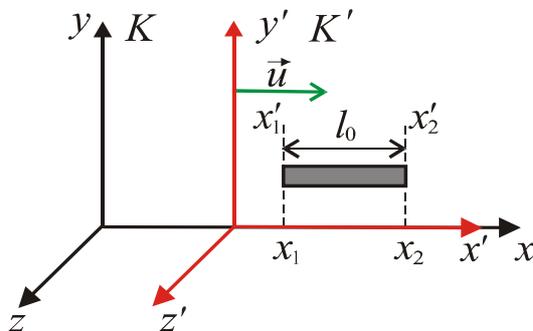


Рис. 32. Длина стержня в различных системах отсчета

Относительно системы K стержень движется со скоростью u . Для определения длины стержня в неподвижной системе K нужно отметить координаты концов стержня x_1 и x_2 в один и тот же момент времени $t_1 = t_2 = b$. Их разность

$$x_2(t) - x_1(t) = l$$

и дает длину стержня, измеренную в системе K . Выразим длину l через l_0 . Для этого запишем соотношения для координат из преобразований Лоренца:

$$x'_1 = \frac{x_1 - ub}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad x'_2 = \frac{x_2 - ub}{\sqrt{1 - \beta^2}};$$

откуда

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \text{ или } l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Из полученного соотношения следует, что длина стержня, измеренная в системе, относительно которой он движется, оказывается меньше длины l_0 , измеренной в системе, относительно которой стержень покоится. Это явление называется *лоренцевым сокращением*.

Поперечные размеры тела не зависят от скорости его движения и одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. Обобщая все сказанное, можно утверждать, что линейные размеры тела максимальны в той инерциальной системе отсчета, относительно которой тело находится в покое.

34. Длительность событий в разных системах отсчета

Пусть в точке M , неподвижной относительно системы K' , происходит событие продолжительностью $\tau_0 = t'_2 - t'_1$. Началу события в этой системе соответствует координата $x'_1 = a$ и момент времени t'_1 , концу события – координата $x'_2 = a$ и момент времени t'_2 . Относительно системы K точка M , в которой происходит событие, перемещается со скоростью u . Согласно преобразованиям Лоренца, началу и концу события соответствует в системе K :

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{u}{c^2} a}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{u}{c^2} a}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

откуда

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Обозначим $\tau = t_2 - t_1$. Полученная формула примет вид: $\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$.

Рассматривая протекание события в системе K , можно определить τ как длительность события, измеренную по неподвижным часам. Тогда τ_0 это длительность события, измеренная по часам, движущимся вместе с телом. Оно называется *собственным временем* тела.

Из полученного соотношения следует, что длительность события, происходящего в некоторой точке M , минимальна в той инерциальной системе отсчета, относительно которой эта точка неподвижна.

Этот результат можно также сформулировать следующим образом: *часы, движущиеся относительно инерциальной системы отсчета, идут медленнее покоящихся часов*. Замедление хода часов становится существенным при скоростях v , близких к скорости света в вакууме. Релятивистский эффект замедления хода времени был подтвержден в опытах с мюонами.

Контрольные вопросы

- В чем физическая сущность механического принципа относительности?
- В чем заключается правило сложения скоростей в классической механике?
- Каковы причины возникновения специальной теории относительности?
- В чем заключаются основные постулаты специальной теории относительности?
- Запишите и прокомментируйте преобразования Лоренца. При каких условиях они переходят в преобразования Галилея?
- Какой вывод о пространстве и времени можно сделать на основе преобразований Лоренца?
- Одновременны ли события в системе K' , если в системе K они происходят в одной точке и одновременны? Обоснуйте ответ.
- Какие следствия вытекают из специальной теории относительности для размеров тел и длительности событий в разных системах отсчета? Обоснуйте ответ.
- При какой скорости движения релятивистское сокращение длины движущегося тела составит 25 %?

35. Релятивистский закон сложения скоростей

Рассмотрим движение материальной точки в инерциальной системе K' , которая, в свою очередь, движется относительно системы K со скоростью u .

В системе K положение точки определяется в каждый момент времени t координатами x, y, z . Выражения

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

представляют собой проекции вектора скорости на оси x, y, z .

В системе K' положение точки характеризуется в каждый момент времени t' координатами x', y', z' . Проекции на оси x', y', z' вектора скорости точки относительно системы K' определяются следующими выражениями:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'}.$$

Из преобразований Лоренца вытекает, что

$$dx = \frac{dx' + udt'}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad dy = dy'; \quad dz = dz'; \quad dt = \frac{dt' + \frac{u}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Разделив первые три равенства на четвертое, получим формулы преобразования скоростей при переходе от одной системы отсчета к другой:

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u}{c^2}v'_x}; \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{u}{c^2}v'_x}; \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{u}{c^2}v'_x}.$$

Полученные формулы выражают *закон сложения скоростей* в релятивистской кинематике.

В случае, когда $u \ll c$, эти формулы переходят в формулы сложения скоростей в классической механике.

Все изложенное выше показывает, что законы релятивистской механики в случае малых скоростей переходят в законы классической механики.

Таким образом, классическая механика не отвергается, а лишь ограничивается определенными пределами применимости: случаями, когда относительные скорости тел много меньше скорости света. Она верна как частный случай общей механики Эйнштейна – случай малых скоростей.

36. Пространственно-временной интервал

Любое событие можно охарактеризовать местом, где оно произошло и временем, когда оно произошло. Таким образом, событие можно описать четырьмя координатами: x, y, z, ct , где c – скорость света.

Рассмотрим четырехмерное пространство (пространство Минковского), на координатных осях которого будем откладывать пространственные и временные координаты. В этом пространстве событие изобразится точкой, которую принято называть мировой точкой. Всякой частице (даже неподвижной) соответствует в четырехмерном пространстве некоторая линия, называемая мировой линией (для покоящейся частицы она имеет вид прямой линии, параллельной временной оси ct).

Пусть одно событие имеет координаты x_1, y_1, z_1, ct_1 , а другое событие – координаты x_2, y_2, z_2, ct_2 . Величину

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}$$

называют *интервалом* между соответствующими событиями.

Введя расстояние $r_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ между точками обычного трехмерного пространства, в которых произошли оба события, и, обозначив разность как $t_{12} = t_2 - t_1$, выражение для интервала можно записать в следующем виде: $s_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - r_{12}^2}$.

Легко убедиться в том, что величина интервала между двумя данными событиями оказывается во всех инерциальных системах одной и той же. Чтобы упростить выкладки, запишем квадрат интервала в системе K как

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - (x_{12}^2 + y_{12}^2 + z_{12}^2).$$

Интервал между теми же событиями в системе K' равен

$$s'_{12}{}^2 = c^2 t'_{12}{}^2 - (x'_{12}{}^2 + y'_{12}{}^2 + z'_{12}{}^2).$$

Преобразования координат и времени дают следующие соотношения:

$$x'_{12} = \frac{x_{12} - u \cdot t_{12}}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad y'_{12} = y_{12}; \quad z'_{12} = z_{12}; \quad t'_{12} = \frac{t_{12} - \frac{u}{c^2} x_{12}}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Теперь, подставив их в формулу для интервала, получим

$$s'_{12}{}^2 = c^2 t'_{12}{}^2 - (x'_{12}{}^2 + y'_{12}{}^2 + z'_{12}{}^2) = s_{12}^2 = inv.$$

Таким образом, *интервал* s_{12} (или его квадрат) является *инвариантом* (*inv*) (т. е. не изменяется) по отношению к переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой.

В то же время видно, что t_{12} и r_{12} сами по себе не являются инвариантами, т. е. изменяются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

37. Динамика теории относительности. Законы сохранения

Выясним смысл первого постулата специальной теории относительности, который гласит, что *все законы природы инвариантны относительно преобразований Лоренца*. Это значит, что если какой-либо закон природы представлен в виде $A = B$, и, хотя при переходе от одной инерциальной системы к другой величины A и B могут меняться, сам закон всегда остается неизменным и называется инвариантным относительно этого перехода.

В предыдущем параграфе мы установили, что инвариантом является пространственно-временной интервал – интервал между двумя точками (событиями) в четырехмерном пространстве: $s_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - r_{12}^2} = inv$. Ему соответствует

четырёхмерный вектор $\vec{A}_\mu = (\vec{A}, A_{ct}) = (\vec{r}_{12}, ct_{12})$, где обычный трёхмерный вектор \vec{r}_{12} называется пространственной, а ct_{12} – временной составляющей. Если умножить или разделить составляющие четырёхмерного вектора на одно и то же число, то образуется новый четырёхмерный вектор $\vec{B}_\mu = (\vec{B}, B_{ct})$, который также будет обладать инвариантом $B_{ct}^2 - \vec{B}^2 = inv$.

Таким образом, смысл первого постулата специальной теории относительности заключается в том, что все четырёхмерные векторы пространства Минковского инвариантны относительно преобразования Лоренца. Это надо понимать так, что не изменяет своего вида (сохраняется) разность между квадратом временной составляющей и квадратом пространственной составляющей четырёхмерного вектора для любой инерциальной системы отсчета при преобразованиях типа:

$$B'_x = \frac{B_x - \frac{u}{c} B_{ct}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad B'_y = B_y, \quad B'_z = B_z, \quad B'_{ct} = \frac{B_{ct} - \frac{u}{c} B_x}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Пространства, в которых выполняются такие свойства, называются псевдоевклидовыми [5].

Рассмотрим частицу, движущуюся со скоростью \vec{v} относительно неподвижной системы K . Для простоты рассуждений будем считать, что частица покоится в системе K' . За время dt ее перемещение будет $d\vec{r}$. Эти величины образуют четырёхмерный вектор $S_\mu = (d\vec{r}, cdt)$. Умножим его составляющие на величину m_0/dt_0 , где m_0 – некоторая постоянная, а $dt_0 = dt' = dt\sqrt{1 - \beta^2}$ – собственное время, т. е. время, которое показывают покоящиеся в системе K' часы. Получим четырёхмерный вектор:

$$\vec{p}_\mu = \frac{m_0}{dt_0} (d\vec{r}, cdt) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left(\frac{d\vec{r}}{dt}, c \frac{dt}{dt} \right) = m(\vec{v}, c) = (m\vec{v}, mc),$$

где $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$. Если частица движется медленно, то $v \ll c$ и $\beta \rightarrow 0$. Тогда

пространственная составляющая четырёхмерного вектора равна $\vec{p}_0 = m_0\vec{v}$, где \vec{p}_0 – импульс в нерелятивистской (классической) механике; m_0 – масса покоя.

Поэтому естественно определить $m\vec{v}$ как релятивистский импульс: $\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$,

а $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ – как массу движения или релятивистскую массу.

Основной закон релятивистской динамики (второй закон Ньютона) будет

ИМЕТЬ ВИД

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \vec{v} \right).$$

Это выражение является инвариантным по отношению к преобразованиям Лоренца. Возрастание инерционных свойств электронов при их ускорении, впервые экспериментально обнаруженное В. Кауфманом в 1900 году, подтверждает правильность этой формулы. При малых скоростях движения $\beta \rightarrow 0$ эта формула приобретает вид:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m_0\vec{v}) = m_0 \frac{d}{dt} \vec{v} = m_0 \vec{a}$$

и мы убеждаемся, что формула в теории относительности переходит в формулу классической механики Ньютона.

Полученный четырехмерный вектор $\vec{p}_\mu = (\vec{p}, mc)$ инвариантен относительно преобразования Лоренца, а величина $(mc)^2 - p^2 = (m_0c)^2$ – его инвариант (при $v = 0$ следует, что $p = 0$, а $m = m_0$). Выясним смысл временной части mc . Для этого вычислим работу силы, действующей на частицу

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{d\vec{p}}{dt} \vec{v} \cdot dt = d\vec{p} \cdot \frac{m\vec{v}}{m} = \frac{1}{m} \vec{p} \cdot d\vec{p}.$$

Продифференцируем инвариант для вектора \vec{p}_μ . Получим $2mc^2 dm - 2pdp = 0$. Теперь выразим произведение $pdp = mc^2 dm$ и подставим его в выражение для работы. Получим $dA = c^2 dm$. Работа силы идет на увеличение кинетической энергии частицы, которая определяется интегрированием этого выражения по m :

$$E_k = \int_{m_0}^m c^2 dm = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right).$$

Полученное выражение можно трактовать как разницу между полной энергией частицы $E = mc^2$ и энергией покоя $E_0 = m_0c^2$. Или полную энергию можно представить как сумму кинетической энергии и энергии покоя.

При малых скоростях движения частицы $\beta \rightarrow 0$. Полагая $\beta^2 = x$, разложим в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ первое слагаемое в круглых скобках, ограничиваясь двумя членами ряда: $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \cong 1 + \frac{1}{2}x$.

Подставляя его в выражение для кинетической энергии, получим $E_k = \frac{1}{2}m_0v^2$, так что при малых скоростях кинетическая энергия имеет такой же вид, как и в классической механике.

Временную часть mc четырехмерного вектора (\vec{p}, mc) представим теперь как E/c , что следует из формулы для полной энергии. Получим новый вектор $(\vec{p}, E/c)$. Импульс и энергия теперь объединены в четырехмерный вектор, называемый *вектором импульса-энергии*. Относительно преобразований Лоренца этот вектор имеет инвариант

$$(E/c)^2 - p^2 = (m_0c)^2 = inv.$$

Отсюда легко получить связь полной энергии частицы с релятивистским импульсом:

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}.$$

Итак, в теории относительности законы сохранения импульса и энергии перестают быть независимыми законами, а объединяются в единый *закон сохранения четырехмерного вектора импульса-энергии* или проще – *закон сохранения импульса-энергии*.

При $v = c$ импульс и энергия частицы обращаются в бесконечность. Это значит, что частица с отличной от нуля массой не может двигаться со скоростью света. Заметим, что существуют частицы (*фотоны, нейтрино* и др.), для которых масса покоя равна нулю: $m_0 = 0$. Формула для энергии приобретает вид: $E = pc$. Такие частицы всегда движутся со скоростью света, иначе, как следует из соответствующих выражений для энергии и импульса, они обратились бы в нуль.

Рассмотрим выражение для полной энергии $E = mc^2$. Из него вытекает, что энергия частицы и его релятивистская масса всегда пропорциональны друг другу. *Всякое изменение энергии частицы $\Delta E = \Delta mc^2$ сопровождается изменением релятивистской массы $\Delta m = \Delta E/c^2$, и наоборот.* Это утверждение носит название *закона взаимосвязи релятивистской массы и энергии* (исключаем изменение потенциальной энергии во внешнем поле сил).

В заключение отметим, что теория относительности – фундаментальная физическая теория, охватывающая всю физику. В ее основе лежат принципы или постулаты, подтвержденные экспериментально, по крайней мере, с той высокой точностью, которая может быть достигнута современными приборами.

Теория относительности является наиболее общей теорией, включающей в себя классическую физику. При скоростях, много меньших скорости света, все формулы релятивистской теории переходят в формулы классической физики.

Контрольные вопросы

- В чем заключается релятивистский закон сложения скоростей? Как показать, что он находится в согласии с постулатами Эйнштейна?
- Как определяется интервал между событиями? Докажите, что он является инвариантом при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.
- Какой вид имеет основной закон релятивистской динамики? Чем он отличается от основного закона ньютоновской механики?
- В чем заключается закон сохранения релятивистского импульса?
- Как выражается кинетическая энергия в релятивистской механике?
- При каком условии релятивистская формула для кинетической энергии переходит в классическую формулу?
- Сформулируйте и запишите закон взаимосвязи массы и энергии. В чем его физическая сущность?

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

38. Статистический и термодинамический методы исследования вещества

Молекулярная физика и термодинамика – разделы физики, в которых изучаются макроскопические процессы, связанные с огромным числом содержащихся в телах атомов и молекул. Примером макроскопических систем могут служить газы, жидкости, твердые тела, плазма. Размеры атомов или молекул по сравнению с размерами макросистем очень малы. Они изменяются в диапазоне от 10^{-10} м (размер атома водорода) до 10^{-7} м (размер молекулы белка вируса). Можно сказать, что *макросистема – это совокупность материальных объектов конечных размеров, построенная, как правило, из очень большого числа частиц*. Органы чувств человека не позволяют различать размеры, форму, энергию и импульс отдельных молекул. Однако ряд экспериментов косвенно, а в отдельных случаях прямо позволяет это сделать. К *прямым методам наблюдения* молекул относятся методы современной микроскопии: электронной, ионной, голографической. *Косвенные методы наблюдения*: броуновское движение, давление газа на стенки сосудов, диффузия газов и жидкостей, вязкое трение и др. Все эти явления могут быть объяснены, если считать, что вещества:

- а) состоят из атомов и молекул;
- б) находятся в состоянии непрерывного беспорядочного движения;
- в) между ними действуют силы взаимодействия – притяжения и отталкивания.

Для исследования макроскопических процессов применяют два качественно различных и взаимно дополняющих друг друга метода: *статистический (молекулярно-кинетический)* и *термодинамический*. Первый лежит в основе молекулярной физики, второй – термодинамики.

Термодинамический метод состоит в изучении физических свойств макроскопических систем путем анализа условий и количественных превращений энергии в рассматриваемых системах. Термодинамика базируется на двух экспериментально установленных законах – первом и втором законах (началах) термодинамики, а также на принципе Нернста, применение которого необходимо лишь для решения сравнительно небольшого числа задач.

С помощью термодинамики можно получить многие сведения о физических свойствах тел в различных условиях, не интересуясь при этом какими-либо представлениями о внутреннем строении исследуемых тел и характеристиками движения образующих их частиц. В силу того, что начала термодинамики получены на основании обобщения большой совокупности опытных фактов, выводы термодинамики имеют весьма общий характер.

Статистический метод исходит из молекулярно-кинетических представлений о строении вещества, используя при этом законы статистики и теории вероятностей. В молекулярно-кинетической теории (статистической физике) все свойства макроскопической системы, которые наблюдаются на опыте (давление, температура и т. п.) в конечном счете, связываются со свойствами, частиц системы, особенностями их движения и средними значениями их скоростей, энергий и других динамических характеристик.

Молекулярно-кинетическая теория и термодинамика взаимно дополняют друг друга, образуя единое целое, отличаясь лишь различными методами исследований. Оба метода должны давать одинаковые результаты относительно свойств и состояния вещества в аналогичных условиях и, следовательно, между параметрами вещества, описывающими его состояние в молекулярно-кинетической теории и термодинамике, должна существовать закономерная взаимосвязь.

Основными параметрами вещества в молекулярно-кинетической теории (МКТ) являются параметры, относящиеся к микрочастицам: масса, размер, скорости их движения и характер взаимодействия, а также количество частиц в веществе или количество частиц в единице объема вещества (концентрация).

Основными термодинамическими параметрами вещества являются температура, давление, объем, масса вещества, количество вещества, внутренняя энергия и ряд других.

39. Основные понятия и модели

Количество вещества ν – СФВ, численно равная числу специфических структурных элементов, составляющих данное тело (систему).

Количество вещества – одна из основных единиц системы СИ. Выбор единицы ее измерения производится *по договоренности*. За единицу количества вещества в системе СИ принят 1 моль:

Моль – СФВ, характеризующая количество вещества системы, содержащей столько же специфических структурных элементов, сколько атомов содержится в массе 0,012 кг изотопа углерода ^{12}C . В 1 моле любого вещества содер-

жится одинаковое число структурных элементов, равное $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹. Величина N_A называется постоянной Авогадро.

Так как массы структурных элементов различных веществ различны, то одинаковые количества вещества имеют разную массу и могут быть охарактеризованы величиной *молярной массы*.

Молярная масса вещества μ – СФВ, являющаяся характеристикой данного вещества и численно равная массе числа Авогадро специфических для этого вещества структурных элементов: $\mu = m_0 N_A$.

Число молей ν , содержащихся в данной массе вещества, вычисляется с помощью соотношения

$$\nu = \frac{m}{\mu} = \frac{N}{N_A},$$

где N – число молекул, содержащихся в данной массе m вещества.

Концентрация n – СФВ, характеризующая распределение вещества по объему и численно равная числу частиц, приходящихся на единицу объема:

$$n = \frac{N}{V}.$$

Локальное (в данной точке пространства) значение концентрации определяется как:

$$n = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta V} = \frac{dN}{dV}.$$

Самой простой моделью макроскопической системы является газ. Для описания существенных черт поведения реального вещества используется модель идеального газа.

Идеальный газ предполагает следующие допущения:

а) собственный объем молекул газа пренебрежимо мал по сравнению с объемом сосуда;

б) между молекулами газа отсутствуют силы взаимодействия;

в) столкновения молекул газа между собой и со стенками сосуда абсолютно упругие.

Термодинамическая система – макроскопическая система, обменивающаяся с *внешней средой* веществом и энергией и исследуемая методами термодинамики. Термодинамическая система, которая не может обмениваться с внешней средой веществом, называется *закрытой*; если нет обмена веществом и энергией система называется *изолированной*.

40. Параметры состояния

Термодинамическая система может находиться в различных состояниях,

отличающихся *температурой, давлением, объемом и массой*. Подобные величины, характеризующие состояние системы, называются *параметрами состояния*.

Давление P определяется как отношение силы, действующей перпендикулярно площадке, к ее площади: $P = \frac{F}{S}$.

Объем V – это область пространства, занимаемая телом.

В первом приближении *термодинамическую температуру T* можно определить как величину, характеризующую *степень нагретости* тела. Экспериментально подтверждено, что более нагретые тела передают энергию в виде тепла менее нагретым телам. Для предсказания направления тепловых потоков возникает необходимость сравнивать степень нагретости тел между собой. Сделать это, очевидно, можно лишь путем сравнения их с нагретостью некоторого *эталонного тела*.

Выбором эталонного тела определяется шкала термодинамической температуры. Так в наиболее привычной для нас стоградусной шкале, иногда не совсем точно называемой «шкалой Цельсия», за нуль принята точка равновесия воды со льдом при нормальном атмосферном давлении, а за 100 градусов – точка кипения воды также при нормальном атмосферном давлении. За один градус Цельсия принимается одна сотая доля этого температурного интервала.

В наиболее распространенной в англоязычных странах шкале Фаренгейта интервал между точкой кипения воды и таяния льда при нормальном атмосферном давлении разделен на 180 градусов, причем точке таяния льда соответствует температура $+32\text{ }^{\circ}\text{F}$.

С другой стороны, из многочисленных экспериментов следует, что *средняя кинетическая энергия молекул газа* не зависит от его природы, а *определяется лишь его температурой*. Это дает возможность ввести величину абсолютной температуры.

Абсолютная температурная шкала может быть выбрана единственным способом: *нуль абсолютной температуры* должен соответствовать состоянию системы, в которой прекратилось бы (по классическим представлениям) *тепловое* движение частиц. Следует отметить, что при температурах, близких к абсолютному нулю, средняя кинетическая энергия движения молекул уже не пропорциональна абсолютной температуре и стремится не к нулю, а к некоторой минимальной энергии.

Абсолютная температура в системе СИ измеряется в кельвинах. Один *Кельвин (К)* определяется как $\frac{1}{273,16}$ части термодинамической температуры тройной точки воды ($T_{\text{тр}} = 273,16\text{ К}$; $P_{\text{тр}} = 609\text{ Па}$). На практике величины градуса Цельсия и Кельвина принимаются одинаковыми, а температурные шкалы связываются соотношением:

$$T(\text{К}) = t(^{\circ}\text{C}) + 273.$$

41. Газовые законы

Экспериментальное исследование свойств газов, проведенное в XVII-XVIII вв. Бойлем, Мариоттом, Гей-Люссаком, Шарлем, привело к формулировке следующих газовых законов:

1. *Закон Бойля-Мариотта.* Для данной массы газа при постоянной температуре ($T = \text{const}$) давление газа на его объем есть величина постоянная: $PV = \text{const}$.

2. *Закон Гей-Люссака.* При постоянном давлении ($P = \text{const}$) объем данной массы газа прямо пропорционален его температуре: $V = V_0 \alpha T$. Здесь $\alpha = 1/273,15 \text{ K}^{-1}$, V_0 – объем газа при 0°C .

3. *Закон Шарля.* При постоянном объеме ($V = \text{const}$) давление данной массы газа прямо пропорционально его температуре: $P = P_0 \alpha T$. Здесь $\alpha = 1/273,15 \text{ K}^{-1}$, P_0 – давление газа при 0°C .

4. *Закон Авогадро.* Моли любых газов при одинаковой температуре и одинаковом давлении занимают одинаковые объемы.

5. *Закон Дальтона.* Давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений входящих в нее газов: $P = \sum_{i=1}^N P_i$.

Парциальное давление – давление, которое производил бы газ, входящий в состав газовой смеси, если бы он один занимал объем, равный объему смеси при той же температуре.

42. Уравнение состояния идеального газа

Уравнением состояния термодинамической системы называется уравнение, которое связывает давление, объем и температуру системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия:

$$f(P, V, T) = 0.$$

Объединение газовых законов в один позволило Клапейрону и Менделееву получить соотношение

$$PV = \frac{m}{\mu} RT,$$

где m – масса газа; μ – молярная масса газа; $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ – универсальная газовая постоянная. Это соотношение называется *уравнением состояния идеального газа*.

Часто пользуются несколько иной формой записи этого уравнения, вводя постоянную Больцмана: $k = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ и учитывая, что общее число

молекул, содержащихся в $\frac{m}{\mu}$ молей идеального газа, равно $N = \frac{m}{\mu} N_A$. В этом случае уравнение может быть представлено в виде:

$$PV = N_A \frac{m}{\mu} kT = NkT.$$

Разделив его правую и левую часть на объем V , получим: $P = nkT$, где n – концентрация молекул.

Таким образом, *давление идеального газа при данной температуре прямо пропорционально концентрации его молекул.*

Необходимо отметить, что уравнение состояния, полученное из опытных газовых законов, описывает состояние именно реального газа, который при нормальных условиях ведет себя как идеальный. При низких температурах и/или высоких давлениях уравнение Менделеева-Клапейрона уже не описывает состояние реального газа. Позднее мы рассмотрим такое уравнение – уравнение Ван-дер-Ваальса, но и оно тоже имеет пределы применимости.

43. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа

Пусть в кубическом сосуде объемом V находится N молекул идеального газа массой m_0 , которые постоянно сталкиваются между собой и со стенками сосуда (рис. 33). Будем считать, что при отражении от стенки скорость молекулы изменяется только по направлению, т. е. если i -тая молекула движется в направлении оси x со скоростью v_{ix} , то после удара о стенку ее скорости в этом направлении будет $-v_{ix}$. Следовательно, при каждом соударении молекула передает стенке импульс

$$\Delta p_{ix} = 2m_0 v_{ix}.$$

Долетев до противоположной стенки, молекула отразится от нее и снова ударится о первую стенку. Если молекула не испытывает соударений с другими молекулами газа, то время между ударами составит

$$\Delta t_{ix} = \frac{2l}{v_{ix}}.$$

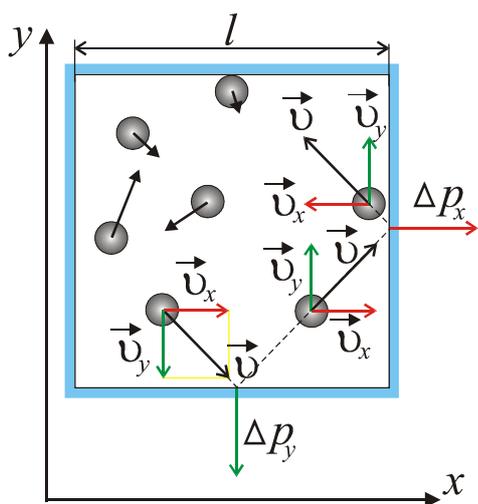


Рис. 33. Движение молекул в сосуде

Полученное выражение применимо и для более общего случая, так как при упругом соударении рассматриваемой молекулы с другими стенками сосуда составляющая её скорости вдоль оси x не изменяется, а

при упругом соударении двух одинаковых молекул происходит обмен их скоростями.

Тогда силу и давление, действующие со стороны рассматриваемой молекулы на стенку сосуда, можно рассчитать по следующим формулам:

$$F_{ix} = \frac{\Delta p_{ix}}{\Delta t_{ix}} = \frac{m_0 v_{ix}^2}{l},$$

$$P_{ix} = \frac{F_{ix}}{S} = \frac{m_0 v_{ix}^2}{S \cdot l} = \frac{m_0 v_{ix}^2}{V},$$

где S – площадь стенки.

Рассуждая аналогичным образом, величины давлений, действующих со стороны молекулы на другие стенки, можно определить как:

$$P_{iy} = \frac{m_0 v_{iy}^2}{V}, \quad P_{iz} = \frac{m_0 v_{iz}^2}{V}.$$

Предполагая газ изотропным, можно считать, что эти давления на стенки сосуда в среднем одинаковы: $P_{ix} = P_{iy} = P_{iz} = P_i$. Тогда получим

$$P_i = \frac{m_0 (v_{ix}^2 + v_{iy}^2 + v_{iz}^2)}{3 \cdot V} = \frac{m_0 v_i^2}{3 \cdot V}.$$

Для определения полного давления необходимо провести суммирование по всем молекулам газа:

$$P = \sum_{i=1}^N P_i = \sum_{i=1}^N \frac{m_0 v_i^2}{3 \cdot V} = \frac{m_0}{3} \cdot \frac{N}{V} \sum_{i=1}^N \frac{v_i^2}{N} = \frac{1}{3} \cdot n m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2,$$

где $\langle v_{\text{кв}} \rangle^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2$ – средняя квадратичная скорость молекул; n – концентрация молекул газа.

Полученное выражение называется *основным уравнением молекулярно-кинетической теории идеальных газов*.

44. Средняя кинетическая энергия молекул. Молекулярно-кинетическое толкование абсолютной температуры

Исходя из механических представлений, введем среднюю кинетическую энергию хаотического поступательного движения одной молекулы как

$$\langle W_{k0} \rangle = \frac{1}{2} m_0 \langle v_{\text{KB}} \rangle^2.$$

Тогда основное уравнение молекулярно-кинетической теории запишется в виде

$$PV = \frac{2}{3} N \langle W_{k0} \rangle = \frac{2}{3} \langle W_k \rangle,$$

где $\langle W_k \rangle$ – суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул газа. Сравнивая это уравнение с уравнением Менделеева-Клайперона, получим

$$\langle W_k \rangle = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} RT.$$

Под величиной $\langle W_k \rangle$ следует понимать полную энергию, так как рассматриваемый газ одноатомный и потенциальной энергией не обладает.

Из этого уравнения следует, что при $T = 0$, т. е. при абсолютном нуле, прекращается поступательное движение молекул газа и его давление на стенки сосуда равно нулю. Таким образом, *абсолютная температура является мерой средней кинетической энергии поступательного движения молекул идеального газа*. В этом заключается молекулярно-кинетическое толкование температуры.

Исходя из таких представлений об абсолютной температуре, среднюю кинетическую энергию поступательного движения одной молекулы можно вычислить как отношение полной энергии идеального газа к количеству составляющих его молекул:

$$\langle W_{k0} \rangle = \frac{\langle W_k \rangle}{N} = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T = \frac{3}{2} kT,$$

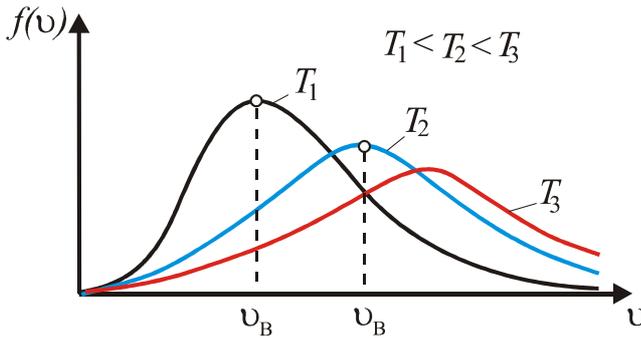
а среднеквадратичную скорость движения молекулы можно определить из соотношения

$$\langle v_{\text{KB}} \rangle^2 = \frac{3kT}{m_0}.$$

45. Распределение скоростей молекул по Максвеллу

Молекулы идеального газа находятся в беспорядочном тепловом, не имеющем какого-либо преимущественного направления, движении. Однако, как бы ни изменялись скорости молекул при столкновениях, средняя квадратичная скорость молекул в газе, находящемся в состоянии теплового равновесия при некоторой постоянной температуре, остается постоянной. Это означает, что в газе, находящемся в состоянии равновесия, устанавливается некоторое стационарное, не меняющееся со временем распределение молекул по скоро-

стям, которое подчиняется вполне определенному статистическому закону, который называется *распределением Максвелла*.



Согласно этому закону *функция распределения* молекул по модулям скоростей теплового движения имеет вид

$$f(v) = \frac{1}{N} \frac{dN}{dv} = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} v^2,$$

Рис. 34. Распределение Максвелла

где N – общее число молекул газа;

dN – число молекул, скорости которых заключены в интервале от v до $v + dv$.

График представленной функции имеет явно выраженный максимум (рис.34), а вся площадь, ограниченная кривой распределения и осью абсцисс, равна единице

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = 1.$$

Это условие нормировки вытекает из физического смысла функции распределения как плотности вероятности. Положение максимума характеризует наиболее часто встречающуюся скорость, которую называют *наиболее вероятной скоростью* v_B .

Значение наиболее вероятной скорости находят, исследуя функцию распределения на экстремум:

$$\frac{df(v)}{dv} = \frac{d}{dv} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} v^2 = 2v \left(1 - \frac{m_0 v^2}{2kT} \right) e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} = 0.$$

Решение этого уравнения имеет три корня. Значениям $v=0$ и $v=\infty$ соответствуют минимумы распределения, а значение v , при котором выражение в скобках равно нулю, и есть наиболее вероятная скорость:

$$v_{\hat{a}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}.$$

Из полученной формулы видно, что с повышением температуры газа максимум кривой распределения смещается в сторону больших скоростей. Поскольку площадь, ограниченная кривой, остается неизменной, то при повышении температуры кривая распределения молекул по скоростям будет растягиваться и понижаться, т. е. наиболее вероятная скорость возрастает, а доля молекул, обладающих этой скоростью, уменьшается.

Средняя арифметическая скорость молекулы $\langle v \rangle$ определяется из условия

$$\langle v \rangle = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} v dN(v) = \int_0^{\infty} v f(v) dv.$$

После интегрирования получим

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}.$$

46. Экспериментальная проверка закона распределения Максвелла

Существует несколько способов проверки уравнения Максвелла. Наиболее убедительным оказался *опыт О. Штерна*.

Прибор состоит из двух коаксиальных цилиндров. По оси прибора натянута платиновая нить, покрытая серебром. При нагревании нити электрическим током с ее поверхности испаряются атомы серебра. Внутренний цилиндр имеет узкую продольную щель, через которую узкий пучок атомов проходит наружу. Достигнув поверхности внешнего цилиндра, атомы серебра оседают на ней, образуя слой в виде узкой полоски (рис. 35).

Если привести прибор во вращение, то след, оставляемый молекулярным пучком, сместится на некоторую величину ΔS , так как за время, пока атомы пролетают зазор между цилиндрами, прибор успевает повернуться на угол $\Delta \phi$. Измерив радиусы цилиндров R и r , смещение следа ΔS и скорость вращения прибора ω , можно определить скорость атома по формуле

$$v = \frac{R(R - r)\omega}{\Delta S}.$$

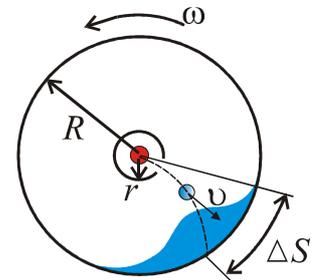


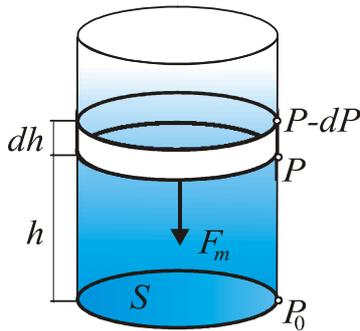
Рис. 35. Опыт Штерна

Вследствие распределения по скоростям атомы имеют различные скорости, и в результате смещенный слой будет размытым. Исследуя профиль следа, можно составить примерное представление о распределении атомов серебра по скоростям. Оно оказалось в хорошем соответствии с видом максвелловского распределения.

47. Барометрическая формула

Молекулы газа, находящиеся в гравитационном поле, участвуют в тепловом движении и испытывают действие силы тяжести. Тепловое движение и гравитация приводят газ в состояние, при котором его давление изменяется с высотой (рис. 36).

Как известно, атмосферное давление на некоторую площадку S обусловлено весом столба воздуха над этой площадкой. Если предположить, что поле тяготения однородно, а температура воздуха везде одинакова, то разность давлений на высотах h и $h + dh$ равна гидростатическому давлению столба газа высотой dh :



$dP = -\rho g dh$. Плотность воздуха связана с давлением и температурой (уравнение Менделеева-Клапейрона) соотношением $P = \frac{\rho}{\mu} RT$. Тогда

$$dP = -P \frac{\mu g}{RT} dh.$$

Рис. 36. Газ в поле тяготения

Произведем разделение переменных и затем проинтегрируем это выражение по высоте: от $h = 0$ до h , а по давлению: от $P = P_0$ до P . Получим

$$P = P_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}}.$$

Эта зависимость давления атмосферы от высоты над уровнем моря при постоянной температуре называют *барометрической формулой*. Из неё следует, что давление с высотой убывает тем быстрее, чем тяжелее газ (больше μ) и ниже температура T .

48. Закон распределения Больцмана

Используя барометрическую формулу, можно получить закон изменения концентрации молекул с высотой. Для этого примем во внимание, что $P = nkT$ и $P_0 = n_0 kT$, где n и n_0 – концентрация молекул на высоте h и $h_0 = 0$. Подставим эти выражения для давлений P и P_0 в барометрическую формулу. Получим

$$n = n_0 e^{-\frac{m_0 g h}{kT}}.$$

Если $T \rightarrow \infty$, то $n \rightarrow n_0$, т. е. происходит выравнивание концентрации молекул газа по всему объему, занимаемому газом.

Если $T \rightarrow 0$, то $n \rightarrow 0$, т. е. все молекулы опустятся на поверхность Земли (если речь идет об атмосфере).

Заметим, что $m_0 g h$ – это потенциальная энергия W_n молекул в поле тяготения. Поэтому распределение молекул по высоте является их распределением по значениям потенциальной энергии

$$n = n_0 e^{-\frac{W_n}{kT}}.$$

Это выражение называется *распределением Больцмана* для внешнего потенциального поля. Из него следует, что при постоянной температуре плотность газа больше там, где меньше потенциальная энергия его молекул.

Больцман показал, что такое распределение справедливо в любом потенциальном поле сил для совокупности любых одинаковых частиц, находящихся в состоянии хаотического теплового движения.

Контрольные вопросы

- Почему термодинамический и статистический (молекулярно-кинетический) методы исследования макроскопических систем качественно различны и взаимно дополняют друг друга?
- Что такое термодинамические параметры? Какие термодинамические параметры вам известны?
- Какими основными законами описываются изобарные, изохорные и изотермические процессы?
- Каков физический смысл постоянной Авогадро?
- При некоторых значениях температуры и давления азот количеством вещества 1 моль занимает объем 20 л. Какой объем при этих же условиях займет водород количеством вещества 1 моль?
- В чем заключается молекулярно-кинетическое толкование давления газа и термодинамической температуры?
- В чем содержание и какова цель вывода основного уравнения молекулярно-кинетической теории газов?
- Каков физический смысл распределения молекул по скоростям?
- Как определяется наиболее вероятная скорость?
- Каким опытом подтверждается распределение молекул по скоростям?
- Во сколько раз и как изменится средняя скорость движения молекул при переходе от кислорода к водороду?
- В чем суть распределения Больцмана?

49. Число степеней свободы молекулы

Числом степеней свободы механической системы называется наименьшее число линейно независимых параметров, которые полностью определяют положение тела в пространстве. Так, положение материальной точки в пространстве определяется заданием значений трех ее координат. В соответствии с этим материальная точка имеет три степени свободы.

Представление о молекулах как о материальных точках оправдывается только для одноатомных газов. В случае многоатомных газов нужно рассматривать молекулы как сложные системы, способные вращаться как целое, при-

чем атомы в них могут совершать колебания вблизи своих положений равновесия. Общее число степеней свободы молекулы при этом возрастает (рис. 37).

Рассмотрим двухатомную молекулу. Ее можно представить себе в виде

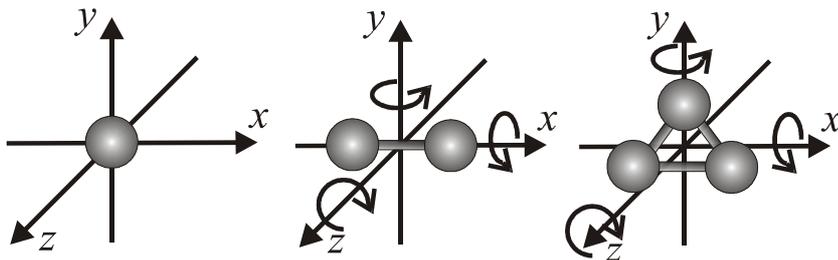


Рис. 37. Степени свободы молекул

системы, состоящей из двух атомов, расположенных на некотором расстоянии друг от друга. Будем считать, что это жесткая молекула, т. е. расстояние между атомами не меняется. Вообще говоря, такая система имеет шесть

степеней свободы: три степени свободы приходится на поступательное движение центра масс, и три – возможные вращательные движения вокруг осей x , y и z . Однако, вращение молекулы вокруг оси x неэффективно, так как энергия этого вращательного движения $W_0^{\text{вращ}} = J\omega^2/2$ практически равна нулю ($r \rightarrow 0$, $J \sim mr^2 \rightarrow 0$). Поэтому для описания возможных вращений достаточно двух координат. Следовательно, число степеней свободы жесткой двухатомной молекулы равно 5, из них три поступательные и две вращательные степени свободы.

Трехатомный и многоатомный газ имеет 6 степеней свободы, за исключением случая, когда атомы расположены на одной прямой, – тогда вращательных степеней свободы только две.

Система из N материальных точек (для случая $N \geq 3$), не жестко связанных между собой, имеет $3N$ степеней свободы. Поскольку положение в пространстве системы как целой определяется (точно так же, как и положение абсолютно твердого тела) шестью параметрами, упомянутыми выше, то число степеней свободы такой системы равно $3N - 6$. Это число соответствует возможным смещениям точек относительно друг друга около своих положений равновесия. Такой тип движения называется колебательным. Значит, количество колебательных степеней свободы и есть $3N - 6$.

50. Распределение энергии по степеням свободы

При выводе основного уравнения молекулярно-кинетической теории использовались представления о молекулах как о материальных точках. Кинетическая энергия молекул считалась совпадающей с энергией их поступательного движения и полагалась равной

$$\langle W_{k0} \rangle = \frac{3}{2} kT.$$

Эта энергия распределяется между тремя направлениями перемещения молекулы, которые, ввиду полной беспорядочности движения молекул газа,

равновероятны. Поэтому можно считать, что на каждую степень свободы поступательного движения в среднем приходится энергия, равная

$$\langle W_i \rangle = \frac{1}{3} \langle W_{k0} \rangle = \frac{1}{2} kT.$$

Энергия молекул, состоящих из нескольких атомов, жестко связанных друг с другом, будет складываться из энергии поступательного и вращательного движения. Нет причин полагать, что поступательное движение является в какой-то мере выделенным по сравнению с вращательным или колебательным движением. В статистической физике доказывается теорема, названная теоремой Больцмана, что *в совокупности большого числа молекул, находящихся в тепловом равновесии при температуре T , средняя кинетическая энергия равномерно распределена между всеми степенями свободы и для каждой степени свободы молекулы равна $\frac{kT}{2}$* . Эта теорема называется *законом равномерного распределения кинетической энергии по степеням свободы*.

Исключения составляют степени свободы, связанные с *колебательным движением атомов в молекуле*. Например, нежесткая двухатомная молекула имеет одну колебательную степень свободы, а нежесткая трехатомная молекула – три колебательных степени свободы. Средняя энергия колебательного движения молекулы складывается из средней кинетической энергии и равной ей средней потенциальной энергии атомов. Поэтому на каждую колебательную степень свободы приходится энергия, в два раза большая, чем на поступательные или вращательные степени свободы молекулы.

51. Внутренняя энергия

Внутренняя энергия – функция параметров состояния термодинамической системы, включающая в себя *все виды* кинетической энергии движения и потенциальной энергии *всех типов* взаимодействия *всех частиц*, составляющих данную систему.

Внутренняя энергия не включает в себя кинетическую энергию движения системы или ее частей *как целого* и потенциальную энергию ее *как целого* во внешних силовых полях.

Рассчитать внутреннюю энергию системы в общем случае вряд ли представляется возможным. Но из этой ситуации есть, по крайней мере, два выхода:

а) в подавляющем большинстве случаев, интересующих нас с точки зрения практического применения, вполне достаточно, оказывается, рассчитывать не саму величину внутренней энергии, а *ее изменение* в том или ином процессе, что оказывается значительно проще;

б) внутреннюю энергию удастся рассчитать, используя *простейшие модели* строения вещества.

Например, для идеального газа внутренняя энергия содержит только одно слагаемое – энергию теплового движения его частиц (потенциальной энергией

их взаимодействия эта модель пренебрегает). Поэтому средняя энергия движения молекулы идеального газа определяется как

$$\langle W_i \rangle = \frac{i}{2} kT,$$

где i — сумма числа поступательных, вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы молекулы: $i = i_{\text{поступ}} + i_{\text{вращат}} + 2 \cdot i_{\text{колеб}}$.

Если в системе содержится N частиц, то её полная энергия равна

$$U = N \langle W_i \rangle = \frac{i}{2} NkT.$$

Учитывая, что $N = \nu \cdot N_A = \frac{m}{\mu} N_A$, а $k = \frac{R}{N_A}$, внутреннюю энергию одноатомного идеального газа можно представить уравнением

$$U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT.$$

Отсюда следуют три важных вывода:

1. *Внутренняя энергия идеального газа* совпадает с энергией его теплового движения.

2. *Внутренняя энергия* является величиной аддитивной, т. е. внутренняя энергия системы тел равна сумме внутренних энергий образующих систему тел.

3. *Внутренняя энергия закрытой газовой системы* строго пропорциональна абсолютной температуре идеального газа.

Абсолютная температура идеального газа является, таким образом, *однозначной мерой* его внутренней энергии. По изменению температуры системы можно судить об изменении ее внутренней энергии.

В результате взаимодействия термодинамической системы с окружающей средой (обмена веществом и энергией) ее внутренняя энергия может изменяться. Ограничимся рассмотрением закрытых систем и рассмотрим только обмен энергией. Эксперимент показывает, что передать энергию закрытой термодинамической системе можно двумя способами: или за счет совершения над ней механической работы внешними силами, или теплопередачей.

52. Работа в термодинамике. Теплопередача

Рассмотрим цилиндрический сосуд, заполненный идеальным газом и закрытый подвижным поршнем площадью основания S . Пусть (например, в результате нагрева) газ расширился, сместив поршень на расстояние dx (рис.38). Сила давления газа на поршень при этом совершает работу

$$\delta A = F \cdot dx.$$

Если выразить силу F , действующую на поршень со стороны газа, через его давление $F = P \cdot S$, то эта работа равна

$$\delta A = P \cdot S \cdot dx = P \cdot dV,$$

где $dV = S \cdot dx$ – малое изменение объема газа при смещении поршня на величину dx .

Полную работу газа при изменении объема от V_1 до V_2 можно рассчитать как

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \delta A = \int_{V_1}^{V_2} P \cdot dV.$$

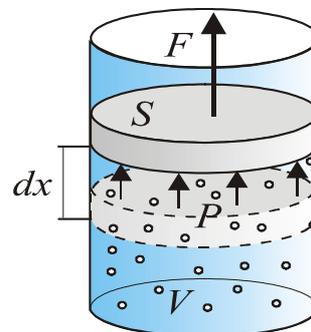


Рис. 38. Расширение газа

Конкретный результат интегрирования определяется характером зависимости между давлением и объемом газа. Найденное выражение справедливо при любых изменениях объема твердых, жидких и газообразных тел (рис. 39).

Если газ расширяется, $V_2 > V_1$, работа положительна. В противном случае внешние силы совершают работу по сжатию газа $V_2 < V_1$, работа считается отрицательной.

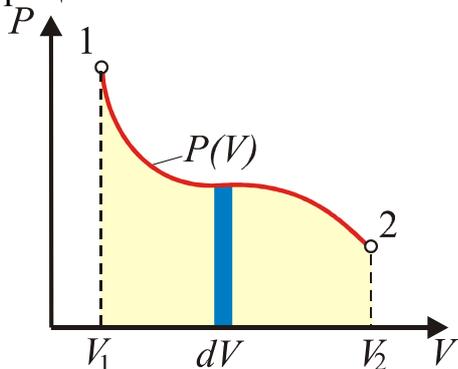


Рис. 39. Работа газа – площадь под кривой

Теплопередача – процесс обмена энергией без совершения механической работы.

Можно выделить три основных способа теплопередачи:

1. Теплопроводность – передача энергии, протекающая непосредственно путем соударений частиц. Более энергичные частицы вещества передают часть своей энергии менее энергичным частицам при упругих соударениях.

2. Конвекция – передача энергии за счет коллективных движений (потоков) частиц жидкостей или газов. Более нагретые слои жидкости

или газа всплывают, их место занимают более холодные. Образующиеся потоки стремятся выровнять температуру среды по всему объему.

3. Излучение – обмен энергией посредством электромагнитных волн. Одни молекулы излучают, другие – поглощают это излучение. Электромагнитные волны переносят энергию, не перенося при этом вещества.

Для описания теплопередачи вводится специальная величина, которая называется количеством теплоты.

Количество теплоты Q – СФВ, характеризующая процесс теплопередачи и численно равная энергии, переданной системе (отнятой у системы) без со-

вершения механической работы.

Величину Q считают положительной, если система получает теплоту, и отрицательной, если она ее отдает. В СИ единицей количества теплоты служит джоуль $[Q] = \text{Дж}$.

Передача системе некоторого количества теплоты приводит к увеличению ее внутренней энергии и, как следствие, к повышению ее температуры. Экспериментально установлена линейная зависимость между изменением температуры и сообщенным системе количеством теплоты: $dQ = CdT$. Коэффициент пропорциональности называется *теплоемкостью*.

Необходимо особо отметить, что и работа, и количество теплоты *не являются характеристиками системы*. Они характеризуют *процесс* обмена энергией между системой и окружающей средой. Поэтому бессмысленно говорить о «запасе теплоты», «тепловой энергии», «изменении количества теплоты» и т. д., что подчас встречается в литературе.

53. Первое начало термодинамики

Первое начало термодинамики констатирует закон сохранения энергии для тех макроскопических явлений, в которых одним из существенных параметров, определяющих состояние тел, является температура.

Приращение внутренней энергии системы всегда равно разности количества сообщенной системе теплоты Q и совершаемой над системой работы A' :

$$\Delta U = Q - A'.$$

Обычно вместо работы A' , совершаемой внешними телами над системой, рассматривают работу A , равную $(-A')$, совершаемую системой над внешними телами. Тогда

$$Q = \Delta U + A.$$

Это уравнение выражает первое начало термодинамики: *количество теплоты, сообщенное системе в процессе изменения ее состояния, расходуется на изменение ее внутренней энергии и на совершение работы против внешних сил*.

Часто приходится разбивать рассматриваемый процесс на ряд элементарных процессов, каждый из которых соответствует весьма малому изменению параметров системы. Запишем уравнение первого начала для элементарного процесса в дифференциальном виде:

$$dQ = dU + dA,$$

где dU – малое изменение внутренней энергии; dQ – элементарное количество теплоты; dA – элементарная работа.

Между dU , dQ и dA есть принципиальное отличие. Внутренняя энер-

гия является *функцией состояния* тела. Поэтому ее изменение зависит только от начального и конечного состояний тела. Работа и количество теплоты зависят не только от этих состояний, но и от способа проведения процесса. Они не являются функциями состояния, а являются функциями теплового процесса. Поэтому в уравнении первого начала термодинамики dU представляет собой полный дифференциал, а dQ и dA не являются полными дифференциалами, а представляют собой лишь малые величины.

54. Теплоемкость газов. Уравнение Майера

Теплоемкость C – СФВ, характеризующая процесс теплообмена системы с внешней средой и численно равная количеству теплоты, которое необходимо сообщить системе для изменения ее температуры на единицу:

$$C = \frac{dQ}{dT}.$$

Очевидно, что теплоемкость системы в любом процессе пропорциональна массе и зависит от рода вещества, содержащегося в ней.

Удельная теплоемкость c численно равна количеству теплоты, которое нужно сообщить единице массы вещества для изменения ее температуры на единицу:

$$c = \frac{dQ}{m \cdot dT}.$$

Для газов удобно использовать понятие молярной теплоемкости.

Молярная теплоемкость C_μ численно равна отношению теплоемкости системы C к количеству вещества ν , содержащегося в ней:

$$C_\mu = \frac{C}{\nu} = \frac{\mu}{m} \frac{dQ}{dT}.$$

Удельная и молярная теплоемкости связаны соотношением: $C_\mu = c \cdot \mu$.

Теплоемкость различается в зависимости от того, при каких условиях происходит нагревание тела – при постоянном объеме или при постоянном давлении.

Если нагревание тела происходит при постоянном объеме, т. е. $dV = 0$, то работа равна нулю. В этом случае передаваемое телу тепло идет только на изменение его внутренней энергии: $dQ = dU$. Тогда молярная теплоемкость равна:

$$C_V = \frac{\mu}{m} \frac{dU}{dT} = \frac{d}{dT} \left(\frac{i}{2} RT \right) = \frac{i}{2} R.$$

При нагревании газа при постоянном давлении его объем меняется, сообщенное телу тепло идет не только на увеличение его внутренней энергии, но и на совершение работы, т. е. $dQ = dU + PdV$. Тогда молярная теплоемкость равна

$$C_P = \frac{\mu}{m} \frac{dQ}{dT} = \frac{\mu}{m} \left(\frac{dU}{dT} + \frac{PdV}{dT} \right).$$

Для идеального газа (при $P = \text{const}$) $PdV = \frac{m}{\mu} R dT$. Учитывая это, получим

$$C_P = i \frac{R}{2} + R = C_V + R.$$

Эта формула называется *уравнением Майера*.

Отношение

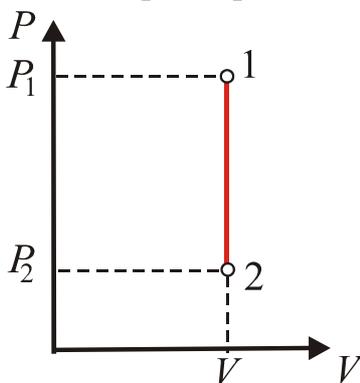
$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{i+2}{i}$$

представляет собой величину, характерную для каждого газа и определяемую числом степеней свободы молекул газа. Измерение теплоемкости тела есть, таким образом, способ непосредственного измерения микроскопических характеристик составляющих его молекул.

55. Изохорный процесс

Реализовать на практике какой-либо процесс в газовой системе так, чтобы один из параметров состояния совсем не менялся, невозможно. Однако в некоторых конкретных случаях изменением того или иного параметра состояния можно пренебречь ввиду его малости. Процесс, протекающий в газовой системе при неизменной величине какого-либо из параметров состояния, называется *изопротессом*.

Процесс, протекающий при постоянном объеме $V = \text{const}$, называется *изохорным* (рис. 40). Нагревание идеального газа при постоянном объеме приводит к изменению его температуры и давления по закону:



$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}.$$

Рис. 40. Изохорный процесс

Работа при этом не совершается, так как $dV = 0$. Из первого начала термодинамики следует, что $dQ = dU$, т. е. вся подведенная к системе теплота идет на увеличение внутрен-

ней энергии системы.

Количество теплоты, которое необходимо сообщить газу для того, чтобы изменить его температуру на величину $\Delta T = T_2 - T_1$, можно определить как

$$Q = \Delta U = \int_{T_1}^{T_2} \frac{m}{\mu} C_V dT = \frac{m}{\mu} C_V (T_2 - T_1).$$

56. Изотермический процесс

Процесс, происходящий при постоянной температуре $T = \text{const}$, называется *изотермическим процессом* (рис. 41). Протекание такого процесса в идеальном газе связано с изменением его давления и объема по закону $P_1 V_1 = P_2 V_2$. При этом внутренняя энергия остается постоянной: $U = \text{const}$, а ее изменение $dU = 0$. Согласно первому началу термодинамики:

$$dQ = dA,$$

т. е. при изотермическом процессе все подводимое к системе количество теплоты превращается в работу.

Для подсчета работы, совершенной газом при расширении от объема V_1 до V_2 , проинтегрируем выражение для элементарной работы

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P dV.$$

Учитывая, что давление газа изменяется по закону $P = \frac{m RT}{\mu V}$, получим

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{P_1}{P_2}.$$

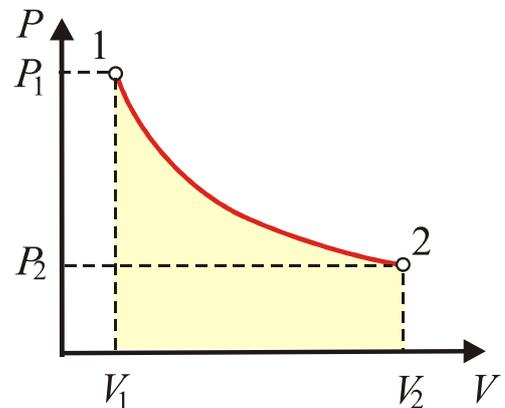


Рис. 41. Изотермический процесс

57. Изобарный процесс

Изобарный процесс — процесс, происходящий при постоянном давлении $P = \text{const}$ (рис. 42). Изменение температуры и объема в ходе процесса происходит по закону $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$. Первое начало термодинамики для изобарного процесса запишется в виде

$$dQ = dU + PdV.$$

Из определения внутренней энергии идеального газа следует, что

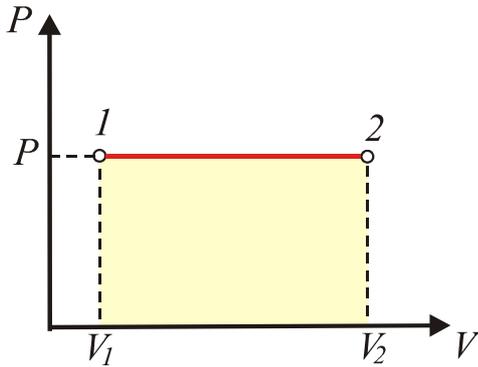


Рис. 42. Изобарный процесс

$$\Delta U = \int_{T_1}^{T_2} \frac{m}{\mu} \cdot \frac{i}{2} R \cdot dT = \frac{m}{\mu} C_V (T_2 - T_1).$$

Работа в изобарическом процессе определяется как:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P dV = P \int_{V_1}^{V_2} dV = P(V_2 - V_1),$$

или, с учетом уравнения состояния идеального

газа $PV = \frac{m}{\mu} RT$,

$$A = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1).$$

Тогда количество теплоты, необходимое для нагревания газа от температуры T_1 до T_2 , находится как

$$Q = \frac{m}{\mu} C_V (T_2 - T_1) + \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu} (C_V + R)(T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu} C_P (T_2 - T_1).$$

При изобарном сжатии направление процесса меняется на обратное, и работа, совершенная газом становится отрицательной: $dA < 0$. Это означает, что не газ совершает внешнюю работу, а внешние силы совершают положительную работу по сжатию газа, т. е.

$$dA' = dA.$$

Величина dU и dQ при этом также отрицательны, т. е. внутренняя энергия газа уменьшается за счет отдачи им тепла окружающим телам.

58. Адиабатический процесс

В некоторых случаях процесс теплообмена системы оказывается незначительным (например, газ находится в теплоизолированной системе, а процесс протекает достаточно быстро). Это позволяет пренебречь теплообменом и ввести в рассмотрение еще одну модель: *адиабатный процесс* – процесс, протекающий в закрытой термодинамической системе в отсутствие теплообмена с окружающей средой.

Этот процесс описывается уравнением Пуассона:

$$PV^\gamma = \text{const} \text{ или } P_1V_1^\gamma = P_2V_2^\gamma,$$

где $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i}$ – показатель адиабаты. По-

скольку $\gamma > 1$, то кривая, изображающая уравнение адиабаты, идет круче изотермы (рис. 43).

Уравнение Пуассона можно записать также в виде:

$$TP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{const},$$

или

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}.$$

Уравнение первого начала термодинамики в этом случае принимает вид: $dA = -dU$, т. е. при адиабатическом процессе работа совершается только за счет внутренней энергии газа. Из определения внутренней энергии идеального газа следует, что

$$A = -\frac{m}{\mu} C_v (T_2 - T_1).$$

Поэтому при адиабатическом расширении газ совершает работу, а его внутренняя энергия и температура падают. При адиабатическом сжатии работа газа отрицательна (внешняя среда производит работу над газом), внутренняя энергия и температура газа возрастают.

Работа, совершаемая в адиабатическом процессе, также может быть найдена по формулам:

$$A = \frac{RT_1}{\gamma-1} \frac{m}{\mu} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right] = \frac{RT_1}{\gamma-1} \frac{m}{\mu} \left[1 - \left(\frac{T_2}{T_1} \right) \right] = \frac{P_1V_1(T_1 - T_2)}{(\gamma-1)T_1}.$$

Адиабатический процесс можно реализовать и при отсутствии хорошей теплоизоляции. Но тогда необходимо вести процесс столь быстро, чтобы за время его осуществления не произошел существенный теплообмен с окружающей средой.

Контрольные вопросы

- Сколько степеней свободы может иметь молекула двухатомного газа?

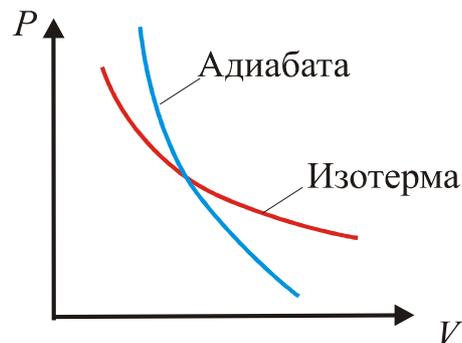


Рис. 43. Сравнение адиабатического и изотермического процессов

- В чем суть закона Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы молекул?
- Почему колебательная степень свободы обладает вдвое большей энергией, чем поступательная и вращательная?
- Что такое внутренняя энергия идеального газа?
- В результате каких процессов может изменяться внутренняя энергия системы? Что такое работа газа и количество теплоты?
- Что такое теплоемкость газа? Какая из теплоемкостей – C_V или C_P – больше и почему?
- Как объяснить температурную зависимость молярной теплоемкости водорода?
- Чему равна работа изобарного расширения 1 моля идеального газа при нагревании на 1 К?
- Нагревается или охлаждается идеальный газ, если он расширяется при постоянном давлении?
- Температура газа в цилиндре постоянна. Запишите на основе первого начала термодинамики соотношение между сообщенным количеством теплоты и совершенной работой.
- Газ переходит из одного и того же начального состояния 1 в одно и то же конечное состояние 2 в результате следующих процессов: а) изотермического; б) изобарного; в) изохорного. Рассмотрев эти процессы графически, покажите: 1) в каком процессе работа расширения максимальна; 2) когда газу сообщается максимальное количество теплоты.
- Почему адиабата более крутая, чем изотерма?
- Как изменится температура газа при его адиабатном сжатии?

59. Круговые, обратимые и необратимые процессы

В термодинамических рассуждениях большое значение имеет рассмотрение различных круговых процессов. Круговым процессом и циклом называется такая последовательность превращений, в результате которой система, выйдя из какого-либо исходного состояния, вновь в него возвращается.

Начальное и конечное состояния системы при круговом процессе описываются одинаковым набором параметров состояния (давлением, объемом, температурой и т. д.) и одинаковыми значениями функций состояния (например, внутренней энергией). Таким образом, изменение внутренней энергии в циклическом процессе: $\Delta U = 0$. Первое начало термодинамики в этом случае запишется как

$$A = Q = Q_1 - Q_2,$$

где Q_1 – количество теплоты, полученное системой; Q_2 – количество теплоты, отданное системой. Работа, совершенная идеальным газом в циклическом процессе, равна количеству теплоты, подведенному к нему за этот цикл.

Формально это совпадает с выражением для изотермического процесса,

однако, если при изотермическом процессе температура остается постоянной в течение всего процесса, то в круговом процессе она меняется; одинаковыми остаются лишь ее начальное и конечное значения.

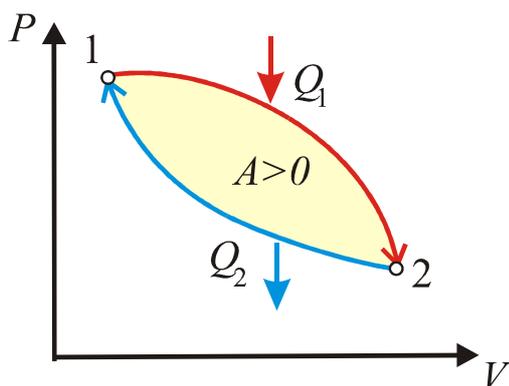


Рис. 44. Круговой процесс

Круговой процесс на графике с координатами $P-V$ представляется в виде процесса расширения системы и процесса сжатия (рис. 44). Процесс расширения системы связан с совершением ею работы, в то время как сжатие системы вызывается работой внешних сил.

Различают обратимые и необратимые круговые процессы. Процесс называется обратимым, если система возвращается в исходное состояние, не вызывая изменения в окружающих телах. Чисто механические

процессы всегда обратимы. Применительно к идеальному газу обратимыми могут быть изотермический и адиабатический процессы.

Все необратимые процессы в одном направлении протекают самопроизвольно, а для совершения каждого из этих процессов в обратном направлении необходимо, чтобы параллельно происходил какой-то другой, компенсирующий процесс.

При наличии теплового движения наблюдаются, как правило, процессы необратимые. Например, пуля, в результате трения о воздух, теряет свою скорость. Происходит превращение механической энергии в тепловую (пуля и воздух нагреваются). Известно, что повернуть этот процесс так, чтобы рассеянное тепло превратилось опять в энергию механического движения, невозможно, т. е. процесс необратим.

В термодинамике доказывается, что *необходимым и достаточным условием обратимости термодинамического процесса является его равновесность*. Равновесный процесс состоит из непрерывной, бесконечной последовательности равновесных состояний, поэтому равновесным может быть только бесконечно медленный процесс. При достаточно медленном протекании реальные процессы могут приближаться к равновесному состоянию сколь угодно близко.

60. Принцип действия тепловой машины

Первое начало термодинамики допускает возможность преобразования подведенной к системе теплоты в работу, совершаемую этой системой над внешними телами. Поэтому вполне естественен интерес к практическому созданию устройств, преобразующих тепло в механическую работу. Такие устройства получили название *тепловых двигателей* (машин) (рис. 45). Многочисленные исследования показали, что в любом реально действующем тепловом двигателе только часть полученной от внешних тел теплоты может преобразоваться в работу, остальная же теплота должна передаваться другим телам. Та-

ким образом, тепловая машина должна состоять из трех основных составных частей: *нагревателя, рабочего тела и холодильника.*

Схема работы любого теплового двигателя такова: рабочее тело получает от нагревателя количество теплоты Q_1 , часть которого расходуется рабочим телом на совершение полезной работы против внешних сил, а остаток Q_2 передается охладителю. Полезная работа, совершаемая за один цикл, равна разности количеств теплоты, полученной от нагревателя и переданной охладителю: $A = Q_1 - Q_2$, т. е. *рабочее тело надо нагревать при расширении и охлаждать при сжатии.*

Для характеристики эффективности циклического процесса в отношении превращения теплоты в работу, вводится физическая величина, называемая *коэффициентом полезного действия цикла (КПД).* Коэффициент полезного действия – это отношение совершаемой за цикл работы к получаемой за цикл теплоте

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

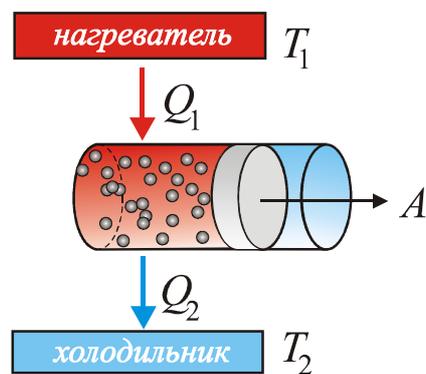


Рис. 45. Тепловая машина

Коэффициент полезного действия реальных тепловых двигателей значительно меньше, чем теоретические КПД циклов, по которым они работают. Это связано, в первую очередь, с тем, что реальные тепловые машины работают по разомкнутым циклам (отработавшие газы, имеющие высокую температуру, выбрасываются в атмосферу и для следующего цикла нагревается новая порция газа), а также с потерями тепла, всегда имеющими место. КПД паровой машины не превышает 0,2 (20 %), двигателя внутреннего сгорания – 0,35 (35 %), современных паровых турбин – 0,45 (45 %).

Если при круговом процессе газ, расширяясь, совершает меньшую работу, чем та, которую производят внешние силы при его сжатии, то такой цикл носит название *обратного*. Машины, работающие по обратному циклу, носят название *холодильных*. В холодильных машинах процесс переноса теплоты от холодного тела к более горячему требует затраты работы внешних сил.

61. Четырехтактный двигатель внутреннего сгорания

В состоянии 1 в камере объема V_1 имеется после сгорания сжатой смеси воздуха с бензином – газ под большим давлением P_1 (рис. 46). Начинается рабочий цикл (расширение газа по адиабате $1 \rightarrow 2$), в процессе которого совершается положительная работа. В состоянии 2 (нижняя мертвая точка) расширение достигает максимума и поршень находится в крайнем положении. Объем V_2 равен сумме объемов камеры сгорания и цилиндра. После открытия выпускного клапана давление в цилиндре падает до близкого к атмосферному. В идеальном цикле считаем эти процессы мгновенными. В реальном цикле выпускной клапан начинает открываться раньше достижения поршнем нижней мертвой

точки 2, поэтому переход $2 \rightarrow 3$ не строго изохорный. На участке $3 \rightarrow 4$ происходит выталкивание оставшихся в цилиндре продуктов сгорания. В верхней мертвой точке 4 закрывается выпускной клапан и открывается впускной клапан. На участке $4 \rightarrow 5$ происходит засасывание топлива. В точке 5 закрывается всасывающий клапан и на участке $5 \rightarrow 6$ происходит сжатие рабочей смеси. В точке 6 смесь воспламеняется и давление в камере сжатия возрастает до P_1 . В идеальном цикле считаем, что точка 5 совпадает с 3, путь $3 \rightarrow 4$ совпадает с $4 \rightarrow 5$ и никакой работы на пути $3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ не совершается. Работа газа в цикле вычисляется по формуле

$$A = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right] - \frac{P_6 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right] = \frac{R(T_1 - T_6) m}{(\gamma - 1) \mu} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right],$$

где T_1 и T_6 – температуры в состояниях 1 и 6. Так как $\gamma - 1 = \frac{C_p - C_v}{C_v} = \frac{R}{C_v}$, то

$$A = C_v (T_1 - T_6) \frac{m}{\mu} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right].$$

Энергия, затрачиваемая на увеличение температуры газа от T_6 до T_1 , равна

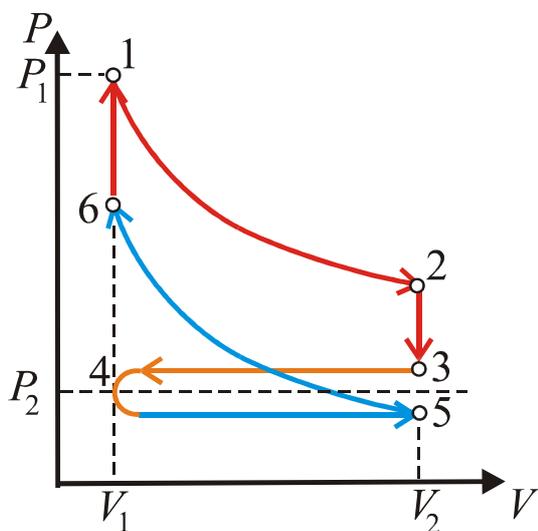


Рис. 46. Рабочий цикл реального двигателя

$$Q = \frac{m}{\mu} C_v (T_1 - T_6).$$

Поэтому КПД такого цикла определяется по формуле:

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} = 1 - \varepsilon^{1 - \gamma}.$$

Отношение $\varepsilon = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$ называется степенью сжатия. Чем больше степень сжатия, тем больше КПД. В современных двигателях эта величина достигает значений 5–7.

Большее значение не может быть из-за угрозы детонации. Вычисляемый по этой формуле КПД оказывается обычно завышенным примерно в два раза по сравнению с действительным КПД реальных двигателей внутреннего сгорания.

Большее она не может быть из-за угрозы детонации. Вычисляемый по этой формуле КПД оказывается обычно завышенным примерно в два раза по сравнению с действительным КПД реальных двигателей внутреннего сгорания.

62. Цикл Карно

Наиболее совершенным в отношении коэффициента полезного действия является циклический процесс, рассмотренный впервые французским физиком

Карно и носящий его имя (рис. 47).

Цикл Карно состоит из двух изотерм: $1 \rightarrow 2$ и $3 \rightarrow 4$ и двух адиабат: $2 \rightarrow 3$ и $4 \rightarrow 1$. На участке $1 \rightarrow 2$ рабочее тело (идеальный газ) находится в тепловом контакте с нагревателем, а на участке $3 \rightarrow 4$ – с холодильником. Рассчитаем величину работы, совершаемой за цикл.

Допустим, что начальное состояние системы 1 определяется значением параметров P_1, V_1, T_1 . Предоставим газу возможность расшириться изотермически при температуре T_1 до объема V_2 . Расширяясь, газ совершает работу

$$A_{1-2} = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Чтобы температура не изменилась, к газу необходимо подвести от нагревателя количество теплоты, эквивалентное совершенной работе $Q_1 = A_{1-2}$. Давление при этом уменьшается до величины P_2 , и система переходит в состояние 2, характеризуемое параметрами P_2, V_2, T_1 .

Если теперь предоставить газу возможность расшириться адиабатно от объема V_2 до объема V_3 , то температура газа понизится до величины T_2 , а давление до P_3 . Система перейдет в состояние 3 с параметрами P_3, V_3, T_2 . При этом за счет изменения внутренней энергии будет совершена работа

$$A_{2-3} = -\frac{m}{\mu} C_V (T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu} C_V (T_1 - T_2).$$

Для возвращения системы в исходное состояние подвернем газ, находящийся в результате адиабатного расширения при температуре T_2 , изотермическому сжатию до объема V_4 . Для этого необходимо совершить работу

$$A_{3-4} = \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4},$$

и отвести от газа к холодильнику количество теплоты, эквивалентное затраченной работе $Q_2 = A_{3-4}$. В результате система перейдет в состояние 4 с параметрами P_4, V_4, T_2 .

Замыкание процесса осуществим адиабатическим сжатием газа от объема V_4 до объема V_1 . При этом его давление и температура примут первоначальное значение T_1 и P_1 , т.е. система возвращается в исходное состояние. Данный пе-

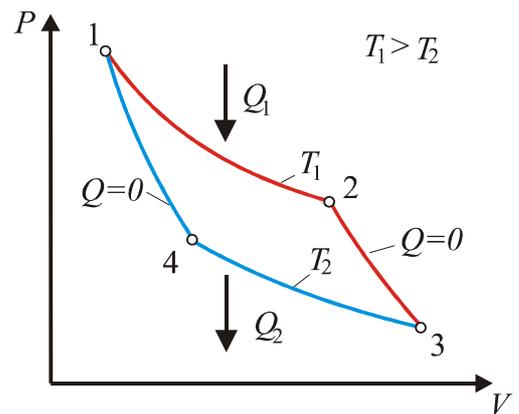


Рис. 47. Цикл Карно

реход потребует затраты работы, эквивалентной возрастанию внутренней энергии системы

$$A_{4-1} = -\frac{m}{\mu} C_V (T_1 - T_2) = -A_{2-3}.$$

В итоге, полная работа, совершенная в результате кругового цикла

$$A = A_{1-2} + A_{2-3} + A_{3-4} + A_{4-1} = Q_1 + A_{2-3} - Q_2 - A_{2-3} = Q_1 - Q_2.$$

Коэффициент полезного действия цикла Карно равен отношению работы, практически используемой в данном цикле, к работе, которую можно было бы получить при превращении в нее всего количества тепла, подведенного к системе

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}.$$

Для того чтобы упростить это выражение, заметим, что объемы V_2 и V_3 , так же как объемы V_4 и V_1 , лежат попарно на соответствующих адиабатах и поэтому, согласно уравнению Пуассона:

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1}.$$

Учитывая это, получим

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Таким образом, коэффициент полезного действия цикла Карно не зависит от природы рабочего тела и равен отношению разности между абсолютной температурой T_1 , при которой происходит изотермическое расширение газа, и абсолютной температурой изотермического сжатия газа T_2 к абсолютной температуре расширения газа T_1 .

Как следует из этой формулы, максимальный теоретический КПД даже идеального цикла Карно не может быть равным единице (100 %), так как для этого потребовался бы нагреватель, имеющий бесконечно высокую температуру ($T_1 \rightarrow \infty$), или охладитель с температурой, равной абсолютному нулю ($T_2 = 0$). КПД любого другого цикла всегда будет меньше, чем КПД цикла Карно, работающего в том же интервале температур.

63. Приведенное количество тепла. Неравенство Клаузиуса

Коэффициент полезного действия для любой тепловой машины

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

где Q_1 – количество теплоты, отданное нагревателем; Q_2 – отданное холодильнику. Коэффициент полезного действия обратимой тепловой машины (цикл Карно)

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1 – температура нагревателя; T_2 – температура холодильника.

В случае обратимого процесса (цикл Карно) можно записать, что $\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$, а в случае необратимого – $\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} < \frac{T_1 - T_2}{T_1}$, поскольку КПД тепловой машины, работающей по циклу Карно, всегда больше КПД любой машины. Эти соотношения можно объединить и записать в виде:

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \leq 0.$$

Отношение количества теплоты, полученного системой от какого-либо тела, к температуре этого тела называется *приведенным количеством теплоты*.

Вместо отдаваемого телу количества теплоты Q_2 введем полученное от этого тела теплоту, равное $(-Q_2)$. Тогда предыдущее выражение запишется в виде:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0.$$

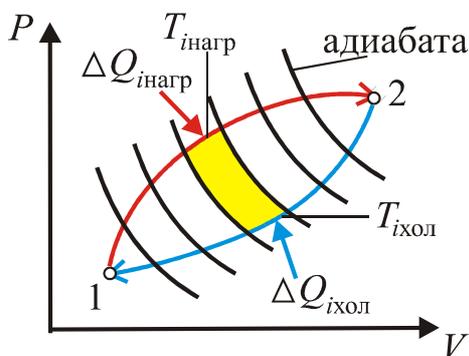


Рис.48. Разбиение кругового процесса на элементарные циклы Карно

Это соотношение называется *неравенством Клаузиуса* и формулируется следующим образом: *при обратимом цикле Карно сумма приведенных количеств тепла равно нулю, при необратимом цикле – меньше нуля.*

Неравенство Клаузиуса может быть обобщено на любой круговой процесс. Любой круговой процесс может быть разбит системой адиабат на весьма большое число элементарных циклов Карно (рис.59). Каждый из этих элементарных циклов Карно

протекает между нагревателем соответствующей температуры $T_{\text{нагр}}$, от которого он получает количество теплоты $\Delta Q_{\text{нагр}}$, и холодильником соответствующей температуры $T_{\text{хол}}$, которому он отдает количество теплоты $\Delta Q_{\text{хол}}$. Для каждой пары тепловых резервуаров (нагреватель-холодильник) с одинаковым номером i имеет место неравенство

$$\frac{\Delta Q_{\text{нагр}}}{T_{\text{нагр}}} + \frac{\Delta Q_{\text{хол}}}{T_{\text{хол}}} \leq 0.$$

Суммируя полученное выражение, написанное для каждого из элементарных циклов, получим для всего цикла

$$\sum_{i=1}^N \frac{\Delta Q_i}{T_i} \leq 0,$$

т. е. для всякого кругового процесса сумма приведенных количеств тепла не может быть больше нуля.

Если сумму заменить интегралом, то получим неравенство Клаузиуса в общем виде:

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0.$$

64. Энтропия. Изменение энтропии в изопроцессах

Количество теплоты dQ , которое может быть доставлено системе или отнято у него при переходе из одного состояния в другое, не определяется однозначно начальным и конечным состояниями и существенно зависит от способа осуществления этого перехода.

Однако строгий теоретический анализ показывает, что для любого обратимого кругового процесса справедливо соотношение

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0.$$

Это соотношение говорит о том, что подинтегральное выражение $\frac{dQ}{T}$ есть полный дифференциал некоторой функции, которая определяется только состоянием системы и не зависит от типа процесса, каким система пришла в это состояние. Эта функция состояния S называется *энтропией* и определяется как

$$dS = \frac{dQ}{T}.$$

Единицей измерения энтропии является $[S] = \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$.

Поскольку dS и dQ имеют один и тот же знак, то по характеру изменения энтропии можно судить о направлении процесса теплообмена. При нагревании тела $dQ > 0$ и его энтропия возрастает – $dS > 0$, при охлаждении $dQ < 0$ и энтропия тела убывает – $dS < 0$.

Если система совершает равновесный переход из состояния 1 в состояние 2, то изменение энтропии равно

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{dU + dA}{T}.$$

Эта формула определяет энтропию с точностью до аддитивной постоянной.

Найдем изменение энтропии идеального газа в изо процессах, полагая, что они равновесны, т. е. обратимы.

1. *Изохорный процесс* ($V = \text{const}$). Для этого процесса $dA = 0$, поэтому

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dU}{T} = \frac{m}{\mu} C_v \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \frac{m}{\mu} C_v \ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{m}{\mu} C_v \ln \frac{P_2}{P_1}.$$

2. *Изобарный процесс* ($P = \text{const}$). Для этого процесса $dA = PdV$, поэтому

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} C_v \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \frac{m}{\mu} R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} \left(C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right) = \frac{m}{\mu} C_p \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

3. *Изотермический процесс* ($T = \text{const}$). Для этого процесса $dU = 0$, поэтому

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dA}{T} = \frac{m}{\mu} R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{P_1}{P_2}.$$

4. *Адиабатический процесс* ($dQ = 0$). Следовательно $\Delta S = 0$. Адиабатические процессы протекают без изменения энтропии и называются *изоэнтропийными*.

65. Закон возрастания энтропии в замкнутых системах

Теперь выясним, в каком соотношении находятся сумма приведенных количеств тепла и приращение энтропии при необратимом процессе. Для этого рассмотрим цикл, состоящий из обратимой и необратимой ветвей (рис. 49). Поскольку в целом цикл необратим, то, согласно неравенству Клаузиуса, сумма приведенных количеств тепла, взятая по всему циклу, должна быть меньше нуля:

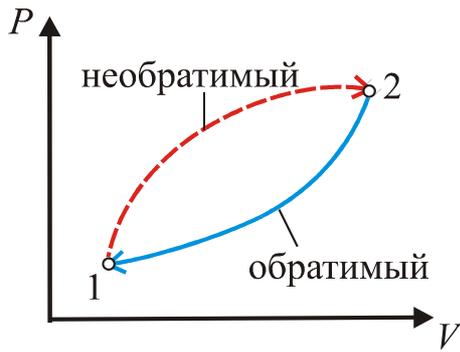


Рис.49. Необратимый цикл

$$\oint \frac{dQ}{T} < 0.$$

Разобьем этот интеграл на две части, отнесенные к разным ветвям:

$$\int_1^2 \frac{dQ}{T} + \int_2^1 \frac{dQ}{T} < 0.$$

(необрат) (обрат)

Второй из этих интегралов (обратимая ветка) равен разности энтропий в состояниях 1 и 2. Поэтому данное соотношение можно записать в виде

$$\Delta S = (S_2 - S_1) > \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$

(необрат)

Полученное неравенство означает, что *приращение энтропии термодинамической системы в произвольном необратимом процессе всегда больше приведенной теплоты этого процесса*. Здесь температура T означает температуру того тела (резервуара), от которого система получает теплоту dQ . При обратимом процессе эта температура совпадает с температурой системы.

Если при необратимом процессе ветка цикла $1 \rightarrow 2$ является *адиабатически изолированной* (нет теплообмена с окружающей средой), то все dQ для неё будут равны нулю, вследствие чего $\Delta S \geq 0$.

Таким образом, *энтропия изолированной системы может только возрастать (если в системе протекает необратимый процесс), либо оставаться постоянной (если в системе протекает обратимый процесс)*. Убывать энтропия изолированной системы не может.

Если система обменивается теплом с внешней средой, ее энтропия может вести себя любым образом. В частности, если система отдает тепло внешним телам, энтропия системы уменьшается.

Если все процессы в системе, в конце концов, завершились, и система перешла из одного равновесного состояния в другое равновесное состояние, её энтропия имеет максимальное значение.

66. Статистическое толкование энтропии

Термодинамической вероятностью W какого-либо состояния называют число микросостояний, с помощью которых может быть осуществлено данное макросостояние. Для системы, состоящей из α отсеков, термодинамическая вероятность макросостояния равна

$$W = \frac{N!}{N_1!N_2!\dots N_\alpha!}.$$

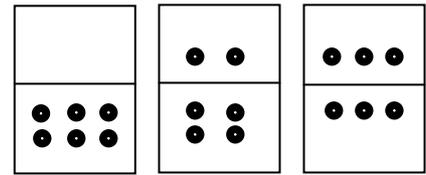


Рис. 50. Три макросостояния

Предположим, что в некотором сосуде имеется шесть молекул. Разделим мысленно сосуд на две равные половины и рассмотрим три состояния газа (рис. 50).

Первое состояние соответствует случаю, когда все шесть молекул находятся в одной половине, а вторая свободна от молекул. *Второе состояние* – когда в одной половине четыре молекулы, во второй половине – две. *Третье состояние*, при котором в каждой половине сосуда присутствуют по три молекулы.

Первое состояние можно осуществить единственным способом. Термодинамическая вероятность первого состояния равна

$$W = \frac{6!}{6!0!} = 1.$$

Второе состояние можно осуществить уже несколькими способами. Термодинамическая вероятность равна

$$W = \frac{6!}{4!2!} = 15.$$

Третье состояние имеет термодинамическую вероятность

$$W = \frac{6!}{3!3!} = 20.$$

Каждое термодинамическое состояние можно рассматривать как с макроскопической, так и с микроскопической точек зрения. С макроскопической точки зрения не имеет значения, какие именно молекулы находятся в одной половине сосуда и какие в другой, важно только их количество. С микроскопической точки зрения, замена в одной из половин сосуда на молекулу из другой половины сосуда приводит уже к новому состоянию. Таким образом, данное макроскопическое состояние системы может осуществляться различным количеством микроскопических состояний.

Больцман показал, что термодинамическая вероятность определяет физическую величину, называемую энтропией

$$S = k \ln W ,$$

где k – постоянная Больцмана.

Таким образом, *энтропия* – скалярная физическая величина, характеризующая макросостояние термодинамической системы, и численно равная по-

стоянной Больцмана, умноженной на натуральный логарифм термодинамической вероятности этого состояния.

Согласно такому определению, возрастание энтропии означает возрастание вероятности данного состояния системы

$$\Delta S \geq 0, \quad k \ln W_2 - k \ln W_1 \geq 0,$$

т. е. самопроизвольно изолированная система может переходить только от состояний, менее вероятных, к состояниям, более вероятным. Из рассмотренных нами состояний наиболее вероятным является состояние, когда в каждой половине сосуда находятся по три молекулы.

67. Второе начало термодинамики

Первое начало термодинамики выражает закон сохранения и превращения энергии применительно к термодинамическим процессам.

Для определения направления протекания термодинамических процессов используется второе начало термодинамики, которое формулируется следующим образом: *любой необратимый процесс в замкнутой системе происходит так, что энтропия системы при этом возрастает.*

Очевидно, что изолированная термодинамическая система, энтропия которой достигла максимально возможной величины, при данных значениях параметров состояния будет находиться в состоянии устойчивого равновесия. Утверждение, что *самопроизвольно изолированная система может переходить только от состояний, менее вероятных, к состояниям, более вероятным* – есть иная формулировка второго начала термодинамики, раскрывающая его статистический смысл.

Существуют еще две формулировки второго начала термодинамики, эквивалентных закону возрастания энтропии:

1) формулировка Клаузиуса: *тепло не может самопроизвольно переходить от менее нагретого к более нагретому телу без каких-либо изменений в системе;*

2) формулировка Кельвина: *невозможно преобразовать в работу всю теплоту, взятую от тела с однородной температурой, не производя никаких других изменений в состоянии системы.*

Таким образом, второе начало термодинамики определяет направление протекания термодинамических процессов и тем самым дает ответ на вопрос, какие процессы в природе возможны, а какие – нет. Оно указывает на необратимость одной формы процесса передачи энергии – работы в другую – теплоту. Работа – форма передачи энергии упорядоченного движения тела как целого; теплота – форма передачи энергии неупорядоченного хаотического движения. Упорядоченное движение может переходить в неупорядоченное самопроизвольно. Обратный переход возможен лишь при условии совершения работы внешними силами.

Однако увеличение энтропии – это наиболее вероятный, но не обязательный путь развития системы. Или можно сказать так, что самопроизвольное уменьшение энтропии макроскопической системы возможно, но весьма маловероятно. В случае системы, состоящей из небольшого числа частиц или малых частей большой системы, могут наблюдаться процессы, связанные с убыванием энтропии, т. е. при малой совокупности частиц могут наблюдаться отклонения от статистических закономерностей и, в частности, от второго начала термодинамики. Так, например, в результате броуновского движения пылинки может подняться на значительную высоту. Работа, необходимая для ее подъема, черпается из запаса кинетической энергии хаотического движения молекулы: газ остывает, его энтропия уменьшается. Чем большую совокупность частиц содержит данная система, тем менее вероятны отклонения от статистических закономерностей и, в частности, от второго начала термодинамики.

Контрольные вопросы

- Чем отличаются обратимые и необратимые процессы? Почему все реальные процессы необратимы?
- Что является необходимым и достаточным условием обратимости термодинамического процесса?
- Какова схема работы теплового двигателя?
- Чем определяется КПД четырехтактного двигателя внутреннего сгорания?
- Представив цикл Карно на диаграмме $P - V$, укажите, какой площадью определяется: 1) работа, совершенная над газом; 2) работа, совершенная самим расширяющимся газом.
- Запишите неравенство Клаузиуса для обратимого и необратимого цикла.
- Дайте понятие энтропии (определение, размерность и математическое выражение энтропии для различных процессов).
- Возможен ли процесс, при котором теплота, взятая от нагревателя, полностью преобразуется в работу?
- В каком направлении может изменяться энтропия замкнутой и незамкнутой системы?

68. Неравновесные процессы. Среднее число столкновений и средняя длина свободного пробега молекул

Наука, изучающая процессы, возникающие при нарушениях равновесия, носит название *физической кинетики*. Нарушение равновесия сопровождается переносом массы (диффузия), импульса (внутреннее трение) или энергии (теплопроводность). Эти процессы называются *явлениями переноса*. Они возникают самопроизвольно вследствие теплового движения при отклонении вещества от равновесного состояния и являются необратимыми.

Рассмотрим некоторые механизмы неравновесной релаксации системы к состоянию равновесия. Прежде всего, введем понятие длины свободного про-

бега молекул. Индивидуальные особенности движения отдельных молекул не играют роли в системе большого числа частиц, поэтому под *длиной свободного пробега* $\langle l \rangle$ понимают среднюю длину пути молекулы в газе между двумя последовательными столкновениями.

Поскольку столкновения носят случайный характер, длина свободного пробега имеет вероятностный смысл: величина $\langle l \rangle$ тем меньше, чем больше вероятность столкновения молекул. В свою очередь, вероятность столкновения молекул определяется их плотностью и размерами молекул. При столкновении молекулы сближаются до некоторого наименьшего расстояния, которое условно считается суммой радиусов взаимодействующих молекул. Столкновение между молекулами может произойти только в том случае, если их центры сблизятся на расстояние, меньшее и равное диаметру d , или столкновение произойдет только в том случае, если центр молекулы окажется внутри круга, имеющего площадь:

$$\sigma = \pi d^2.$$

Величина σ называется *сечением рассеяния*; d – эффективный диаметр.

Эффективный диаметр молекулы – минимальное расстояние, на которое сближаются центры двух молекул при столкновении (рис. 51).

Число столкновений, испытываемых молекулой в единицу времени, может быть различным. Поэтому следует говорить о среднем значении этой величины $\langle Z \rangle$. Средняя длина свободного пробега $\langle l \rangle$ и среднее число столкновений в единицу времени $\langle Z \rangle$ являются главными характеристиками процесса столкновений газовых молекул. Эти величины связаны между собой соотношением

$$\langle l \rangle = \langle v \rangle / \langle Z \rangle,$$

где $\langle v \rangle$ – средняя арифметическая скорость.

Несложные расчеты показывают, что $\langle l \rangle = 1/\sqrt{2} \cdot \pi d^2 n$, где n – число молекул в единице объема (концентрация).

При постоянной температуре концентрация газа пропорциональна его давлению $P = nkT$ и средняя длина свободного пробега молекул равна

$$\langle l \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2} \cdot \pi d^2 P}.$$

При нормальных условиях для молекул воздуха $\langle l \rangle \approx 10^{-7}$ м. По молекулярным представлениям это не малое расстояние. Следовательно, подавляющую часть времени молекулы движутся свободно. С уменьшением давления

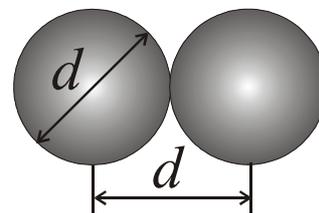


Рис. 51. Эффективный диаметр молекул

длина свободного пробега молекул возрастает в той же мере, в какой падает давление, и при определенном значении P станет равной размерам сосуда.

69. Явления переноса

Обе введенные величины $\langle l \rangle$ и $\langle Z \rangle$ в существенной степени определяют скорость релаксационного процесса, который заключается в том, что при выведении системы из состояния равновесия в газе возникает поток соответствующей величины: тепла, массы, концентрации частиц в зависимости от того, каким способом система была выведена из состояния равновесия.

Определим удельный поток произвольной физической величины как изменение этой величины в единицу времени в какой-либо точке пространства

$$j = -\frac{dG}{dt},$$

где dG – бесконечно малое изменение величины G за малый промежуток времени dt . Знак минус означает, что направление потока противоположно направлению возрастания величины. Само по себе изменение величины G не зависит от времени явно, а связано с её неоднородным распределением в пространстве, например, вдоль оси x . Поэтому перепишем выражение для удельного потока в виде

$$j = -\frac{dG}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -v \frac{dG}{dx}.$$

Чтобы получить полный поток в направлении оси x , нужно умножить это выражение на количество носителей величины G , способных пересечь в единицу времени единичную площадку, расположенную перпендикулярно оси x .

Для упрощения расчетов примем, что все молекулы, проходящие через контрольную площадку, испытали последнее столкновение на одном и том же расстоянии от площадки, равном средней длине свободного пробега. Число таких частиц, движущихся параллельно оси x слева и справа, равно числу частиц, заключенных в объеме цилиндра, площадь основания которого равна *единице*, а длина равна $2\langle l \rangle$ (рис. 52). Ввиду равновероятности движения в любом из возможных шести направлений, полный поток равен

$$J = \frac{1}{6} n \cdot 2\langle l \rangle \cdot S \cdot j = -\frac{n\langle v \rangle \cdot \langle l \rangle}{3} \cdot \frac{dG}{dx}.$$

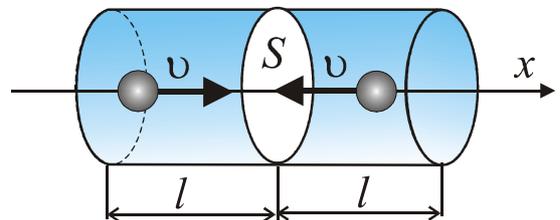


Рис. 52. Движение молекул вдоль оси x

Величина $\frac{dG}{dx}$ представляет собой градиент G в направлении оси x . Та-

ким образом, если в системе имеется неоднородное распределение какой-либо физической величины, то возникает поток этой величины, обусловленный столкновением частиц, и пропорциональный ее градиенту.

Рассмотрим конкретные процессы переноса.

1. *Теплопроводность.* Рассмотрим газ, заключенный между двумя параллельными стенками, имеющими различные температуры ($T_1 > T_2$). В этом случае кинетическая энергия (тепло) молекул более нагретой части газа посредством столкновений начинает распространяться по всему объему. Перенос энергии при теплопроводности осуществляется в результате непосредственной передачи энергии при столкновениях от частиц, обладающих большей энергией, частицам с меньшей энергией.

Поскольку работа при этом не совершается, то средняя энергия, переносимая одной молекулой равна $Q = \frac{i}{2}kT = \frac{i}{2}\frac{R}{N_A}T = c_V m_0 T$ (c_V – удельная теплоемкость), а тепловой поток вдоль оси x соответственно равен

$$J_q = -\frac{m_0 n \langle v \rangle l}{3} c_V \frac{dT}{dx}.$$

Следовательно, поток тепла пропорционален градиенту температуры. Величина $\lambda = \frac{\rho \langle v \rangle l}{3} c_V$ – коэффициент теплопроводности, где $\rho = m_0 n$. Это уравнение называется законом Фурье.

2. *Диффузия.* Если в одну из частей однородной системы добавляется некоторое количество частиц того же или другого сорта, то в объеме возникает неоднородное распределение концентрации этих частиц и в силу указанных причин возникает поток концентрации. Роль величины G в этом случае играет относительная концентрация добавленных частиц – $G = \frac{n'}{n}$, где n – их равновесная концентрация. Процесс выравнивания концентраций, обусловленный механизмом столкновений, называется *диффузией*. Выражение для диффузионного потока в направлении оси x принимает вид

$$J_n = -\frac{1}{3} \langle v \rangle l \frac{dn'}{dx},$$

где коэффициент между потоком и градиентом концентрации представляет собой коэффициент диффузии – $D = \frac{1}{3} \langle v \rangle l$. Это уравнение называется законом Фика.

3. *Вязкость.* Предположим, что нам удалось механическим или иным

способом сообщить импульс какой-либо части нашей системы. Тем самым в системе создается направленный поток частиц. Пусть при этом скорость направленного движения молекул газа стала зависеть от значения координаты x . Распределение импульса частиц в плоскости, перпендикулярной потоку, становится неоднородным. Благодаря столкновениям частиц, происходит передача импульса направленного движения окружающим частицам, в результате чего возникает перераспределение переданного импульса. Этот процесс, который можно рассматривать как диффузию в пространстве импульсов, называется вязкостью, или внутренним трением. Переносимой величиной является импульс частицы, который мы обозначим здесь через $G = m_0 u$, где u – в отличие от тепловой скорости, представляет собой направленную скорость частиц.

Поэтому поток импульса в направлении оси x равен

$$J_p = -\frac{m_0 n \langle v \rangle l}{3} \frac{du}{dx},$$

а коэффициент вязкости среды определяется как $\eta = \frac{\rho \langle v \rangle l}{3}$.

70. Реальные газы. Уравнение Ван-дер-Ваальса

Законам идеальных газов с достаточной степенью точности подчиняются только реальные газы при низких давлениях и достаточно высоких температурах, так как только в этом случае объем молекул можно считать пренебрежимо малым, а межмолекулярное взаимодействие – отсутствующим. Повышение давления приводит к уменьшению среднего расстояния между молекулами, поэтому необходимо учитывать как объем молекул, так и взаимодействие между ними.

Силы межмолекулярного взаимодействия проявляются на расстояниях $r \leq 10^{-9}$ м и быстро убывают при увеличении расстояния между молекулами. Существенно, что между молекулами вещества одновременно действуют как силы притяжения, так и силы отталкивания. Именно это приводит к возможности существования равновесных расстояний между молекулами.

В первом приближении молекулы реального газа можно уподобить абсолютно твердым шарикам с диаметром d , между которыми действуют только силы взаимного притяжения. Такое рассмотрение приводит к косвенному учету сил отталкивания ввиду существования конечного размера молекул.

Голландский физик Ван-дер-Ваальс вывел уравнение состояния реального газа, введя в уравнение Менделеева-Клапейрона, записанное для одного моля, две поправки.

1. Молекула реального газа из-за существования собственного объема движется в сосуде менее свободно и не может находиться в тех местах сосуда, где расположены остальные молекулы. Следовательно, из общего молярного объема V_μ необходимо вычесть поправку b , характеризующую ту часть объе-

ма, которая недоступна для движения молекул. Расчеты показывают, что она равна учетверенному собственному объему молекул.

2. Действие сил притяжения приводит к появлению дополнительного давления P' на газ, называемого внутренним давлением. Эта поправка обратно пропорциональна квадрату молярного объема газа: $P' = a/V_\mu^2$. Здесь a – постоянная, характеризующая силы межмолекулярного притяжения.

С учетом этих поправок уравнение Ван-дер-Ваальса для одного моля газа запишется в виде

$$\left(P + \frac{a}{V_\mu^2} \right) (V_\mu - b) = RT .$$

Чтобы перейти к уравнению для произвольной массы, умножим его на число молей газа в объеме V

$$\left(P + \frac{m^2}{\mu^2} \cdot \frac{a}{V^2} \right) \left(V - \frac{m}{\mu} \cdot b \right) = \frac{m}{\mu} RT .$$

Поскольку при выводе уравнения был сделан целый ряд упрощений, на него следует смотреть как на приближенное уравнение состояния реального газа. Вычисленные с помощью уравнения Ван-дер-Ваальса значения давления газа, достаточно точно совпадают с опытом лишь при относительно высоких температурах и только в некотором интервале давлений.

71. Изотермы реального газа. Критические состояния

Для изотерм реального газа (рис. 53) характерно следующее. При температурах меньших T_k на каждой изотерме имеется горизонтальный участок bc , вдоль которого постоянна не только температура, но и давление, а молярный объем может принимать любые значения от V_b до V_c .

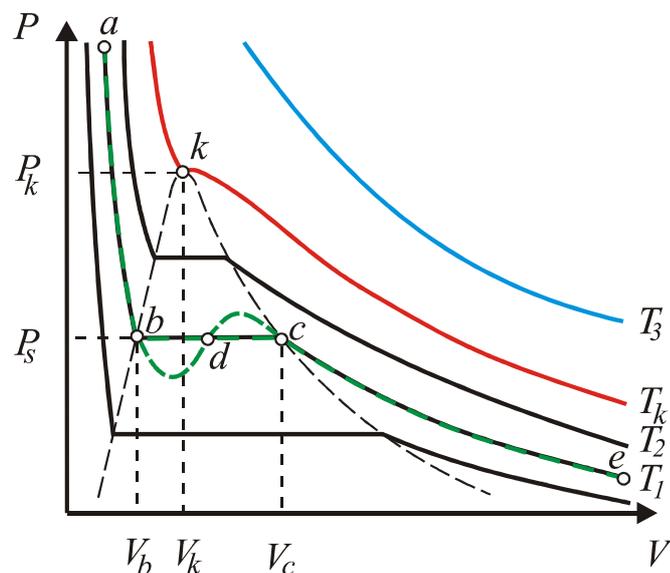


Рис. 53. Изотермы реального газа

Разность объемов $V_c - V_b$ в конечных точках горизонтальных участков изотерм возрастает с понижением температуры T . При приближении к температуре T_k эта разность объемов стремится к нулю. При $T = T_k$ точки b и c сливаются в одну точку k , называемую *критической точкой*. Соответствующие ей значения P_k и V_k также называются *критическими параметрами*.

Любую докритическую изо-

терму ($T < T_k$) можно разбить на три характерных участка ec , bc , ba . Вдоль первого и третьего участков давление монотонно возрастает при уменьшении молярного объема. Участок ec соответствует газообразному состоянию исследуемого вещества, а участок ba – жидкому. Малая сжимаемость жидкостей приводит к тому, что участок изотермы ba представляют собой почти вертикальную прямую.

На участке bc исследуемое вещество одновременно находится в двух агрегатных состояниях жидком и газообразном. Точка b соответствует состоянию кипящей жидкости, а точка c – состоянию сухого насыщенного пара. Внутри области вещество представляет собой смесь кипящей жидкости и сухого насыщенного пара, находящихся в динамическом равновесии. Такая смесь называется *насыщенным паром*, а соответствующее ему давление P_s – *давлением насыщенного пара*. По мере уменьшения объема на этом участке все большая часть газа переходит в жидкую фазу.

При давлениях больших критического область двухфазного состояния отсутствует: вещество находится либо в жидком, либо в газообразном состоянии. Границей между ними является критическая изотерма. Следовательно, газ, температура которого выше критической, нельзя перевести в жидкое состояние путем изотермического сжатия.

Критическая точка замечательна тем, что при приближении к ней стираются различия между жидким и газообразным состояниями вещества. В критическом состоянии обращаются в нуль удельная теплота парообразования и коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

Сопоставление экспериментальной изотермы с изотермой Ван-дер-Ваальса дает, что эти изотермы довольно хорошо совпадают на участках, отвечающих однофазным состояниям вещества, но ведут себя совершенно разным образом в области расслоения на две фазы.

Действительно, уравнение Ван-дер-Ваальса – алгебраическое уравнение третьей степени относительно объема

$$V^3 - \left(b + \frac{RT}{P}\right)V^2 + \frac{a}{P}V - \frac{ab}{P} = 0.$$

Следовательно, при данных P и T оно может иметь или три вещественных корня – V_b , V_d , V_c , или один вещественный и два комплексно-сопряженных корня, не имеющих физического смысла.

Первому случаю соответствуют изотермы при низких температурах (кривые для температур T_1 и T_2). Вместо прямолинейного горизонтального участка изотерма Ван-дер-Ваальса имеет вид S -образного завитка. Промежуточный корень V_d лежит на возрастающей (никогда не реализуемой в природе) ветви, края которой соответствуют абсолютно неустойчивым состояниям. Такие состояния можно осуществить лишь на очень короткий промежуток времени. Они отвечают *метастабильным состояниям* – переохлажденному пару и перегретой («растянутой») жидкости.

Второму случаю соответствуют изотермы (например T_3), лежащие выше критической T_k .

Для критической изотермы точка k служит точкой перегиба. Ей соответствуют три совпадающих вещественных корня, которые можно найти с помощью уравнения

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}.$$

В критической точке первая $\frac{dP}{dV}$ и вторая $\frac{d^2P}{dV^2}$ производные обращаются в нуль:

$$-\frac{RT_{кр}}{(V_{кр}-b)^2} + \frac{2a}{V_{кр}^3} = 0, \quad \frac{2RT}{(V_{кр}-b)^3} - \frac{6a}{V_{кр}^4} = 0,$$

а само уравнения Ван-дер-Ваальса имеет вид

$$P_{кр} = \frac{RT_{кр}}{V_{кр}-b} + \frac{a}{V_{кр}^2}.$$

Решая эту систему из трех уравнений с тремя неизвестными $V_{кр}$, $P_{кр}$ и $T_{кр}$, получим

$$V_{кр} = 3b; \quad P_{кр} = \frac{a}{27b^2}; \quad T_{кр} = \frac{8a}{27bR}.$$

Таким образом, зная константы Ван-дер-Ваальса a и b , можно найти соответствующие критические величины. И, наоборот, по известным критическим величинам могут быть найдены значения констант Ван-дер-Ваальса.

72. Внутренняя энергия реального газа

В реальных газах нельзя пренебрегать взаимодействием молекул. Поэтому его внутренняя энергия состоит не только из кинетической энергии теплового движения молекул W_k , но и потенциальной энергии их взаимодействия W_p :

$$U = W_k + W_p.$$

Как и для одного моля идеального газа, кинетическая энергия молекул реального газа по определению пропорциональна его температуре

$$W_k = \frac{i}{2}RT = C_V T.$$

Потенциальная энергия молекулярного взаимодействия зависит от взаимного расположения молекул и потому должна изменяться при изменении объема. Действительно, при расширении одного моля газа за счет изменения внутреннего молекулярного давления совершается работа

$$dA = -P' dV_{\mu} = -\frac{a}{V_{\mu}^2} dV_{\mu}.$$

Эта работа связана с изменением потенциальной энергии взаимодействия молекул выражением:

$$dA = -dW_p.$$

Поэтому

$$W_p = \int \frac{a}{V_{\mu}^2} dV_{\mu} = -\frac{a}{V_{\mu}} + W_0.$$

Приняв потенциальную энергию при $V_{\mu} \rightarrow \infty$ равной нулю ($W_0 = 0$), получим:

$$U = \frac{m}{\mu} \left(C_V T - \frac{a}{V} \right).$$

Из этого выражения видно, что внутренняя энергия ван-дер-ваальсовского (реального) газа меньше, чем была бы у идеального газа при той температуре.

В отличие от идеального газа температура реального газа может изменяться даже в том случае, если его внутренняя энергия остается постоянной, так как она зависит не только от температуры, но и от объема.

Покажем это, например, на явлении *адиабатического расширения газа в вакуум*. Представим себе сосуд, разделенный на две части перегородкой. В одной части находится газ, в другой – вакуум. Если убрать перегородку, то газ устремится в пустую часть сосуда. Так как работа против внешних сил в рассматриваемом случае отсутствует и, по условию, теплообмена нет, то внутренняя энергия газа до и после расширения газа должна быть одинаковой:

$$C_V T_1 - \frac{a}{V_1} = C_V T_2 - \frac{a}{V_2}.$$

Отсюда изменение температуры равно

$$T_2 - T_1 = \frac{a}{C_V} \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right).$$

Так как $V_2 > V_1$, то $T_2 < T_1$, т. е. при расширении в пустоту газ Ван-дер-Ваальса охлаждается. Причина этого явления заключается в том, что при расширении среднее расстояние между молекулами увеличивается, силы притяжения совершают отрицательную работу, и потенциальная энергия газа увеличивается. А поскольку полная внутренняя энергия остается постоянной, то кинетическая энергия, а соответственно и температура, уменьшаются. Следовательно, изменение одного из видов энергии здесь компенсируется противоположным изменением другого вида энергии, т. е. $\Delta W_k = -\Delta W_p$.

Контрольные вопросы

- Зависит ли средняя длина свободного пробега молекул от температуры газа? Почему?
- Как изменится средняя длина свободного пробега молекул с увеличением давления?
- В чем сущность явлений переноса? Каковы они и при каких условиях возникают?
- Каков механизм теплопроводности сильно разреженных газов?
- Запишите и проанализируйте уравнение Ван-дер-Ваальса для 1 моль газа; для произвольного количества вещества.
- Чем отличаются реальные газы от идеальных?
- Каков смысл поправок при выводе уравнения Ван-дер-Ваальса?
- При адиабатном расширении газа в вакуум его внутренняя энергия не изменяется. Как изменится температура, если газ реальный?

73. Жидкости. Свойства жидкого состояния вещества

Жидкость по своим свойствам и строению занимает промежуточное положение между газами и твердыми кристаллическими веществами. В молекулярно-кинетической теории различные агрегатные состояния вещества связывают с различной степенью упорядоченности молекул.

Для твердых тел наблюдается так называемый *дальний порядок* в расположении частиц, т. е. их упорядоченное расположение, повторяющееся на больших расстояниях. Жидкости всегда существуют при температурах более высоких, чем соответствующие твердые тела. Интенсивность теплового движения частиц в них выше, следствием чего является увеличение среднего расстояния между частицами на 5–10 % по сравнению с твердыми телами.

Связи между частицами сохраняются, но они оказываются несколько слабее, чем в твердых телах. Поэтому в жидкостях имеет место так называемый *ближний порядок* в расположении частиц, т. е. их упорядоченное расположение, повторяющееся на расстояниях, сравнимых с межатомными.

При температурах, близких к температуре кипения, структура жидкости соответствует газообразному состоянию. Молекулы жидкости практически не связаны между собой силами межмолекулярного взаимодействия.

Теория жидкости до настоящего времени полностью не развита. Разработка ряда проблем в исследовании сложных свойств жидкости принадлежит Я. И. Френкелю (1894–1952). Тепловое движение в жидкости он объяснял тем, что каждая молекула в течение некоторого времени колеблется около определенного положения равновесия, после чего скачком переходит в новое положение, отстоящее от исходного на расстоянии порядка межатомного.

Таким образом, молекулы жидкости довольно медленно перемещаются по всей массе жидкости. С повышением температуры частота колебательного движения резко увеличивается, в результате чего возрастает подвижность молекул.

На основе модели Френкеля можно объяснить некоторые *отличительные особенности* свойств жидкости. Так, жидкости даже вблизи критической температуры обладают гораздо большей *вязкостью*, чем газы, и вязкость с ростом температуры уменьшается (а не растёт, как у газов). Объясняется это иным характером процесса передачи импульса: он передается молекулами, совершающими перескок из одного равновесного состояния в другое, а эти перескоки с ростом температуры существенно учащаются.

Диффузия в жидкостях происходит только за счет перескоков молекул, и она происходит гораздо медленнее, чем в газах.

Теплопроводность жидкостей обусловлена обменом кинетической энергией между частицами, колеблющимися около своих положений равновесия с различными амплитудами; резкие перескоки молекул заметной роли не играют. Механизм теплопроводности в жидкостях похож на механизм теплопроводности в газах.

Интересным свойством обладает так называемая *квантовая жидкость* (жидкий гелий около абсолютного нуля), проявляя свойство *сверхтекучести*, т. е. фактически полностью отсутствует вязкость.

74. Поверхностный слой

Наиболее интересной особенностью жидкостей является наличие *свободной поверхности* на границе раздела с газом, которая находится в особых условиях по сравнению с остальной массой жидкости. Возникают эти особые условия потому, что молекулы пограничного слоя жидкости окружены молекулами той жидкости не со всех сторон.

Рассмотрим две молекулы: одна находится внутри жидкости, а другая – на поверхности (рис. 54). На каждую из них действуют силы притяжения со стороны окружающих молекул жидкости, расположенных на расстоянии нескольких нанометров ($\sim 10^{-9}$ м). Это расстояние r называют *радиусом молекулярного взаимодействия*, а соответствующая ему сфера – *сферой молекулярного действия*. За пределами сферы силами притяжения можно пренебречь.

В сфере молекулярного действия первой молекулы соседние молекулы

жидкости расположены равномерно. Силы межмолекулярного взаимодействия, действующие на неё со стороны таких же молекул, направлены в разные стороны и в среднем скомпенсированы. Поэтому результирующая сила равна нулю.

Иначе обстоит дело, если молекула расположена от поверхности на расстоянии, меньшем r . В данном случае сфера молекулярного действия лишь частично расположена внутри жидкости. Так как концентрация молекул в газе мала по сравнению с их концентрацией в жидкости, то равнодействующая сил \vec{F} , приложенных к каждой молекуле поверхностного слоя, не равна нулю и направлена внутрь жидкости. Вследствие этого молекулы поверхностного слоя втягиваются внутрь объема жидкости, и поверхностный слой оказывает *молекулярное давление* на жидкость.

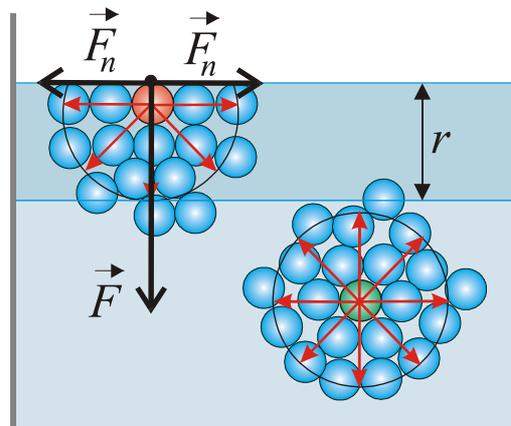


Рис. 54. Молекулы на поверхности и внутри жидкости

Это давление очень велико и составляет, например, для спирта 236 МПа, для воды – 1079 МПа. Естественно, что давления, обычно применяемые в практике, не оказывают на жидкость сколько-нибудь заметного влияния, так как предварительное давление, обусловленное молекулярным притяжением частиц, несравненно больше того давления, с которым обычно приходится сталкиваться в практике. Этим, в частности, можно объяснить малую сжимаемость капельных жидкостей.

Молекулярное давление не действует на тело, помещенное в жидкость, так как оно обусловлено силами, действующими только между молекулами самой жидкости.

75. Поверхностная энергия. Поверхностное натяжение

Если молекулы перемещаются с поверхности внутрь жидкости, силы межмолекулярного взаимодействия совершают положительную работу. Наоборот, чтобы вытащить часть молекул изнутри объема жидкости на поверхность (то есть увеличить площадь поверхности на величину dS), необходимо совершить положительную работу против сил молекулярного давления, пропорциональную изменению площади поверхности:

$$dA = \sigma \cdot dS .$$

Эта работа совершается за счет кинетической энергии молекул и идет на увеличение их потенциальной энергии. Следовательно, каждая молекула на поверхности жидкости обладают большей потенциальной энергией по сравнению с молекулами внутри жидкости. Эту дополнительную потенциальную энергию называют *поверхностной энергией*. Очевидно, что величина поверхностной энергии прямо пропорциональна количеству молекул в поверхностном слое и,

следовательно, прямо пропорциональна площади S свободной поверхности жидкости:

$$W_n = \sigma \cdot S.$$

Коэффициент пропорциональности σ называется *коэффициентом поверхностного натяжения*. Он определяется *работой, необходимой для увеличения площади поверхности жидкости при постоянной температуре на единицу*.

Единица измерения в СИ: $[\sigma] = \text{Дж}/\text{м}^2 = \text{Н}/\text{м}$.

Так как равновесное состояние характеризуется минимумом потенциальной энергии, то жидкость при отсутствии внешних сил будет принимать такую форму, чтобы при заданном объеме она имела минимальную поверхность, т. е. форму шара.

Способность поверхности жидкости сокращаться обусловлена существованием молекулярных сил, стремящихся сократить эту поверхность. Так, на любую молекулу поверхностного слоя действуют не только молекулы, находящиеся внутри жидкости, но и молекулы, расположенные рядом на поверхности жидкости и стремящиеся как бы «разорвать» поверхность в этом месте (см. рис. 54).

Если по поверхности жидкости провести воображаемую линию, то равнодействующая молекулярных сил, действующих на молекулы этой линии по одну из сторон, будет направлена по касательной к поверхности и одновременно перпендикулярно линии возможного разрыва. Эта сила называется *силой поверхностного натяжения*, поскольку именно она и стремится сократить поверхность жидкости. Очевидно, что эта сила пропорциональна числу молекул в линии разрыва, и, следовательно, ее длине l :

$$F_n = \sigma \cdot l,$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения, численно равный *силе поверхностного натяжения, действующей на единицу длины рассматриваемой линии*.

Наличие сил поверхностного натяжения делает поверхность жидкости похожей на упругую растянутую пленку, с той только разницей, что упругие силы в пленке зависят от площади ее поверхности (то есть от того, как пленка деформирована), а силы поверхностного натяжения *не зависят* от площади поверхности жидкости.

Коэффициент поверхностного натяжения зависит от природы жидкости и ее температуры. Большинство жидкостей при температуре 300 К имеют поверхностное натяжение порядка $(10^{-2} - 10^{-1}) \text{ Н}/\text{м}$. Вдали от критической температуры (при которой исчезает различие между жидкостью и ее насыщенным паром) его значение убывает линейно с увеличением температуры, так как увеличиваются средние расстояния между молекулами жидкости, а при критической температуре обращается в нуль.

Поверхностное натяжение существенным образом зависит от примесей, имеющих в жидкостях. Вещества, ослабляющие поверхностное натяжение жидкости, называются *поверхностно-активными*. Наиболее известным поверхностно-активным веществом по отношению к воде является мыло.

Существуют вещества (сахар, соль), которые увеличивают поверхностное натяжение жидкости благодаря тому, что их молекулы взаимодействуют с молекулами жидкости сильнее, чем молекулы жидкости между собой.

76. Явления на границе жидкости и твердого тела

На границе раздела жидкости с твердым телом возникают явления *смачивания* или *несмачивания* (рис. 55), обусловленные взаимодействиями молекул жидкости с молекулами твердого тела. Для смачивающей жидкости силы притяжения между молекулами жидкости и твердого тела больше, чем между молекулами самой жидкости, и жидкость стремится увеличить поверхность соприкосновения с твердым телом. Для несмачивающей жидкости силы притяжения между молекулами жидкости и твердого тела меньше, чем между молекулами жидкости, и жидкость стремится уменьшить поверхность своего соприкосновения с твердым телом. Поскольку эти явления определяются относительными свойствами твердого тела и жидкости, то одна и та же жидкость может быть смачивающей для одного твердого тела и несмачивающей для другого. Поэтому на границе элемента контура Δl имеет смысл говорить об относительной силе взаимодействия:

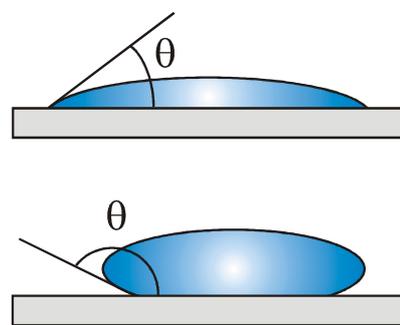


Рис. 55. Смачивание и несмачивание

$$F_{12} = \sigma_{12} \cdot \Delta l,$$

где σ_{12} – относительный коэффициент поверхностного натяжения первой среды по отношению ко второй.

Количественной мерой смачивания служит *краевой угол* θ , образуемый поверхностью твердого тела и касательной, проведенной к поверхности жидкости в точке их соприкосновения. Отчет угла производится со стороны жидкости.

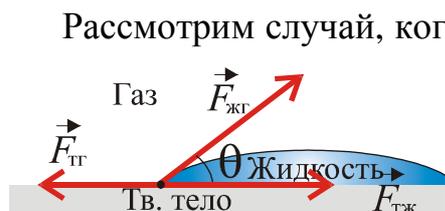


Рис. 56. Краевой угол

Рассмотрим случай, когда в соприкосновении находятся три среды: твердая, жидкая и газообразная (рис. 56). Вся система примет конфигурацию, соответствующую минимуму суммарной энергии (поверхностной, в поле силы тяжести и т. п.). Вдоль контура, ограничивающего жидкость на твердом теле, имеет место уравнивание трех сил поверхностных

натяжений: $\vec{F}_{\text{ТГ}}$ – на границе твердое тело – газ; $\vec{F}_{\text{ТЖ}}$ – на границе твердое тело – жидкость; $\vec{F}_{\text{ЖГ}}$ – на границе газ – жидкость

$$\vec{F}_{\text{ТГ}} + \vec{F}_{\text{ЖГ}} + \vec{F}_{\text{ТЖ}} = 0.$$

Тогда условие равновесия элемента контура длиной Δl (в проекции сил на направление касательной к поверхности твердого тела) запишется следующим образом: $\Delta l \sigma_{\text{ТГ}} = \Delta l \sigma_{\text{ТЖ}} + \Delta l \sigma_{\text{ЖГ}} \cos \theta$, где $\sigma_{\text{ТГ}}, \sigma_{\text{ТЖ}}, \sigma_{\text{ЖГ}}$ – коэффициенты поверхностного натяжения на границах: твердое тело – газ; твердое тело – жидкость и жидкость – газ. Отсюда

$$\cos \theta = \frac{(\sigma_{\text{ТГ}} - \sigma_{\text{ТЖ}})}{\sigma_{\text{ЖГ}}}.$$

Если $\sigma_{\text{ТГ}} > \sigma_{\text{ТЖ}}$, то $\cos \theta > 0$ и краевой угол острый. В этом случае имеет место *частичное смачивание*. Если $\cos \theta = 1$, то жидкость неограниченно растекается по поверхности твердого тела – имеет место *полное смачивание*. При полном смачивании краевой угол равен нулю.

Если $\sigma_{\text{ТГ}} < \sigma_{\text{ТЖ}}$, $\cos \theta < 0$ и краевой угол тупой. В этом случае имеет место *частичное несмачивание*. Если $\cos \theta = -1$, то поверхность, по которой жидкость граничит с твердым телом, стягивается

в точку, жидкость отделяется от твердой поверхности – имеет место *полное несмачивание*. При полном несмачивании краевой угол равен π . Смачивание или несмачивание жидкостью твердого тела приводит к тому,

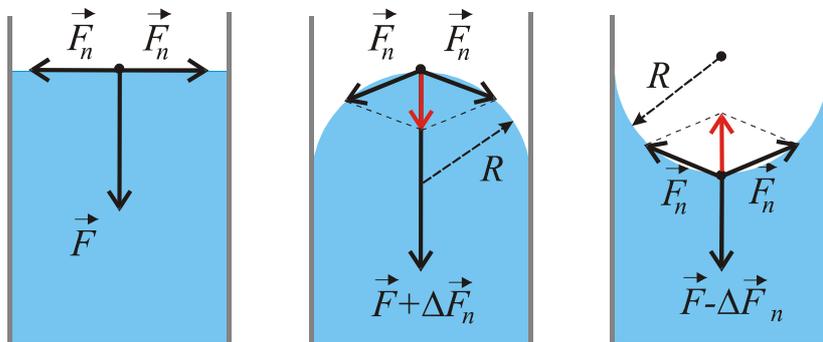


Рис. 57. Образование мениска

что вблизи стенок сосуда наблюдается искривление поверхности жидкости (рис. 57). В узкой трубке (капилляре) или в узком зазоре между двумя стенками, искривленной оказывается вся поверхность. Если жидкость смачивает стенки, поверхность имеет вогнутую форму, если не смачивает – выпуклую. Такого рода поверхности называют *менисками*.

77. Давление под искривленной поверхностью жидкости

Как уже отмечалось выше, молекулы поверхностного слоя втягиваются внутрь объема жидкости, вследствие чего поверхностный слой оказывает молекулярное давление на жидкость. Если поверхность жидкости плоская, то все

силы \vec{F} , действующие на каждую молекулу поверхностного слоя, параллельны друг другу и оказывают на поверхность жидкости молекулярное давление P_0 .

При этом вклад сил поверхностного натяжения \vec{F}_n в это молекулярное давление равен нулю, так как на плоской поверхности эти силы направлены противоположно и компенсируют друг друга (рис. 54). Если же поверхность жидкости по каким-либо причинам искривлена, то силы поверхностного натяжения, действующие на молекулы поверхностного слоя, направлены под углом и уже не компенсируют друг друга, а их результирующая направлена к центру кривизны поверхности и оказывает на поверхность дополнительное молекулярное давление ΔP (рис. 57), величина которого рассчитывается по формуле Лапласа

$$\Delta P = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где R_1 и R_2 локальные радиусы кривизны поверхности жидкости в двух взаимно перпендикулярных сечениях. Радиусы R_1 и R_2 – алгебраические величины и их знак в формуле определяется по следующему правилу: *если центр кривизны в рассматриваемом сечении находится внутри жидкости под данной поверхностью, соответствующий радиус кривизны положителен; если центр кривизны лежит над поверхностью жидкости, радиус кривизны отрицателен* (рис. 58).

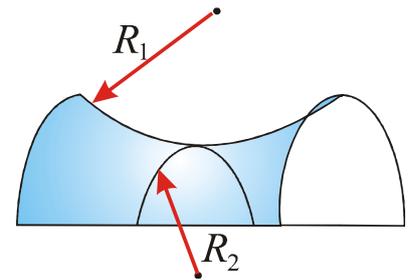


Рис. 58. Положительная и отрицательная кривизна поверхности

Если поверхность жидкости сферическая, то $R_1 = R_2 = R$ и добавочное давление равно

$$\Delta P = \frac{2\sigma}{R}.$$

Данное выражение можно получить также из достаточно простых соображений. Для этого мысленно разрежем сферическую каплю жидкости диаметральной плоскостью на два полушария (рис. 59). Из-за поверхностного натяжения оба полушария притягиваются друг к другу с силой, равной:

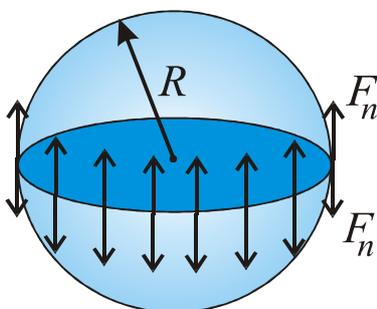


Рис. 59. Сферический мениск

$$F_n = l\sigma = 2\pi R\sigma.$$

Эта сила прижимает оба полушария по поверхности $S = \pi R^2$ и, следовательно, обуславливает дополнительное давление:

$$\Delta P = \frac{F_n}{S} = \frac{2\pi R\sigma}{\pi R^2} = \frac{2\sigma}{R}.$$

Избыточное давление внутри сферы (мыльный пузырь) радиуса R вызывается действием обоих поверхностных слоев и поэтому равно

$$\Delta P = \frac{4\sigma}{R}.$$

В случае плоской поверхности силы поверхностного натяжения избыточного давления не создают, так как $R_1 = R_2 = \infty$. Аналогичный результат получается и в случае неплоской поверхности, если радиусы кривизны одинаковы по величине и противоположны по знаку.

Поскольку силы, создающие дополнительное молекулярное давление, направлены всегда к центру кривизны поверхности, то и дополнительному давлению ΔP приписывают такую же направленность. В результате молекулярное давление под выпуклой поверхностью жидкости всегда больше, а под вогнутой – меньше, чем под плоской поверхностью:

$$P_{\text{вып}} = P_0 + \Delta P, \quad P_{\text{вогн}} = P_0 - \Delta P.$$

78. Капиллярность

Добавочное молекулярное давление обуславливает изменение уровня жидкости в узких трубках (капиллярах), вследствие чего оно еще называется *капиллярным давлением*.

Если опустить капилляр в смачиваемую жидкость, то внутри него образуется вогнутый мениск радиуса R , молекулярное давление под которым на ΔP меньше, чем под плоской поверхностью в широком сосуде, сообщающимся с капилляром (рис. 60). Так как молекулярное давление под плоской поверхностью в широком сосуде больше, чем в капилляре, то оно выталкивает жидкость в капилляре вверх до тех пор, пока весовое давление образовавшегося столба жидкости высотой h не скомпенсирует добавочное молекулярное давление ΔP

$$\Delta P = \rho g h,$$

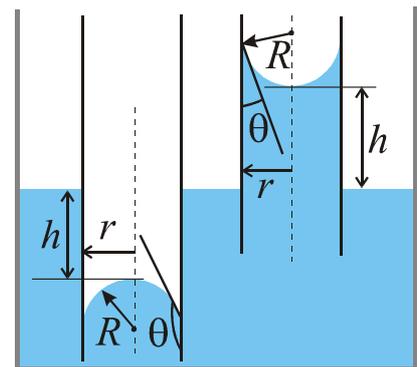


Рис. 60. Жидкость в капиллярах

где ρ – плотность жидкости; g – ускорение свободного падения.

Если жидкость не смачивает капилляр, то образуется выпуклый мениск, молекулярное давление под которым на ΔP больше, чем в широком сосуде. Оно направлено вниз и поэтому вытесняет жидкость в капилляре ниже исходного уровня на глубину h .

Таким образом, в капилляре жидкость поднимается (или опускается) на такую высоту h , при которой гидростатическое давление столба жидкости уравнивает избыточное молекулярное давление, обусловленное кривизной мениска

$$h = \frac{\Delta P}{\rho g} = \frac{2\sigma}{\rho g R}.$$

Здесь R – радиус мениска. Выразим его через краевой угол θ и радиус капилляра r : $R = r/\cos\theta$. Тогда высота поднятия жидкости в капилляре будет равна

$$h = \frac{2\sigma \cos\theta}{\rho g r}.$$

Из формулы видно, что чем тоньше капилляр и лучше смачивание (меньше θ и, соответственно, больше $\cos\theta$), тем выше поднимается жидкость по капилляру. При идеальном смачивании ($\theta = 0$, $\cos\theta = 1$) высота подъема максимальна. Рассмотрим поднятие смачивающей жидкости между двумя пластинами, разделенными узким зазором d . Если пластины параллельны, то мениск имеет цилиндрическую форму. Для цилиндрической поверхности локальные радиусы кривизны во взаимно перпендикулярных сечениях соответственно равны $R_1 = R$, $R_2 = \infty$. Поэтому избыточное молекулярное давление за счет искривления поверхности можно определить как: $\Delta P = \frac{\sigma}{R} = \frac{2\sigma}{d}$. Тогда высота капиллярного подъема между двумя пластинами равна

$$h = \frac{2\sigma \cos\theta}{\rho g d}.$$

Капиллярные явления имеют большое значение в природе и технике. Например, влагообмен в почве и растениях осуществляется за счет поднятия воды по тончайшим капиллярам. В капилляре переменного сечения капля смачиваемой жидкости под воздействием разности лапласовских давлений втягивается в сторону его утончения. Этим объясняется так называемое расклинивающее действие смачивающих жидкостей: жидкости, проникая в микротрещины, увеличивают их и тем самым понижают прочность твердых тел – впитывание влаги бетоном и т. д. На капиллярности основано действие фитилей.

Контрольные вопросы

- Каков критерий различных агрегатных состояний вещества?
- В чем заключается особенность поверхностного слоя жидкости?
- Почему у всех веществ поверхностное натяжение уменьшается с температурой?

- Что представляют собой поверхностно-активные вещества?
- При каком условии жидкость смачивает твердое тело, а при каком – не смачивает?
- Как определяется давление под искривленной поверхностью жидкости?
- От чего зависит высота поднятия смачивающей жидкости в капилляре?

СПИСОК ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ [7]

1. Определение плотности твердого тела правильной геометрической формы.
2. Определение скорости полета пули при помощи баллистического маятника.
3. Определение момента инерции системы тел.
4. Динамическое определение массы с помощью инерционных весов.
5. Определение модуля Юнга твердых тел динамическим методом.
6. Определение модуля сдвига по крутильным колебаниям.
7. Определение массы моля и плотности воздуха.
8. Определение отношения теплоемкости газа при постоянном давлении к теплоемкости газа при постоянном объеме.
9. Определение коэффициента поверхностного натяжения жидкости методом отрыва кольца.
10. Определение коэффициента динамической вязкости по методу Стокса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. *Ивлиев А. Д.* Физика: учебное пособие. Екатеринбург: Изд-во УГГУ–УПИ, 2004. 617 с.
2. *Трофимова Т. И.* Курс физики: учебное пособие для вузов. М.: Высшая школа, 2003. 541 с.
3. *Савельев И. В.* Курс общей физики: учебное пособие для вузов. Т. 1. М.: ООО Изд-во «Астрель», 2004. 336 с.

Дополнительная литература

4. *Детлав А. А., Яворский Б. М.* Курс физики: учебное пособие. М.: Высшая школа, 2001. 718 с.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика: учебное пособие. В 10 т. Т. 2. Теория поля. М.: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 512 с.
6. *Волькенштейн В. С.* Сборник задач по общему курсу физики: учебное пособие для вузов. 12-е изд., испр. / под ред. И. В. Савельева. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. 400 с.
7. *Тарасов Б.Н., Адриановский Б.П., Глаголева Ю.В., Старцева М.И., Заянова С.А.* Физика. Часть 1. Механика и молекулярная физика. Руководство к выполнению лабораторных работ по дисциплине «Физика» для студентов всех направлений. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2009. 64 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

МЕХАНИКА.....	3
1. Предмет физики. Основная задача механики.....	3
2. Модели в механике.....	4
3. Системы отсчета. Траектория, длина пути. Вектор перемещения.....	4
4. Кинематика материальной точки. Скорость и ускорение точки.....	5
5. Нормальное, тангенциальное и полное ускорения.....	7
6. Угловая скорость и угловое перемещение.....	9
7. Связь между линейными и угловыми величинами.....	10
8. Масса. Импульс. Сила. Законы Ньютона.....	11
9. Силы гравитационного взаимодействия.....	14
10. Сила тяжести. Ускорение свободного падения.....	15
11. Вес тела. Силы трения.....	16
12. Деформации. Сила упругости. Закон Гука.....	19
13. Работа и мощность.....	21
14. Механическая энергия. Кинетическая энергия.....	24
15. Потенциальная энергия.....	25
16. Законы Ньютона для системы материальных точек.....	28
17. Закон сохранения импульса.....	29
18. Энергия системы материальных точек.....	30
19. Закон сохранения механической энергии в консервативной системе	31
20. Соударение двух тел.....	32
21. Момент силы, момент импульса.....	33
22. Момент инерции.....	35
23. Определение моментов инерции тел.....	36
24. Уравнение динамики вращательного движения твердого тела.....	38
25. Закон сохранения момента импульса.....	40
26. Кинетическая энергия вращающегося тела.....	41
27. Работа внешних сил при вращении твердого тела.....	41
СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ.....	42
28. Преобразования Галилея. Механический принцип относительности	42
29. Постулаты специальной теории относительности.....	44
30. Относительность одновременности.....	45
31. Преобразования Лоренца.....	46
32. Одновременность событий в разных системах отсчета.....	47
33. Длина тел в разных системах отсчета.....	48
34. Длительность событий в разных системах отсчета.....	49
35. Релятивистский закон сложения скоростей.....	50
36. Пространственно-временной интервал.....	51
37. Динамика теории относительности. Законы сохранения.....	52
МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА.....	56
38. Статистический и термодинамический методы исследования веще- ства.....	56
39. Основные понятия и модели.....	57
40. Параметры состояния.....	58

41. Газовые законы.....	60
42. Уравнение состояния идеального газа.....	60
43. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа.....	61
44. Средняя кинетическая энергия молекул. Молекулярно-кинетическое толкование абсолютной температуры.....	62
45. Распределение скоростей молекул по Максвеллу.....	63
46. Экспериментальная проверка закона распределения Максвелла.....	65
47. Барометрическая формула.....	65
48. Закон распределения Больцмана.....	66
49. Число степеней свободы молекул.....	67
50. Распределение энергии по степеням свободы.....	68
51. Внутренняя энергия.....	69
52. Работа в термодинамике. Теплопередача.....	70
53. Первое начало термодинамики.....	72
54. Теплоемкость газа. Уравнение Майера.....	73
55. Изохорный процесс.....	74
56. Изотермический процесс.....	75
57. Изобарный процесс.....	75
58. Адиабатический процесс.....	76
59. Круговые, обратимые и не обратимые процессы.....	78
60. Принцип действия тепловой машины.....	79
61. Четырехтактный двигатель внутреннего сгорания.....	80
62. Цикл Карно.....	81
63. Приведенное количество теплоты. Неравенство Клаузиуса.....	84
64. Энтропия. Изменение энтропии в изопроцессах.....	85
65. Закон возрастания энтропии в замкнутых системах.....	86
66. Статистическое толкование энтропии.....	87
67. Второе начало термодинамики.....	89
68. Неравновесные процессы. Среднее число столкновений и средняя длина свободного пробега.....	90
69. Явления переноса.....	92
70. Реальные газы. Уравнение Ван-дер-Ваальса.....	94
71. Изотермы реального газа. Критические состояния.....	95
72. Внутренняя энергия реального газа.....	97
73. Жидкости. Свойства жидкого состояния вещества.....	99
74. Поверхностный слой.....	100
75. Поверхностная энергия. Поверхностное натяжение.....	101
76. Явления на границе жидкости и твердого тела.....	103
77. Давление под искривленной поверхностью жидкости.....	104
78. Капиллярность.....	106
СПИСОК ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ.....	109
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	109