

Лабораторная работа № 2

Определение момента инерции системы тел

Цель работы: экспериментальное определение момента инерции системы тел и сравнение полученного результата с теоретически рассчитанным значением для этой же системы тел.

Краткая теория

При описании вращения твердых тел различной формы пользуются понятием – момент инерции (J).

Моментом инерции системы (тела) относительно данной оси называется скалярная физическая величина, равная сумме произведений масс n материальных точек системы на квадрат расстояний до рассматриваемой оси.

$$J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2, \quad (1)$$

где m_i – масса произвольного i – ого малого объема,

r_i - радиус вращения относительно оси.

В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу: $J = \int r^2 dm$, где интегрирование производится по всему объему тела, величина r в этом случае есть функция положения точки с координатами x, y, z .

Теоретически момент инерции определенных тел правильной геометрической формы (сплошной цилиндр, диск) можно рассчитать по формуле:

$$J = \frac{1}{2} m r^2 \quad (2)$$

Момент инерции (J) системы твердых тел – величина аддитивная, равная сумме моментов инерции отдельных тел ($J_1; J_2; \dots; J_n$) этой системы :

$$J = J_1 + J_2 + \dots + J_n = \sum_{i=1}^n J_n. \quad (3)$$

Воспользовавшись формулой (3), момент инерции для системы тел можно записать в виде :

$$J_{\text{системы}} = J_{\text{диска}} + J_{\text{вала}} + J_{\text{прилива}}, \quad (4)$$

$J_{\text{шкива}}$ в виду малости вклада не учитывается.

Используя формулу (2) получим:

$$J_{\text{системы}} = \frac{1}{2} m_{\text{диска}} r_{\text{диска}}^2 + \frac{1}{2} m_{\text{вала}} r_{\text{вала}}^2 + \frac{1}{2} m_{\text{прилива}} r_{\text{прилива}}^2. \quad (5)$$

Момент инерции можно определить и опытным путем, используя второй закон динамики для вращательного движения. В соответствии с этим законом угловое ускорение (ε), с которым тело вращается вокруг неподвижной оси, прямо пропорционально вращательному моменту сил (M), действующих на тело, и обратно пропорционально моменту инерции тела:

$$\varepsilon = \frac{M}{J}, \quad (6)$$

где ε - угловое ускорение,

J - момент инерции.

M - момент сил, действующих на систему тел.

При постоянном моменте сил ($M = \text{const}$) тело вращается равно переменнo ($\varepsilon = \text{const}$). Измерив величину углового ускорения, можно определить момент инерции системы тел.

$$J = \frac{M}{\varepsilon}. \quad (7)$$

Экспериментальная установка (Рис. 1) состоит из массивного металлического диска A , который крепится на валу B при помощи прилива C . На деревянный шкив K наматывается нить, с закрепленным на ней сменным грузом массой $m_{\text{гр}}$.

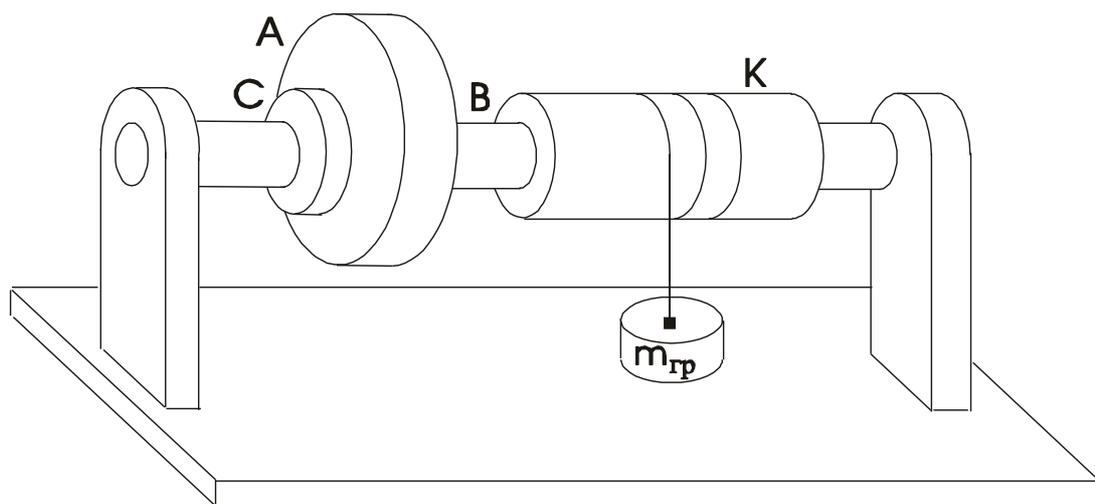


Рис.1. Общий вид установки

По третьему закону Ньютона, реакция нити N по модулю равна силе F , действующей на нить со стороны груза (Рис. 2).

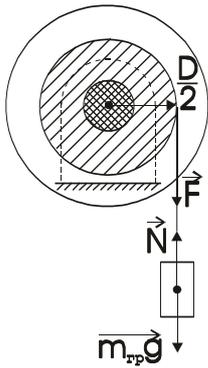


Рис.2
Схема приложения сил

Под действием груза создается момент силы относительно оси вращения:

$$M = F \frac{D}{2}, \quad (8)$$

где F – модуль силы, приложенной посредством нити к шкиву,

D - диаметр деревянного шкива.

Для нахождения силы F рассмотрим движение груза. На груз действуют две силы: сила тяжести ($m_{\text{гр}}g$) и сила реакции нити (N).

Согласно второму закону динамики для поступательного движения, можно записать для данного случая уравнение:

$$m_{\text{гр}}a = m_{\text{гр}}g - N, \quad (9)$$

где a – линейное ускорение движения груза,

g – ускорение свободного падения ($g = 9,81 \text{ м/с}^2$).

Отсюда выразим силу реакции нити:

$$N = m_{\text{гр}}(g - a). \quad (10)$$

Перепишем выражение (8) для момента силы, подставив вместо F выражение для N :

$$M = m_{\text{гр}}(g - a) \frac{D}{2}. \quad (11)$$

Подставив выражение для M (11) в формулу (7) получим выражение для момента инерции:

$$J = \frac{D}{2\varepsilon} m_{\text{гр}}(g - a). \quad (12)$$

Угловое ускорение вращающейся системы, связано с линейным ускорением движения груза вниз, соотношением:

$$\varepsilon = \frac{2a}{D}. \quad (13)$$

Линейное ускорение груза, опускающегося с высоты h можно рассчитать из соотношения:

$$a = \frac{2h}{t^2}. \quad (14)$$

Подставив в формулу (12) для расчета момента инерции соотношение (13) и соотношение (14) получим искомую расчетную формулу для экспериментального определения момента инерции системы тел в окончательном виде:

$$J = \frac{D^2 t^2 m_{\text{гр}}}{8h} \left(g - \frac{2h}{t^2} \right) . \quad (15)$$

Проведя расчеты и сравнив экспериментально и теоретически полученные значения момента инерции системы тел мы сможем написать вывод о проделанной работе.

Выполнение работы

Приборы и материалы: лабораторная установка (Рис. 1), секундомер, штангенциркуль, линейка, набор грузов (1, 2, 3 кг).

Порядок выполнения работы

1. Теоретически рассчитываем момент инерции системы тел. Для этого параметры диска, прилива и вала заносим в таблицу 1. По этим данным рассчитываем моменты инерции отдельных тел, их величины суммируем по формуле (4) и заносим в таблицу 1.

Таблица 1

Данные для теоретического расчета момента инерции системы тел

тело	масса (кг)	диаметр (м)	момент инерции (кг×м ²)	
			отдельных тел	системы тел
Диск	11,00 ± 0,01	0,243 ± 0,001		
Прилив	0,40 ± 0,01			
Вал	0,90 ± 0,01			

2. Экспериментальное определение момента инерции этой же системы тел

Измеряем штангенциркулем диаметр деревянного шкива (Таблица 2).

Прикрепляем конец нити к первому грузу m_1 . Вращая диск наматываем нить на деревянный шкив, поднимая груз на высоту h ,

равную 1,25 м. Высоту подъема измеряем линейкой от пола до нижнего основания груза. Отпускаем груз, предоставляя ему свободно опускаться на нити. Секундомером определяем время падения груза. Опыт повторяем три раза. В таблицу 2 заносим три значения времени падения груза $m_1 = 1$ кг. Из трех значений рассчитываем среднее время, заносим его в таблицу. Опыт повторяем с грузами $m_2 = 2$ кг и $m_3 = 3$ кг, полученные данные заносим в таблицу 2. Используя средние значения времени падения грузов, по формуле (15) рассчитываем три раза (соответственно трем значениям времени падения груза) момент инерции системы тел. Затем находим среднее значение момента инерции. Результаты заносим в таблицу 2. Момент инерции деревянного шкива не учитываем в виду его малости.

Таблица 2

Данные для экспериментального определения момента инерции системы тел

масса груза	Время падения груза t (сек)			$\langle t \rangle$ (сек)	J (кг×м ²)	ΔJ (кг×м ²)
$m_1 = 1$ кг						
$m_2 = 2$ кг						
$m_3 = 3$ кг						
Диаметр деревянного шкива D =				(м)	$\langle J \rangle =$	$\langle \Delta J \rangle =$

Вычисление погрешностей и окончательный результат

Находим абсолютные погрешности ΔJ_1 , ΔJ_2 , ΔJ_3 моментов инерции, вычисленных для трех случаев, по ним определяем среднюю абсолютную погрешность $\langle \Delta J \rangle$.

Относительная погрешность определения момента инерции:

$$E = \frac{\overline{\Delta J}}{\overline{J}} 100\% . \quad (16)$$

Окончательный результат записываем в виде :

$$J = \overline{J} \pm \overline{\Delta J} . \quad (17)$$

Проводим сравнение значений момента инерции системы тел определенных экспериментально и рассчитанных теоретически.

Контрольные вопросы

1. Опишите установку, применяемую в данной работе.
2. Какие силы, приводящие систему в движение, действуют на груз?
3. Сформулируйте основной закон динамики поступательного движения.
4. Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения и поясните физический смысл входящих в этот закон величин.
5. Сделайте вывод расчетной формулы для экспериментального определения момента инерции.
6. Как можно теоретически рассчитать момент инерции?
7. Вывести формулу относительной погрешности определения момента инерции диска при определении ее по формуле:
8. Изменится ли момент инерции системы при увеличении массы подвешиваемых грузов?