

Лабораторная работа № 4

Определение модуля Юнга твердых тел динамическим методом

Цель работы: Определение модуля Юнга, ознакомление со способом определения модуля Юнга методом стоячих волн.

Краткая теория

Закон Гука. Деформации растяжения и сжатия. Модуль Юнга.

Выясним количественную связь между силами, приложенными к твёрдому телу, и возникающим в нём деформациями. Решение задач подобного рода в теории упругости основано на законе Гука.

Возьмём круглый стержень длиной L , диаметром d и площадью поперечного сечения S . Пусть один конец стержня закреплён, а к другому приложена растягивающая сила F . Величина растягивающей силы F , отнесённая к единице площади S , называется напряжением P

$$P = \frac{F}{S} . \quad (1)$$

Под действием силы \vec{F} длина стержня станет L_2 , следовательно, $\Delta L = L_2 - L_1$. Опытным путём установлено, что чем больше величина F , тем больше величина растяжения стержня.

Закон Гука - основной закон теории упругости, гласит: при малых деформациях величина деформации пропорциональна напряжению.

При больших деформациях закон Гука не выполняется. В образцах возникают остаточные деформации либо разрыв.

Таким образом, если справедлив закон Гука, то

$$\Delta L = kL \frac{F}{S}, \quad (2)$$

где k - коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств материала образца. Принято пользоваться обратной величиной $E = 1/k$.

Тогда

$$\Delta L = \frac{1}{E} L \frac{F}{S}, \quad (3)$$

откуда

$$E = \frac{L}{\Delta L} \cdot \frac{F}{S}. \quad (4)$$

Величина E называется модулем Юнга, модулем продольной упругости. Если при испытаниях на прочность предел упругости не перейдён, то E представляет настоящую величину, определяющую упругие свойства данного материала.

В технике значение модуля Юнга выражают в Па=Н/м², например:
 $E_{стали}= 220$ ГПа; $E_{железа}=207,9$ ГПа ; $E_{меди}=(80 - 125)$ ГПа ;
 $E_{свинца}=18$ ГПа; $E_{дерева}=11$ ГПа.

Динамический метод определения модуля Юнга

Если один конец стержня заставить испытывать периодические сжатия (растяжения) в направлении его длины, в стержне возникнут стоячие продольные волны. Стержень при этом начинает звучать – возникает явление резонанса.

Так как в нашей установке стержень в середине жёстко закреплен, в этой точке смещения отсутствуют, и в ней всегда будет находиться узел скоростей $V_{прод}$.

Максимальные колебания стержня (основной резонанс) наблюдаются при выполнении условия:

$$L = \frac{\lambda}{2}, \quad (5)$$

где L - длина стержня;

λ - длина продольной волны.

При этом на концах стержня будут пучности и смещения (Рис.1).

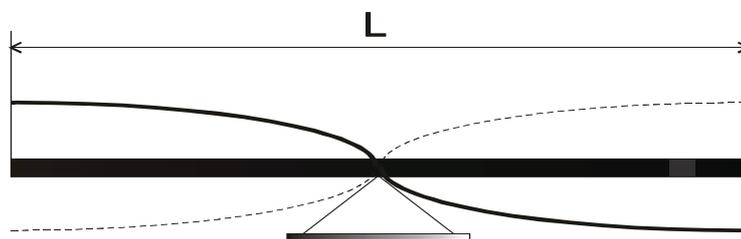


Рис. 1. Схема излучателя колебаний

Так как

$$\lambda = \frac{V_{прод}}{\nu}, \quad (6)$$

где $V_{\text{прод}}$ – скорость продольной волны в стержне,
 ν - частота,
то

$$V_{\text{прод}} = \lambda \cdot \nu = 2L \cdot \nu. \quad (7)$$

Следовательно, для нашего случая необходимо измерить:

1. Длину стержня L .
2. Длину продольной стоячей волны λ .

Скорость $V_{\text{прод}}$ продольной волны в стержне, размер поперечного сечения которого значительно меньше длины волны, определяется формулой:

$$V_{\text{продст}} = \sqrt{\frac{E}{\rho_{\text{ст}}}}, \quad (8)$$

где ρ - плотность материала стержня.

Следовательно, можно записать

$$E = V_{\text{продст}}^2 \cdot \rho_{\text{ст}}. \quad (9)$$

Следует отметить, что значения модуля Юнга, найденные в статическом и динамическом режимах, могут различаться.

Выполнение работы

Приборы и материалы: штатив со стеклянной трубкой, плотно закреплённый в ней медный стержень с поршнем на конце, подвижный поршень на стержне, пробковые опилки, масштабная линейка, кожанка с канифолью.

В нашей работе для определения модуля Юнга используется метод стоячих волн.

Схема установки для наблюдения стоячих продольных звуковых волн приведена на Рис. 2.

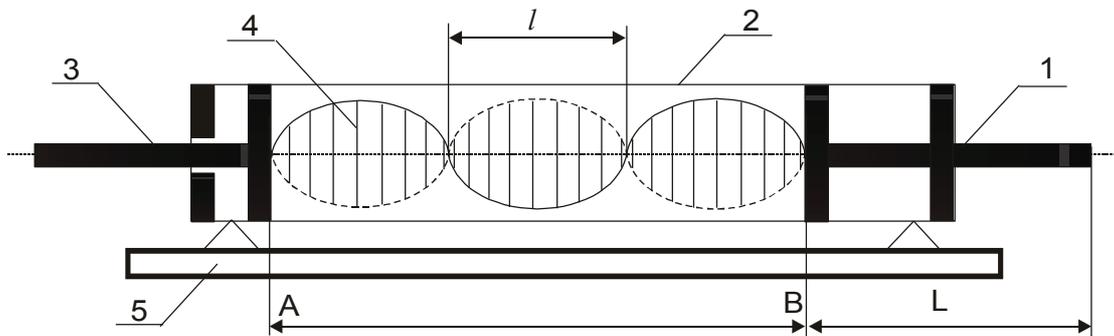


Рис.2. Схема установки:

- 1- медный стержень с поршнем (излучатель);
 - 2- стеклянная трубка;
 - 3- стержень с подвижным поршнем;
 - 4- пробковые опилки;
 - 5- основание установки;
- L - длина исследуемого стержня; l - расстояние между соседними узлами (пучностями)

Расстояние l между соседними узлами (пучностями) равно половине длины волны в воздухе, тогда

$$\lambda_g = 2l. \quad (10)$$

Стоячая волна образуется в промежутке AB , если на его длине укладывается целое число полуволн.

Продольные колебания получают в стержне, проводя по свободной стороне стержня кожей с канифолью. При этом поршень, на другом конце стержня, передаёт колебания столбу воздуха в трубке. При отражении от подвижного поршня волна идёт обратно. Если выполняется выше приведённое условие, в промежутке AB возникает стоячая волна, которую можно наблюдать визуально с помощью распределения в пространстве трубки пробковой крошки.

При возбуждении продольных волн в стержне можно записать

$$\lambda_{cm} = 2L. \quad (11)$$

Скорость звука в воздухе определяется по формуле

$$V_g = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}, \quad (12)$$

где $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1,4$ - показатель адиабаты (для воздуха);

$R = 8,31 \left[\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \right]$ - универсальная газовая постоянная;

$\mu = 0,029 \text{ кг/моль}$ – молярная масса воздуха;

T - абсолютная температура воздуха.

Известно, что при переходе звуковой волны из одной среды в другую, частота сохраняется постоянной

$$v = \frac{V}{\lambda} = \text{const} . \quad (13)$$

Следовательно

$$\frac{\lambda_{ст.}}{\lambda_{возд.}} = \frac{V_{продст.}}{V_{возд.}} . \quad (14)$$

Преобразуем формулу

$$V_{продст.} = \frac{L}{l} \cdot \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}} , \quad (15)$$

используя соотношение, запишем

$$E = V_{продст.}^2 \cdot \rho_{ст.} = \frac{L^2}{l^2} \cdot \frac{\gamma RT}{\mu} \cdot \rho_{ст.} , \quad (16)$$

где $\rho_{ст.} = \rho_{мед.} = 8,9 \cdot 10^3 \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]$.

Порядок выполнения работы

Встряхиванием распределяют равномерным слоем пробковые опилки по длине промежутка AB . Для получения колебаний плавно проводят по свободному концу стержня (от середины к концу) кожанкой с канифолью. При правильном выполнении слышен чистый, высокий звук.

В момент «звучания» стержня перемещают подвижный поршень до образования устойчивых фигур из пробковой крошки.

Далее проводят все необходимые измерения параметров L, l, T .

Измерения проводят не менее трёх раз, занося результаты в таблицу 1.

Результаты измерений

$l, м$	$l, м$	$L, м$	$L, м$	$T, К$	$\Delta T, К$
$\bar{l} =$	$\overline{\Delta l} =$	$\bar{L} =$	$\overline{\Delta L} =$		

Используя средние значения измерённых величин и справочные данные по формуле (16), находим значение модуля Юнга для меди.

Вычисление погрешностей

Относительная погрешность

$$\frac{\overline{\Delta E}}{\bar{E}} = 2 \frac{\overline{\Delta L}}{\bar{L}} + \frac{\overline{\Delta T}}{\bar{T}} + 2 \frac{\overline{\Delta l}}{\bar{l}}. \quad (17)$$

Абсолютная погрешность

$$\overline{\Delta E} = \frac{\overline{\Delta E}}{\bar{E}} \cdot \bar{E}. \quad (18)$$

Окончательный результат

$$E = \bar{E} + \overline{\Delta E}. \quad (19)$$

Сравнивают полученный результат с табличным значением. Записывают выводы.

Контрольные вопросы

1. Что называется напряжением?
2. Сформулируйте закон Гука.
3. Опишите ход работы на лабораторной установке.
4. Что называется длиной волны?
5. Объяснить расчётную формулу для определения значения модуля Юнга.
6. Выразить скорость звука в твёрдых телах через модуль Юнга.
7. Объяснить формулу относительной погрешности.