Лабораторная работа № 5

<u>Определение модуля сдвига по крутильным колебаниям</u>

Целью работы является изучение деформации сдвига и кручения, определение модуля сдвига металлического стержня.

Краткая теория

Модуль упругости E (модуль Юнга), G (модуль сдвига), K (модуль объемной упругости) определяют жесткость материалов, то есть интенсивность увеличения напряжения по мере увеличения упругой деформации.

Механизм упругой деформации металлов состоит в обратимых смещениях атомов из положения равновесия в кристаллической решетке. Величина упругих деформаций в металлах не может быть большой, так как атомы в узлах решетки способны смещаться на небольшую долю межатомных расстояний.

Физический смысл модулей упругости состоит в том, что они характеризуют сопротивляемость металлов упругой деформации, то есть смещению атомов из положения равновесия.

В отсутствии деформации атомы колеблются в узлах решетки у положений равновесия.

Если деформация не совпадает по направлению с напряжением (например при одноосном растяжении возникает трехосная деформация), элементарный закон Гука заменяется обобщенным. Он устанавливает линейную связь между деформацией и напряжением в любых направлениях, то есть между компонентами тензора напряжений и тензора деформаций.

В работе использован один из распространенных методов экспериментального определения модуля сдвига цилиндрического стержня. Этот метод основан на связи, существующей между модулем сдвига, линейными размерами цилиндрического стержня и модулем кручения:

$$f = G\frac{\pi d^4}{32L}, \qquad (1)$$

где f – модуль кручения;

G – модуль сдвига;

d – диаметр стержня;

L – длина стержня.

Рассмотрим кратко механизм деформаций сдвига и кручения.

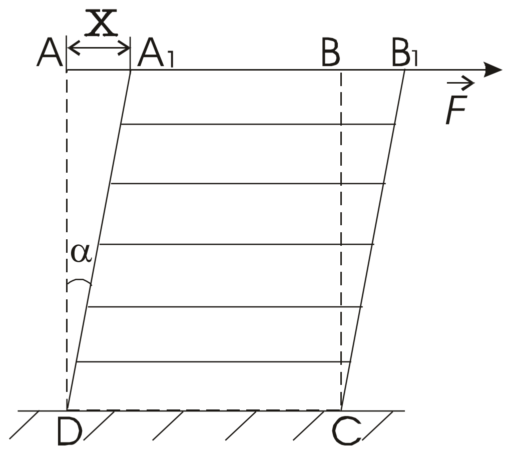

Рис. 1. Схема деформации сдвига

Если к верхнему основанию параллелепипеда *DABC* (Рис. 1), с закрепленным нижним основанием *DC*, приложить силу *F*, к верхнему основанию и направленную по касательной к плоскости *AB*, то произойдет деформация параллелепипеда, называемая сдвигом.

При сдвиге отдельные горизонтальные тонкие слои, на которые мысленно разбивается параллелепипед, смещаются (сдвигаются) относительно друг друга в направлении действия силы. Отрезок AA_1, обозначенный через x, называют абсолютным сдвигом. Отношение $\frac{x}{h}$ называют относительным сдвигом (где h – высота параллелепипеда). Из рис. 1 видно, что $\frac{x}{h} = tg\alpha$; ввиду малости величины относительного сдвига $tg\alpha$ заменяют на величину угла α, который называется углом сдвига. Тогда величина относительного сдвига запишется таким образом: $\frac{x}{h} = \alpha$.

Согласно опыту величина относительного сдвига прямо пропорциональна силе $\vec{F}$ и обратно пропорциональна площади основания S, то есть

$$\alpha = \frac{1}{G} \cdot \frac{F}{S}. \qquad (2)$$

Величина G называется модулем сдвига. Экспериментально модуль сдвига G можно найти, определив модуль кручения f для исследуемого материала.

Деформация кручения стержня (цилиндра) сводится к сдвигам относительно друг друга бесконечно тонких сечений, на которые можно мысленно разбить закручиваемый стержень (Рис.2). Если один конец стержня жестко закрепить, то для закручивания другого конца на угол φ необходимо приложить к нему пару сил F-F с моментом M. По закону Гука можно записать:

$$M = f \cdot \varphi, \tag{3}$$

где f -модуль кручения, численно равный моменту пары сил, закручивающему стержень, деленному на единицу угла.

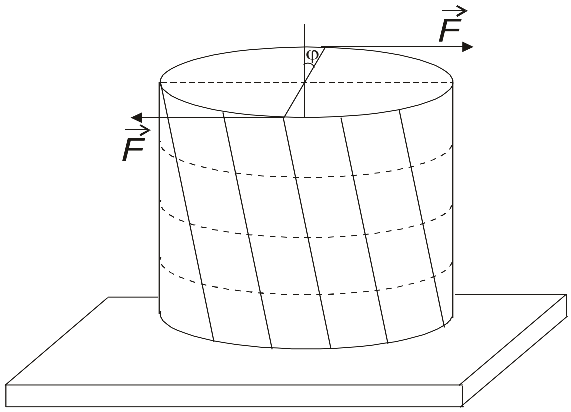

Рис. 2. Схема деформации кручения

Если известен модуль кручения данного материального тела, то используя уравнение (1), можно рассчитать модуль сдвига.

Практически модуль кручения определяется по крутильным колебаниям исследуемого стержня, верхний конец которого жестко закреплен, а нижний соединен с диском, способным совершать крутильные колебания (Рис. 5.3).

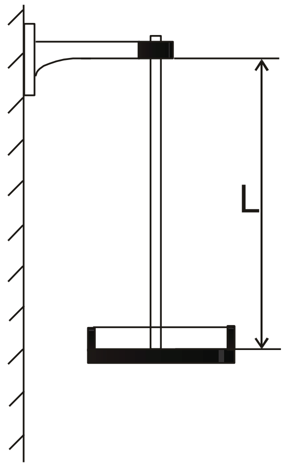

Рис.3. Схема установки

Диск закручивается на некоторый угол φ и отпускается. Освобожденный диск совершает крутильные колебания, период которых, согласно теории, рассчитывается по формуле:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{f}}, \qquad (4)$$

где J - момент инерции диска и стержня.

В данном случае момент инерции вычислить довольно трудно, но можно определить его изменение при нагрузке диска дополнительным грузом-кольцом. Для этого: обозначим через J_1- момент инерции стержня с диском без нагрузки (крутильный маятник), а через $J_2 = (J_1 + mR^2)$ - момент инерции с грузом в виде кольца. Тогда разность $J_2 - J_1 = mR^2$ будет выражать момент инерции кольца (где R - средний радиус кольца, m - масса кольца).

Соответственно периоды колебаний маятника без кольца и с кольцом можно записать в виде:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_1}{f}}, \qquad (5)$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J_2}{f}}, \qquad (6)$$

Возведя в квадрат оба эти выражения и взяв их разность выразим модуль кручения f:

$$f = \frac{4\pi^2 mR^2}{T_2^2 - T_1^2}. \qquad (7)$$

Подставив это выражение в (2.1) получим для модуля сдвига:

$$G = \frac{8\pi \cdot L}{r^4} \cdot \frac{mR^2}{T_2^2 - T_1^2}\ , \qquad (8)$$

где $r = \frac{d}{2}$ - радиус стержня.

Выполнение работы

Приборы и материалы: крутильный маятник, секундомер, микрометр, миллиметровая линейка.

Измерения: миллиметровой линейкой измеряют длину стержня (L) три раза; микрометром измеряют диаметр стержня ($2r$) в трех различных точках; измеряют три раза средний диаметр кольца ($2R$).

При закручивании диска, не нагружая маятник кольцом, приводят его в крутильные колебания, избегая качаний в стороны. Наблюдая за колебаниями маятника, запускают секундомер с отчетом «ноль», при прохождении метки на диске против стойки К. При каждом новом прохождении метки перед стойкой в одну и ту же сторону делают отсчет – 1, 2, 3…до 20. С последним отчетом останавливают секундомер. Определяют период колебаний, деля время всех полных колебаний t_1 на их количество n_1:

$$T_1 = \frac{t_1}{n_1}. \qquad (9)$$

Далее нагружают диск кольцом и тем же способом определяют T_2.

В обоих случаях наблюдения проводят не менее трех раз и рассчитывают средние значения для T_1 и T_2.

Результаты измерений заносят в таблицу 1.

Таблица 1

Результаты измерений

№	L	ΔL	r	Δr	R	ΔR	t_1	Δt_1	t_2	Δt_2	T_1	ΔT_1	T_2	ΔT_2
	см	*см*	*мм*	*мм*	*см*	*см*	*с*	*с*	*с*	*с*	*с*	*с*	*с*	*с*
1														
2														
3														
Сред. знач.														
m=							*Δm=±*							

По полученным данным с использованием формулы (8) рассчитывают величину модуля сдвига.

Вычисление погрешностей

Относительная погрешность:

$$E=\frac{\Delta G}{G}=\frac{\Delta L}{\overline{L}}+\frac{\Delta m}{\overline{m}}+2\frac{\Delta\overline{R}}{\overline{R}}+4\frac{\Delta\overline{r}}{\overline{r}}+2\frac{\overline{T_2}\cdot\Delta\overline{T_2}+\overline{T_1}\cdot\Delta\overline{T_1}}{\overline{T_2^2}-\overline{T_1^2}}, \quad (10)$$

где $\Delta\overline{T_1}=\frac{\Delta\overline{t_1}}{n}$, а $\Delta\overline{T_2}=\frac{\Delta\overline{t_2}}{n}$.

Абсолютная погрешность:

$$\Delta\overline{G}=E\cdot\overline{G}. \quad (11)$$

Окончательный результат:

$$G=\overline{G}\pm\Delta\overline{G}. \quad (12)$$

Сравнивают полученный результат с табличными значениями (табл. 2).

Записывают выводы.

Таблица 2

Константы упругости некоторых чистых металлов при комнатной температуре

металл	E, ГПа	G, ГПа	K, ГПа	ν
железо	217	89	172	0,28
никель	205	78	187	0,31
медь	125	46	142	0,34
алюминий	72	27	75	0,34
титан	108	41	127	0,34
кобальт	204	76	187	0,31
молибден	847	122	280	0,30

ν - коэффициент Пуассона.

$E=2G(1+\nu)$;

$E=3K(1-2\nu)$.

Контрольные вопросы

1. Что называется деформацией тела? Виды деформации.
2. Сформулируйте закон Гука?
3. Что такое модуль сдвига?
4. Какой физический смысл модуля кручения?
5. Когда справедлив закон Гука?