

Министерство образования Российской Федерации
Уральская государственная горно-геологическая
академия

О. В. Садырева, Л. Н. Лукашевич, И. А. Келарева, Н. А. Шварте

МЕХАНИКА, МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ ВСЕХ НАПРАВЛЕНИЙ

ЕКАТЕРИНБУРГ

2003

Уральская государственная горно-геологическая академия

ОДОБРЕНО
Методической комиссией
института геологии и геофизики
“ “_____ 2003 г.
Председатель комиссии
_____ проф. В. И. Бондарев

МЕХАНИКА, МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ ВСЕХ НАПРАВЛЕНИЙ

Механика, механические колебания: Учебно-методическое пособие к решению задач по физике для студентов всех направлений / О. В. Садырева, Л. Н. Лукашевич, И. А. Келарева, Н. А. Шварте. Екатеринбург: Изд-во УГГГА, 2003. 59 с.

В пособии приведены примеры решения задач по физике и задачи для самостоятельного решения. Примеры сопровождаются краткими сведениями из областей технической термодинамики, рудничной вентиляции, горной техники и др. Тексты задач взяты из задачников по общему курсу физики, молекулярной физике, горной механике и др. Решение таких задач позволяет студентам научиться применять основные физические законы к самым разнообразным конкретным условиям. Все это способствует не только усвоению курса общей физики, но и знакомству с некоторыми теоретическими познаниями по спецпредметам.

Пособие предназначено для преподавателей кафедры физики и студентов всех направлений. Обозначения величин соответствуют общепринятым.

Методическое пособие рассмотрено на заседании кафедры физики 10 февраля 2003 года (протокол № 4) и рекомендовано для издания в УГГГА.

Рецензент – Е. В. Коророва, ст. преп.

© Садырева О. В., Лукашевич Л. Н.,
Келарева И. А., Шварте Н. А., 2003

© Уральская государственная
горно-геологическая
академия, 2003

СОДЕРЖАНИЕ

	с.
1. КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ	3
<i>Примеры решения задач</i>	3
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	15
2. ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ	18
<i>Примеры решения задач</i>	18
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	27
3. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ	29
<i>Примеры решения задач</i>	29
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	38
4. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ	40
<i>Примеры решения задач</i>	40
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	51
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	57

1. КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Примеры решения задач

1.1

Рассчитать путь, время подъема и ускорение опрокидного скипа на каждом из пяти участков, воспользовавшись пятипериодной диаграммой скорости (рис. 1.1). Глубина ствола шахты 718 м. Построить диаграмму ускорения.

$H = 718 \text{ м}$
$S - ?$
$t - ?$
$a - ?$

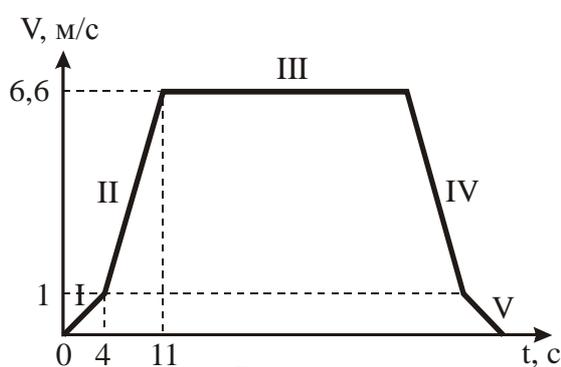


Рис. 1.1

Решение

Из диаграммы скорости $V(t)$ видно, что в течение первых четырех секунд скип движется в разгрузочных кривых с некоторым ускорением a_1 , начальная скорость $V_0 = 0$, конечная скорость движения $V_1 = 1 \text{ м/с}$.

На втором участке скип движется в стволе шахты с большим ускорением a_2 в течение промежутка времени $\Delta t_2 = 7 \text{ с}$.

Через 11 с его движение становится равномерным, происходящим со скоростью 6,6 м/с.

На участках IV и V скип движется равнозамедленно с отрицательными ускорениями a_2 и a_1 .

Определим на каждом участке ускорения и пройденные пути.

Ускорение скипа в разгрузочных кривых

$$a_1 = \frac{V_1 - V_0}{t_1} = \frac{1 - 0}{4} \text{ м/с}^2 = 0,25 \text{ м/с}^2.$$

Длина разгрузочных кривых

$$S_1 = \frac{a_1 \cdot t_1^2}{2} = \frac{0,25 \cdot 16}{2} \text{ м} = 2 \text{ м}.$$

На участке II ускорение скипа

$$a_2 = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1} = \frac{6,6 - 1}{11 - 4} \text{ м/с}^2 = 0,8 \text{ м/с}^2.$$

Перемещение скипа в стволе шахты за промежуток времени Δt_2

$$S_2 = \frac{V_1 + V_2}{2} \cdot \Delta t_2 = \frac{1 + 6,6}{2} \cdot 7 \text{ м} = 27 \text{ м}.$$

Путь равномерного движения

$$S = H - 2(S_1 + S_2) = 718 \text{ м} - 2(2 + 27) \text{ м} = 660 \text{ м}.$$

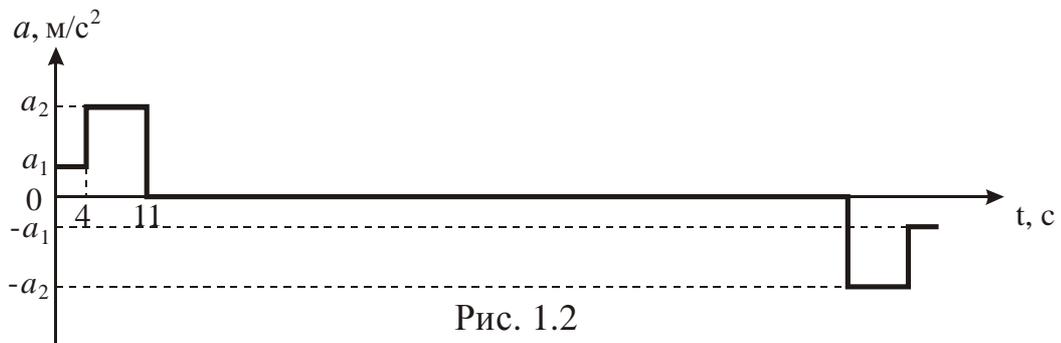
Продолжительность равномерного подъема

$$t = \frac{S}{V_2} = \frac{660}{6,6} \text{ с} = 100 \text{ с}.$$

Общая продолжительность подъема

$$\tau = t + 2(t_1 + t_2) = 100 \text{ с} + 2(4 + 7) \text{ с} = 122 \text{ с}.$$

Строим диаграмму ускорения (рис. 1.2).



При подъеме и спуске людей ускорение не должно превышать $0,75 \text{ м/с}^2$, при подъеме грузов $a = (0,7 \div 1,2) \text{ м/с}^2$.

В случае проходческих подъемов и наличии в стволе нескольких рабочих полков проектируют семи-девятипериодные диаграммы скорости с учетом снижения скорости при прохождении мест расположения полков. На шахтах небольшой глубины движение происходит по двухпериодной диаграмме.

В настоящее время на крупных современных шахтах в качестве основных подъемов используют, как правило, скиповые.

При скиповом подъеме груженные вагонетки, доставленные к околоствольному двору, на поверхность не поднимают, а разгружают в круговом опрокидывателе в бункер, из которого полезное ископаемое загружается в металлический подъемный сосуд – скип. Скипы подвешивают к подъемному канату на раме. Скипы, разгружающиеся путем опрокидывания, крепят к раме шарнирно, а разгружающиеся через дно – жестко.

1.2

Рассчитать скорость движения и полное ускорение шахтного электроваза в момент времени 5 с, если он движется по криволинейному участку радиусом 15 м (рис. 1.3). Закон движения электроваза выражается формулой $S = 800 + 8 t - 0,5 t^2$. Чему равна средняя скорость за первые пять секунд движения?

$$S = 800 + 8 t - 0,5 t^2$$

$$t = 5 \text{ с}$$

$$R = 15 \text{ м}$$

$$V - ?$$

$$a - ?$$

$$\langle V \rangle - ?$$

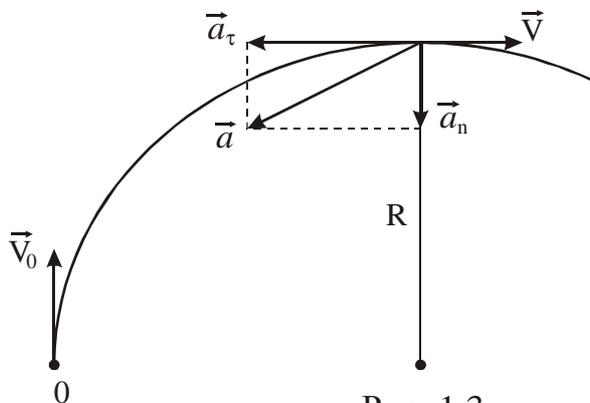


Рис. 1.3

Решение

Запишем кинематическое уравнение в общем виде

$$S = S_0 + V_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}$$

и сравним его с законом движения электровоза. При $t = 0$ $S = S_0 = 800$ м. В момент начала отсчета времени скорость в точке 0 $V_0 = 8$ м/с. Мгновенная скорость $V = \frac{dS}{dt} = 8 - t$, в момент времени $t = 5$ с скорость $V = 3$ м/с.

Путь, пройденный за пять секунд, $S_5 = (800 + 8 \cdot 5 - 0,5 \cdot 25)$ м = 827,5 м.

Средняя скорость за первые пять секунд движения

$$\langle V \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_5 - S_0}{t - 0} = \frac{827,5 - 800}{5 - 0} \text{ м/с} = 5,5 \text{ м/с.}$$

Тангенциальное ускорение, характеризующее изменение скорости за 1 с по величине и направленное по касательной,

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = -1 \text{ м/с}^2 \text{ (движение равнозамедленное).}$$

Нормальное ускорение, характеризующее изменение скорости за 1 с по направлению, направлено к центру кривизны траектории.

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{3^2}{15} \text{ м/с}^2 = 0,6 \text{ м/с}^2.$$

Полное ускорение

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{0,36 + 1} \text{ м/с}^2 \approx 1,2 \text{ м/с}^2.$$

Электровоз – самоходное тяговое средство, приводимое в движение электрическими двигателями. В зависимости от способа получения двигате-

лями энергии различают аккумуляторные, контактные, рудничные электровозы.

Для транспортировки вагонеток с полезными ископаемыми, породой, вспомогательными материалами по главным откаточным выработкам шахт, опасных по газу и пыли, используют аккумуляторные электровозы.

1.3

При взрывном способе добычи руды камень, находящийся на уступе высотой 45 м, получил скорость 100 м/с в горизонтальном направлении (рис. 1.4). Какова дальность полета камня, сколько времени он будет падать, с какой скоростью упадет на землю?

$H = 45 \text{ м}$
$V_0 = 100 \text{ м/с}$
$S_x - ?$
$t - ?$
$V - ?$

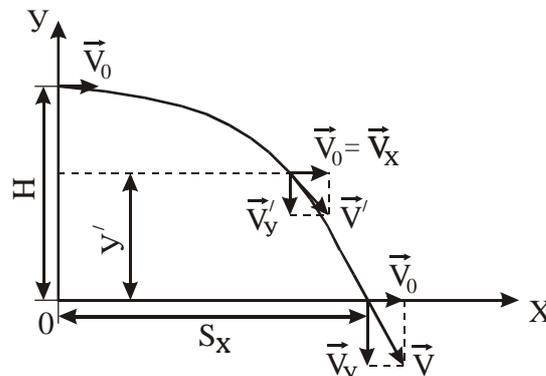


Рис. 1.4

Решение

Начало системы координат XOY (рис. 1.4) расположим на поверхности земли, ось OX – в направлении начальной скорости V_0 , ось OY – вертикально вверх. Движение камня, происходящее по параболе, можно рассматривать как сумму двух независимых движений: равномерное движение со скоростью \vec{V}_0 в горизонтальном направлении и равноускоренное движение без начальной скорости ($V_{0y} = 0$) в вертикальном направлении с ускорением \vec{g} , направленным вниз.

Проекции скорости на оси координат в любой точке траектории

$$V_x = V_0, \quad V_y = -g t,$$

полная скорость

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{V_0^2 + g^2 t^2}.$$

Уравнения движения для координат:

$$X = V_0 t, \quad Y = H - \frac{gt^2}{2}.$$

В момент падения камня на землю $X = S_X$ и

$$t = \frac{X}{V_0} = \frac{S_X}{V_0}.$$

Уравнение траектории (уравнение параболы) имеет вид:

$$Y = H - \frac{gX^2}{2V_0^2}.$$

В момент падения камня $Y = 0$, тогда

$$X = S_X = V_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Выполним расчеты:

$$S_X = 100 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 45}{10}} \text{ м} = 300 \text{ м};$$

$$t = \frac{S_X}{V_0} = \frac{300}{100} \text{ с} = 3 \text{ с};$$

$$V = \sqrt{10^4 + 100 \cdot 9} \text{ м/с} = 104 \text{ м/с}.$$

1.4

По наклонной плоскости АО аппарата для обогащения руды по трению скатываются два куска руды с конечными скоростями 1 и 2 м/с. На каком расстоянии ВС (рис. 1.5) друг от друга упадут эти куски руды, если высота наклонной плоскости 1 м и плоскость образует с горизонтом угол 30° ? Принять $g = 10 \text{ м/с}^2$.

$$V_1 = 1 \text{ м/с}$$

$$V_2 = 2 \text{ м/с}$$

$$H = 1 \text{ м}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$g = 10 \text{ м/с}^2$$

$$\text{BC} - ?$$

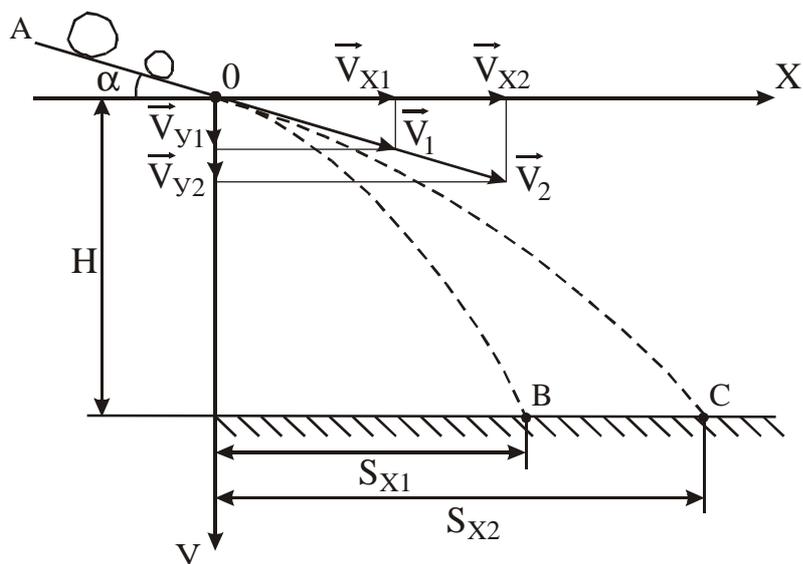


Рис. 1.5

Решение

Выберем систему координат ХОУ с началом в точке 0 (см. рис. 1.5). Движение тела по параболе можно представить как сумму равномерного движения по горизонтали со скоростью \vec{V}_x и равноускоренного движения по вертикали с начальной скоростью \vec{V}_y и ускорением $\vec{a} = \vec{g}$, направленным вниз.

Проекции начальной скорости на оси координат в этом случае для двух тел

$$V_{x1} = V_1 \cos \alpha, \quad V_{y1} = V_1 \sin \alpha,$$

$$V_{x2} = V_2 \cos \alpha, \quad V_{y2} = V_2 \sin \alpha.$$

Уравнения движения тел

по оси Х

$$S_{x1} = V_{x1} \cdot t_1 = V_1 \cdot t_1 \cos \alpha,$$

$$S_{x2} = V_{x2} \cdot t_2 = V_2 \cdot t_2 \cos \alpha;$$

по оси У

$$H = S_{y1} = V_{y1}t_1 + \frac{gt_1^2}{2} = V_1t_1 \sin \alpha + \frac{gt_1^2}{2},$$

$$H = S_{y2} = V_{y2}t_2 + \frac{gt_2^2}{2} = V_2t_2 \sin \alpha + \frac{gt_2^2}{2}.$$

Последние уравнения являются уравнениями парабол.

Подставляя в них числовые значения, получим следующие квадратные уравнения:

$$5 t_1^2 + 0,5 t_1 - 1 = 0, \quad 5 t_2^2 + t_2 - 1 = 0.$$

Решая эти уравнения, находим, что $t_1 = 0,40$ с, $t_2 = 0,36$ с.

Расстояние $BC = S_{x2} - S_{x1} = (V_2 t_2 - V_1 t_1) \cos \alpha.$

$$BC = (2 \cdot 0,36 - 1 \cdot 0,40) \cos 30^\circ \text{ м} = 0,28 \text{ м}.$$

Небольшие куски руды с гладкой поверхностью, имеющие меньший коэффициент трения, будут перемещаться с бóльшей скоростью и, сойдя с наклонной плоскости, отлетят дальше, чем куски с шероховатой поверхностью.

1.5

Определить максимальную дальность полета струи воды, используемой для разрушения горных пород, если напор у выхода насадки гидромонитора $H = 20$ м (рис. 1.6 а). Чему равны при этом наибольшая высота подъема струи и радиус кривизны траектории в точке А (рис. 1.6 б)?

$$H = 20 \text{ м}$$

$$S_X - ?$$

$$h - ?$$

$$R - ?$$

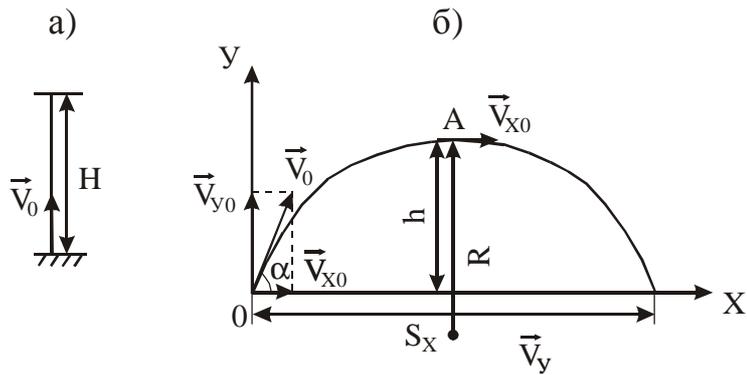


Рис. 1.6

Решение

Напор (наибольшая высота струи воды, направленной вертикально вверх)

$$H = \frac{V_0^2}{2g},$$

где V_0 - начальная скорость струи воды.

Выбираем систему координат XOY. Если начальная скорость направлена под углом α к оси абсцисс, то движение частиц воды, происходящее по параболе, можно рассматривать как сумму двух независимых движений: равномерное по оси X и равнопеременное по оси Y.

Время подъема до верхней точки A

$$t = \frac{V_{y0}}{g} = \frac{V_0 \sin \alpha}{g}.$$

Дальность полета

$$S_X = 2V_{x0} \cdot t = 2V_0 \cos \alpha \cdot \frac{V_0 \sin \alpha}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Для определения экстремума этой функции, берем первую производную S_X по α и приравниваем ее нулю.

$$\frac{dS_X}{d\alpha} = \frac{2V_0^2 \cos 2\alpha}{g} = 0,$$

отсюда $\alpha = 45^\circ$.

Вторая производная

$$\frac{d^2 S_X}{d\alpha^2} = -\frac{4V_0^2}{g} \sin 2\alpha < 0,$$

это говорит о том, что при $\alpha = 45^\circ$ S_X достигает максимума.

В верхней точке траектории векторы ускорения \vec{g} , скорости \vec{V}_{XO} взаимно перпендикулярны и

$$a_n = \frac{V_{XO}^2}{R} = \frac{V_0^2 \cos^2 \alpha}{R} = g.$$

Отсюда радиус кривизны траектории

$$R = \frac{V_0^2 \cos^2 \alpha}{g} = 2H \cos^2 \alpha.$$

Высота подъема струи

$$h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g \frac{V_0^2}{g^2} \sin^2 \alpha = H \sin^2 \alpha.$$

Производим расчеты.

$$R = 2H \cdot \cos^2 45^\circ = H = 20 \text{ м.}$$

$$h = H \cdot \sin^2 45^\circ = 0,5H = 10 \text{ м.}$$

$$S_X = 2H = 40 \text{ м.}$$

Гидромонитор (водомет) – устройство для создания водяных струй и управления их полетом. Впервые гидромонитор был создан и применен на золотых приисках в Сибири в начале XIX века. Но широко начали применять гидромеханизацию в нашей стране в середине XX века.

Гидромонитор используется при гидроотбойке и размыве горной поро-

ды; для разработки россыпей, месторождений угля, песчано-гравийных строительных материалов; при скважинной гидродобыче; в гидротехническом строительстве и др.

1.6

С какой минимальной начальной скоростью и под каким углом к горизонту должен вылетать материал из метательной закладочной машины для того, чтобы обеспечить закладку материала под кровлю на расстояние 5 м и на высоту 1,5 м?

$$S_x = 5 \text{ м}$$

$$h = 1,5 \text{ м}$$

$$V_0 - ?$$

$$\alpha - ?$$

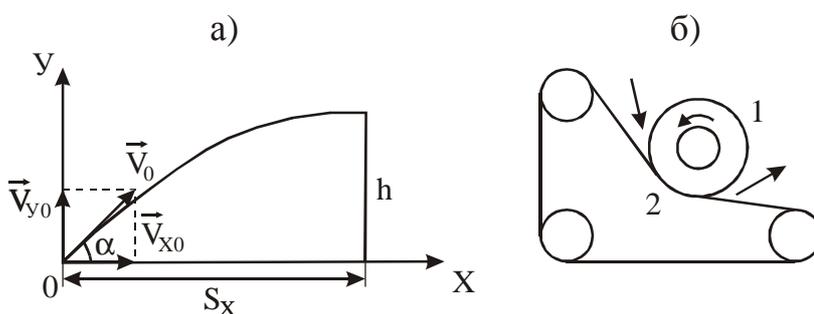


Рис. 1.7

Решение

Движение материала можно представить как сумму двух движений: равномерного со скоростью $V_{x0} = V_0 \cdot \cos \alpha$ в горизонтальном направлении и равнозамедленного с начальной скоростью $V_{y0} = V_0 \cdot \sin \alpha$ в вертикальном направлении (рис. 1.7 а).

В наивысшей точке

$$V_y = V_{y0} - gt = 0,$$

откуда время подъема (на высоту h)

$$t = \frac{V_{y0}}{g} = \frac{V_0 \sin \alpha}{g}.$$

Расстояние

$$S_X = V_{X0} \cdot t = V_0 \cos \alpha \cdot \frac{V_0 \sin \alpha}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{2g}.$$

Отсюда

$$V_0 = \sqrt{\frac{2g S_X}{\sin 2\alpha}}.$$

Высота подъема

$$h = \frac{gt^2}{2} = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Для определения α составим отношение

$$\frac{h}{S_X} = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha \cdot 2g}{2gV_0^2 \cdot 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{2\cos \alpha},$$

откуда находим, что

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{2h}{S_X} = \frac{2 \cdot 1,5}{5} = 0,6, & \alpha &= 31^\circ. \\ V_0 &= \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 5}{\sin 62^\circ}} \text{ м/с} \approx 10 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Начальную скорость выброса необходимо знать для выбора типа закладочной машины. Метательные машины забрасывают песок, пустую породу в выработанное пространство со значительной скоростью, обеспечивающей уплотнение массива.

Закладочный материал, ссыпaeмый на бесконечную ленту (рис. 1.7 б), проходит между ребордами отжимного барабана 1, имеющего форму катушки, прижимается к ленте на изогнутой ее части 2, в результате чего приобретает скорость движения ленты.

Задачи для самостоятельного решения

1. Расстояние между двумя станциями метрополитена 1,5 км. Первую половину этого расстояния поезд проходит равноускоренно, вторую - равнозамедленно с тем же по модулю ускорением. Максимальная скорость поезда 50 км/ч. Найти ускорение и время движения поезда между станциями.

/0,13 м/с²; 3,6 мин/

2. На станции метро скорость движения эскалатора 0,8 м/с. Определить вертикальную и горизонтальную составляющие скорости и глубину заложения туннеля метро, если угол наклона лестницы 30°, а время, за которое стоящий на лестнице человек поднимается вверх, равно 2,5 мин.

/0,40 м/с; 0,69 м/с; 60 м/

3. Шахтная клеть поднимается со скоростью 12 м/с. После выключения двигателя, двигаясь с отрицательным ускорением 1,2 м/с², останавливается у верхней приемной площадки. На каком расстоянии от нее находилась клеть в момент выключения двигателя и сколько времени двигалась до остановки?

/60 м; 10 с/

4. У подъемной клетки, движущейся вверх со скоростью 10 м/с, происходит обрыв каната. Где окажется клеть, если срабатывание улавливающего парашюта наступает через 2 с после обрыва?

/на том же месте, где была в момент обрыва каната/

5. С башни высотой 30 м в горизонтальном направлении брошено тело с начальной скоростью 10 м/с. Определить уравнение траектории тела, скорость тела в момент падения.

/y(x) = g x² / 2V₀²; 26 м/с/

6. Материальная точка движется вдоль прямой так, что ее ускорение линейно растет и за первые 10 с достигает 5 м/с². Определить в конце десятой секунды скорость точки и пройденный путь.

/25 м/с; 83 м/

7. Тело падает с высоты 19,6 м с начальной скоростью, равной нулю. Какой путь пройдет тело за первую и последнюю 0,1 с своего движения?

/0,049 м; 1,9 м/

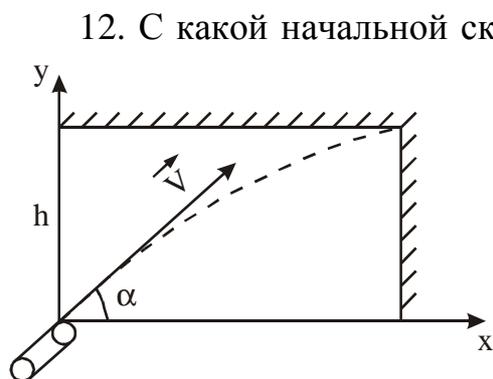
8. Для добывания руды открытым способом произвели взрыв породы. Подъем кусков породы, выброшенных вертикально вверх, длился 5 с. Определить их начальную скорость и высоту подъема. /49 м/с; 122 м/

9. Из шпура, расположенного на высоте 1,4 м, при взрыве в горизонтальном направлении вылетает камень со скоростью 50 м/с. Какова дальность полета камня и скорость в момент удара о землю?

/27 м; 50,3 м/с/

10. При взрыве серии скважин камень, находящийся на уступе высотой 45 м, получил скорость 100 м/с в горизонтальном направлении. Какова дальность полета камня, сколько времени он будет падать, с какой скоростью упадет на землю? /300 м; 3 с; 104 м/с/

11. Метательная машина установлена так, что сообщает закладочному материалу при вылете скорость 12 м/с под углом 30° к горизонту. Определить дальность и максимальную высоту полета. /12,7 м; 1,83 м/



12. С какой начальной скоростью и под каким углом к горизонту должен вылетать материал из метательной закладочной машины для того, чтобы обеспечить его закладку под кровлю на расстояние 5 м и на высоту 1,5 м?

/10,8 м/с; 31° /

13. Зависимость пройденного телом пути S от времени t дается уравнением $S = A + B t + C t^2 + D t^3$, где $C = 0,14 \text{ м/с}^2$ и $D = 0,01 \text{ м/с}^3$. Через какое время после начала движения тело будет иметь ускорение 1 м/с^2 ? Найти среднее ускорение тела за этот промежуток времени. /12 с; $0,64 \text{ м/с}^2$ /

14. Рассчитать скорость движения и полное ускорение шахтного электровагона в момент времени 5 с, если он движется по криволинейному участку радиусом 15 м. Закон движения электровагона выражается формулой $S = 800 + 8 t - 0,5 t^2$, м. /3 м/с; $1,2 \text{ м/с}^2$ /

15. Во сколько раз тангенциальное ускорение точки, лежащей на ободу вращающегося колеса, больше ее нормального ускорения для того момента времени, когда вектор полного ускорения этой точки составляет угол 30° с вектором ее линейной скорости? /1,7/

16. Груз поднимают лебедкой. Сначала 2 с груз движется с ускорением $0,50 \text{ м/с}^2$, затем 11 с равномерно и 2 с равнозамедленно с отрицательным ускорением $0,50 \text{ м/с}^2$. На какую высоту был поднят груз? Постройте графики скорости и ускорения в зависимости от времени. /13 м/



скорости, построенному для парового подъема шахтной клетки, которая на участке I движется с ускорением $0,38 \text{ м/с}^2$. Построить график ускорения.

/13,3 м/с; 300м/



скорости, если высота подъема 345 м, наибольшая скорость подъема $7,3 \text{ м/с}$, ускорения на участках I и III одинаковы по модулю и равны $0,7 \text{ м/с}^2$. Построить график ускорения.

/58 с/

19. Определить продолжительность равномерного движения подъемных сосудов с помощью диаграммы (см. рис. к задаче 18), если высота подъема 440 м, максимальная скорость $9,1 \text{ м/с}$, ускорение $0,75 \text{ м/с}^2$ на участке I, а на участке III равно $-0,7 \text{ м/с}^2$. Построить график ускорения. /36 с/

20. Определить пути движения подъемных сосудов по трехпериодной диаграмме скорости (см. рис. к задаче 18), если высота подъема 420 м, наибольшая скорость 8 м/с , ускорение $0,7 \text{ м/с}^2$ на участке I, а на участке III равно $-0,8 \text{ м/с}^2$. /46 м; 334 м; 40 м/

2. ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Примеры решения задач

2.1

С какой силой будет давить на дно шахтной клетки вагонетка массой 5000 кг, если клеть а) движется равномерно, б) поднимается с ускорением 1 м/с^2 , в) опускается с тем же ускорением? Принять $g = 10 \text{ м/с}^2$.

$$m = 5000 \text{ кг}$$

$$a = 1 \text{ м/с}^2$$

$$g = 10 \text{ м/с}^2$$

$$F_1 - ?$$

$$F_2 - ?$$

$$F_3 - ?$$

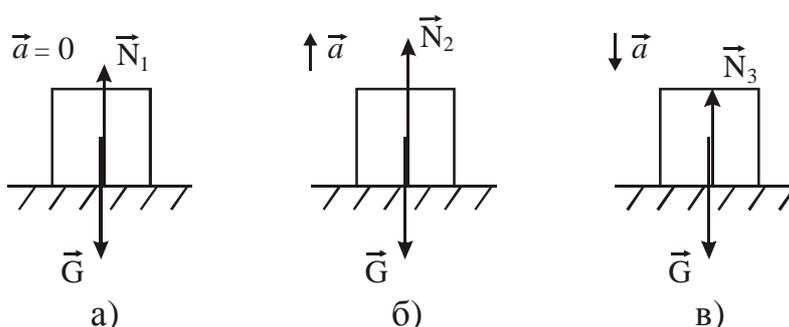


Рис. 2.1

Решение

На вагонетку действуют сила тяжести \vec{G} и сила реакции опоры \vec{N} . По второму закону Ньютона равнодействующая этих сил равна $m\vec{a}$.

а) При равномерном движении или при неподвижной клетке $\vec{a} = 0$.

$$\vec{N}_1 + \vec{G} = 0, \quad \vec{F}_1 = -\vec{N}_1 = \vec{G};$$

$$F_1 = G = mg = 5 \cdot 10^3 \cdot 10 \text{ Н} = 50 \text{ кН}.$$

$$\text{б) } \vec{N}_2 + \vec{G} = m\vec{a}, \quad N_2 - G = ma, \quad N_2 = G + ma = m(g + a)$$

$$\vec{F}_2 = -\vec{N}_2; \quad F_2 = N_2 = 5 \cdot 10^3 (10 + 1) = 55 \cdot 10^3 \text{ Н} = 55 \text{ кН}$$

$$\text{в) } \vec{N}_3 + \vec{G} = m\vec{a}, \quad G - N_3 = ma, \quad N_3 = G - ma = m(g - a)$$

$$\vec{F}_3 = -\vec{N}_3; \quad F_3 = N_3 = 5 \cdot 10^3 (10 - 1) = 45 \cdot 10^3 \text{ Н} = 45 \text{ кН}$$

Все силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ направлены вертикально вниз.

Итак, сила давления может быть больше, меньше и равна G .

2.2

Определить силу тяги, которую развивает лебедка при подъеме отвальных скипов - вагонеток с ускорением 1 м/с^2 , если коэффициент трения $0,02$, угол наклона железнодорожного полотна, проложенного по террикону, 30° . Масса вагонеток $2,5 \cdot 10^3 \text{ кг}$. Принять $g = 10 \text{ м/с}^2$.

$$a = 1 \text{ м/с}^2$$

$$k = 0,02$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$m = 2,5 \cdot 10^3 \text{ кг}$$

$$F_T - ?$$

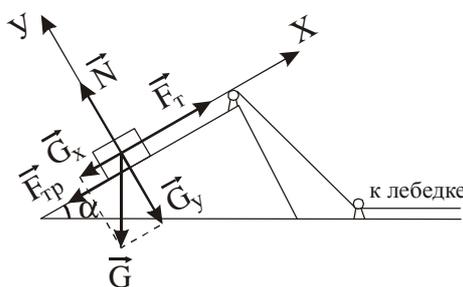


Рис. 2.2

Решение

По второму закону Ньютона

$$\vec{F}_T + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} = m\vec{a},$$

где \vec{F}_T - сила тяги, \vec{G} - сила тяжести, \vec{N} - сила реакции опоры, $\vec{F}_{\text{тр}}$ - сила трения (рис. 2.2).

Сумма проекций этих сил на ось X

$$F_T - mg \cdot \sin \alpha - k \cdot mg \cdot \cos \alpha = ma.$$

Отсюда

$$F_T = m (g \cdot \sin \alpha + k \cdot g \cdot \cos \alpha + a)$$

$$F_T = 2,5 \cdot 10^3 \cdot (10 \cdot 0,5 + 0,02 \cdot 10 \cdot 0,86 + 1) \text{ Н} = 15,4 \text{ кН}.$$

В породные отвалы вывозят породу, выдаваемую на поверхность в

процессе проведения и ремонта подземных выработок, и породу, поступающую с обогатительных фабрик. Порода от породного бункера в надшахтном здании до ствола перемещается в специальных вагонетках с опрокидным кузовом по рельсовым путям.

Лебедки перемещают грузы с помощью цепей и канатов. Простейшие лебедки использовались для подъема и перемещения грузов еще в глубокой древности. Они применялись при строительстве пирамид, разработке месторождений в Древнем Китае и Древнем Египте; в России – с XI века при добыче соляных растворов. В XIV-XV веках лебедки использовались на водоотливе, рудных промыслах, строительных работах.

2.3

Кусок руды начинает скользить со скоростью V_0 по желобу АВ. Определить длину l_1 этого желоба, если скорость подхода куска к точке В в три раза больше начальной, угол наклона желоба α_1 . Найти угол наклона α_2 второго желоба ВС, при котором кусок руды скользит по нему равномерно. Коэффициент трения скольжения k .

$$V_B = 3 V_0$$

$$V_A = V_0$$

$$\alpha_1$$

$$k$$

$$l_1 - ?$$

$$\alpha_2 - ?$$

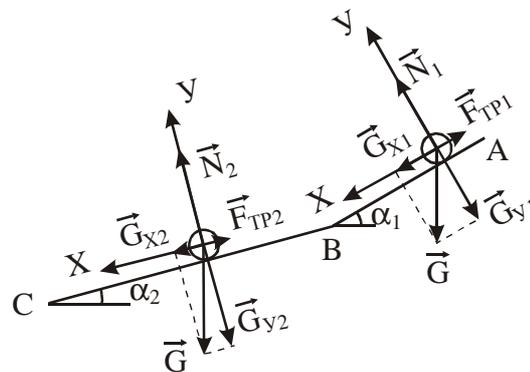


Рис. 2.3

Решение

Изобразим на чертеже силы, действующие на тело: силу тяжести \vec{G} , реакцию опоры \vec{N}_1 , силу трения $\vec{F}_{тр1}$ (рис. 2.3). Выбираем оси координат: ось X – в направлении движения, ось Y – в направлении, перпендикулярном первой оси.

По II закону Ньютона

$$\vec{G} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{\text{тр1}} = m\vec{a}_1.$$

Сумма проекций этих сил на ось Y

$$- G \cdot \cos \alpha_1 + N_1 = 0,$$

а сумма проекций на ось X

$$G \cdot \sin \alpha_1 - k \cdot mg \cdot \cos \alpha_1 = ma_1.$$

Отсюда

$$a_1 = g (\sin \alpha_1 - k \cdot \cos \alpha_1).$$

Длину желоба АВ находим как путь, пройденный телом при равноускоренном движении.

$$l_1 = \frac{V_B^2 - V_A^2}{2a_1} = \frac{9V_0^2 - V_0^2}{2g(\sin \alpha_1 - k \cdot \cos \alpha_1)} = \frac{4V_0^2}{g(\sin \alpha_1 - k \cdot \cos \alpha_1)}.$$

При движении по желобу ВС ускорение $a_2 = 0$.

$$\sin \alpha_2 = k \cdot \cos \alpha_2, \quad \text{tg } \alpha_2 = k, \quad \alpha_2 = \text{arctg } k.$$

Угол α_2 называется углом равновесия.

2.4

Определить угол наклона рудоспуска высотой 45 м, если скорость движения кусков руды уменьшается от 2,5 м/с до 1 м/с (рис. 2.4). Коэффициент трения руды по дереву 0,9.

$h = 45 \text{ м}$
 $V_0 = 2,5 \text{ м/с}$
 $V_K = 1 \text{ м/с}$
 $k = 0,9$

 $\alpha - ?$

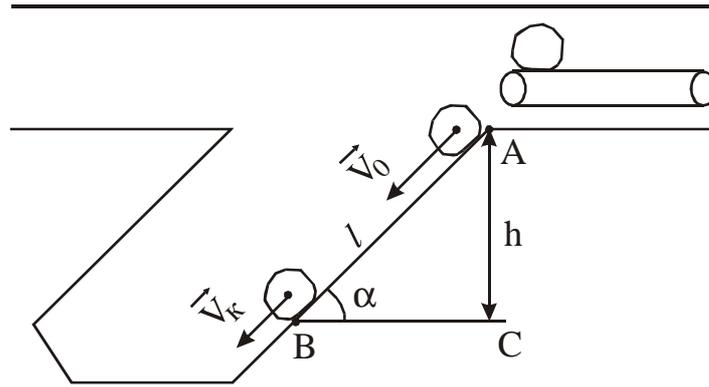


Рис. 2.4

Решение

Запишем закон сохранения механической энергии в виде

$$\Delta W_K + \Delta W_{\Pi} \neq 0.$$

Знак неравенства обусловлен действием в системе неконсервативной силы – силы трения.

При движении по рудоспуску АВ куска руды массой m изменение кинетической энергии

$$\Delta W_K = \frac{mV_K^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2},$$

изменение потенциальной энергии

$$\Delta W_{\Pi} = - mgh.$$

Работа силы трения

$$A = -F_{\text{тр}} \cdot l = -kmg l \cdot \cos \alpha = -\frac{k m g h \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Суммарное изменение механической энергии равно работе неконсервативных сил.

$$\frac{mV_K^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} - mgh = -\frac{kmgh}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2kgh}{2gh + V_0^2 - V_K^2} = \frac{2 \cdot 0,9 \cdot 10 \cdot 45}{2 \cdot 10 \cdot 45 + 6,25 - 1} = 0,853, \quad \alpha = 40^\circ 30'.$$

Рудоспуск – подземная горная выработка, предназначенная для перемещения руды под собственным весом из рабочей зоны горнодобывающего предприятия на транспортный горизонт. Применяется на рудных шахтах, карьерах, а также при разработке месторождений полезных ископаемых открытым и подземным способами.

Гравитационный (самотечный) способ применяют при спуске закладочного материала в шахту на небольшую глубину (до 250 ÷ 450 м). В этом случае по вертикальным стволам или шурфам прокладывают трубы. Для гравитационного спуска закладочного материала по скатам угол наклона их должен быть не менее 40 ÷ 45°.

2.5

При испытании на наклонной горке, имеющей высоту 0,3 м и основание 4 м, вагонетка до остановки прошла 28 м по горизонтальному участку пути. Определить величину коэффициента сопротивления движению вагонетки.

$$h = 0,3 \text{ м}$$

$$l_1 = 4 \text{ м}$$

$$l_2 = 28 \text{ м}$$

$$k - ?$$

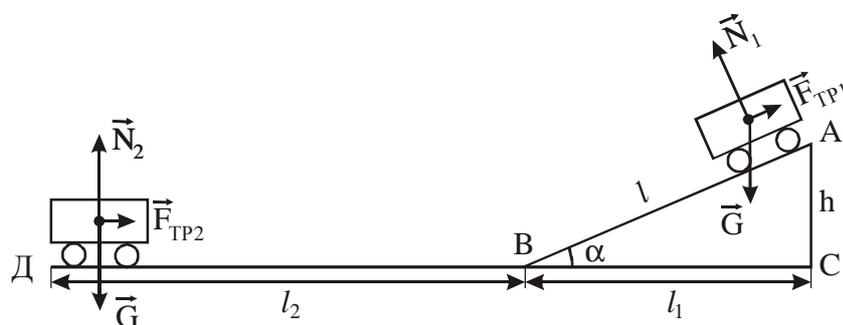


Рис. 2.5

Решение

В исходной точке А движения запас полной механической энергии ва-

гонетки относительно уровня ВС (рис. 2.5)

$$W_A = W_A^K + W_A^\Pi = mgh = Gh.$$

В конечной точке движения

$$W_D = W_D^K + W_D^\Pi = 0.$$

Изменение полной механической энергии вагонетки

$$\Delta W = W_D - W_A = -Gh$$

(знак минус указывает на то, что энергия вагонетки уменьшилась).

За счет этого изменения энергии совершена работа против сил трения на участках l и l_2 .

$$\Delta W = -(F_{\text{ТР1}} \cdot l + F_{\text{ТР2}} \cdot l_2) = -(kG l \cdot \cos \alpha + kG l_2).$$

Следовательно,

$$-Gh = -(kG l \cdot \cos \alpha + kG l_2),$$

или

$$h = k (l \cdot \cos \alpha + l_2) = k (l_1 + l_2).$$

Отсюда коэффициент сопротивления движению

$$k = \frac{h}{l_1 + l_2} = \frac{0,3}{28 + 4} = 0,009.$$

Коэффициент k является показателем ходовых качеств вагонеток. Для опытной проверки на шахтах устанавливают испытательные горки, через которые периодически самокатом пропускают все вагонетки. Вагонетки, не дошедшие до определенной отметки, отводятся в сторону для замены подшипников и ремонта. Коэффициент сопротивления груженых вагонеток имеет значения $0,005 \div 0,007$, а порожних – $0,006 \div 0,009$.

2.6

Определить удельную работу взрыва тротила при испытании его на работоспособность с помощью баллистического маятника по следующим данным: длина подвеса маятника 1 м, масса 200 кг, при вылете снаряда массой 16 кг маятник отклоняется на угол 60° , масса заряда тротила 10 г.

$$m_1 = 200 \text{ кг}$$

$$m_2 = 16 \text{ кг}$$

$$m = 0,01 \text{ кг}$$

$$l = 1 \text{ м}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$A_0 - ?$$

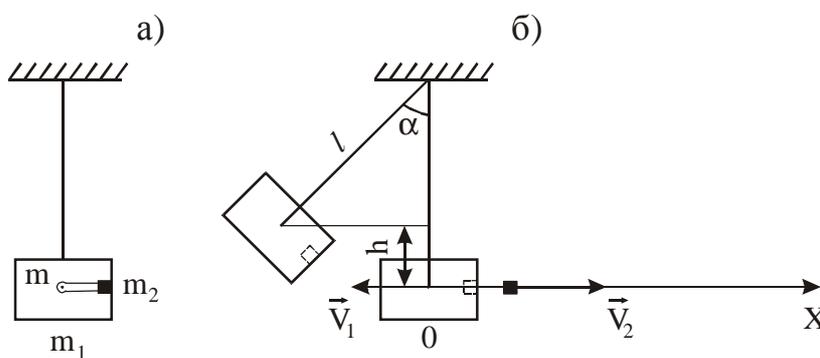


Рис. 2.6

Решение

Удельной работой взрыва A_0 называется величина, численно равная энергии, которая выделяется при взрыве единицы массы ВВ (взрывчатого вещества).

Внутри маятника (рис. 2.6 а) имеется стальная камера с зарядом ВВ, закрытая снарядом. Работа взрыва расходуется на сообщение кинетической энергии маятнику и снаряду.

Систему "снаряд-маятник" считаем замкнутой в момент взрыва, так как на нее извне не действуют другие тела. Для такой системы выполняется закон сохранения импульса: в замкнутой системе векторная сумма импульсов всех тел с течением времени не меняется, в данном случае равна нулю.

$$m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = 0.$$

Спроектировав импульсы на ось X, получим

$$- m_1 V_1 + m_2 V_2 = 0,$$

откуда скорость вылета снаряда

$$V_2 = \frac{m_1 V_1}{m_2}.$$

Скорость движения маятника V_1 в положении 0 (рис. 2.6 б) определим, пользуясь законом сохранения и превращения энергии. Уровень начала отсчета потенциальной энергии выберем проходящим через точку 0.

Если пренебречь трением, то кинетическая энергия в положении 0 будет равна потенциальной энергии в положении С.

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} = m_1 g h,$$

где

$$h = l (1 - \cos \alpha).$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} V_1^2 &= 2gl(1 - \cos \alpha), & V_2^2 &= \frac{m_1^2 V_1^2}{m_2^2}, & W &= \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} = \\ &= m_1 g l (1 - \cos \alpha) + m_1 \cdot \frac{m_1}{m_2} g l (1 - \cos \alpha) &= m_1 g l (1 - \cos \alpha) \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right), \end{aligned}$$

получаем расчетную формулу для удельной работы взрыва

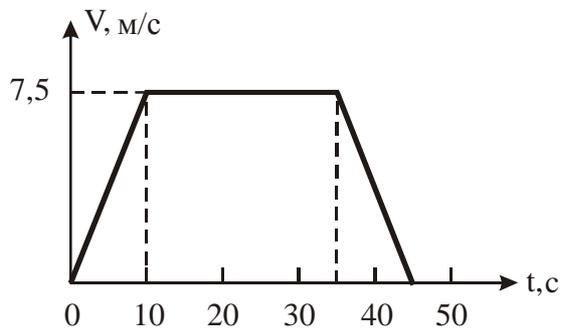
$$A_0 = \frac{W}{m} = \frac{m_1 g l (1 - \cos \alpha)}{m} \cdot \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right).$$

Произведем вычисления.

$$A_0 = \frac{200 \cdot 10 \cdot 0,5}{0,01} \left(1 + \frac{200}{16} \right) \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} = 1,35 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$$

Задачи для самостоятельного решения

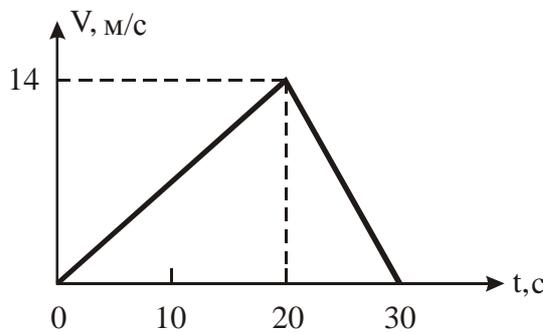
21. При электрическом подъеме шахтной клетки график скорости имеет



вид, изображенный на рисунке. Масса клетки равна 4000 кг. Определить натяжение каната в течение трех промежутков времени: от 0 до 10 с, от 10 с до 35 с, от 35 с до 45 с.

/ 42 кН; 39 кН; 36 кН /

22. При паровом подъеме шахтной клетки график скорости имеет вид,



изображенный на рисунке. Масса клетки 3000 кг. Определить натяжение каната, к которому подвешена клеть, в течение двух промежутков времени: от 0 до 20 с, от 20 до 30 с.

/32 кН; 25 кН/

23. Под действием постоянной силы 118 Н вагонетка приобрела скорость 2 м/с, пройдя путь 10 м. Определить силу трения и коэффициент трения, если масса вагонетки 400 кг.

/0,01; 38 Н/

24. В шахте опускается равноускоренно лифт массой 280 кг, в первые 10 с он проходит 35 м. Найти натяжение каната, на котором висит лифт.

/ 2,55 кН/

25. Из шахты поднимают с помощью подъемника 112 кг угля. Сила давления угля на подъемник во время движения 1,25 кН. Найти ускорение подъемника.

/1,36 м/с²/

26. На горизонтальной платформе шахтной клетки находится груз 60 кг. Определить силу давления груза на платформу: при равномерном подъеме и спуске, при подъеме и спуске с ускорением 3 м/с², при спуске с ускорением 9,8 м/с².

/590 Н; 770 Н; 410 Н; 0/.

27. Тело скользит по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол 45° . Пройдя путь 36,4 см, тело приобретает скорость 2 м/с. Найти коэффициент трения тела о плоскость. /0,2/

28. Найти работу, которую надо совершить, чтобы увеличить скорость движения тела массой 1 кг от 2 м/с до 6 м/с на пути 10 м. На всем пути действует сила трения 2 Н. /36 Дж/

29. Найти закон движения (зависимость пройденного расстояния от времени) куска антрацита при скольжении его с нулевой начальной скоростью по стальному желобу с углом наклона 30° . Коэффициент трения 0,3. /S = 1,18 t² (м)/

30. Скорость движения угля по стальному желобу уменьшается от 2 м/с до 1 м/с. Вертикальная проекция пути скольжения 3 м, коэффициент трения 0,3. Вычислить угол наклона желоба. /16°/

31. Рудничный поезд массой 450 т движется со скоростью 30 км/ч, развивая мощность 150 л. с. (1 л. с. = 736 Вт). Определить коэффициент трения. /0,003/

32. Электровоз на карьере, работая с постоянной мощностью, ведет поезд массой $2 \cdot 10^5$ кг вверх по уклону 1/50 со скоростью 12 км/ч, а по уклону 1/100 со скоростью 18 км/ч. Определить силу трения, считая ее постоянной. /19,6 кН/

33. Поезд массой 500 т после прекращения тяги паровоза под действием силы трения 98 кН останавливается через время 1 мин. С какой скоростью шел поезд? /11,8 м/с/

34. Определить силу тяги, которую развивает лебедка при подъеме вагонетки массой 2 т с ускорением $0,5 \text{ м/с}^2$, если коэффициент трения 0,03, а угол наклона железнодорожного полотна 30° . /11,3 кН/

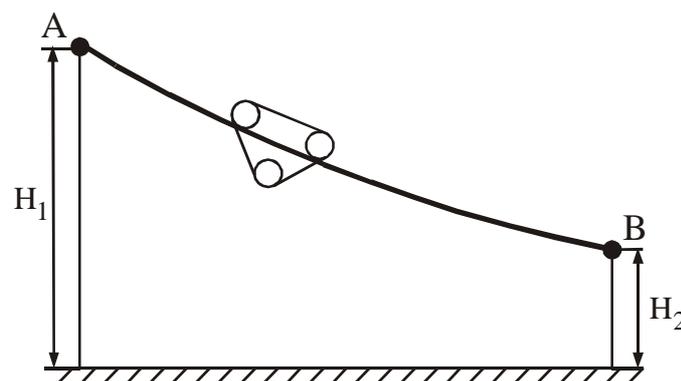
35. При испытании на наклонной горке, имеющей длину 4 м, с уклоном 0,08 вагонетка до остановки прошла по горизонтали 28 м. Найти коэффициент сопротивления движению вагонетки. /0,01/

36. Вагонетка скатывается по наклонной горке длиной 5 м. Определить путь, проходимый вагонеткой по горизонтали до остановки, и наибольшую скорость движения, если коэффициент сопротивления 0,0095. Угол наклона 5° . /41 м; 2,8 м/с/

37. Чему равен коэффициент сопротивления движению вагонетки, если при испытании на наклонной горке, имеющей уклон 0,1 и длину 10 м, вагонетка, перейдя на горизонтальный участок, прошла до остановки путь 190 м? /0,005/

38. Вагонетка в выработке движется со скоростью 26 км/ч. Сила торможения составляет половину силы тяжести. Какой путь пройдет вагонетка от начала торможения до полной остановки? /5,3 м/

39. Вагонетка подвесной канатной дороги скатывается из положения А без начальной скорости. Определить, пренебрегая сопротивлениями, с какой скоростью она пройдет положение В, если $H_1 = 14$ м, а $H_2 = 4$ м. /14 м/с/



40. Человек массой 64 кг со скоростью 5,4 км/ч движется навстречу тележке массой 32 кг, скорость которой 1,8 км/ч. Человек прыгает на тележку. С какой скоростью они будут двигаться? /3 км/ч/

3. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Примеры решения задач

3.1

При постепенном выведении реостата угловая скорость ротора двигателя шахтного электровоза (рис. 3.1) увеличивается за 2 с от $10\pi \text{ с}^{-1}$ до $16\pi \text{ с}^{-1}$.

Сколько оборотов совершает ротор за это время? Чему равно угловое ускорение? Записать закон вращения ротора.

$$t = 2 \text{ с}$$

$$\omega_0 = 10\pi \text{ с}^{-1}$$

$$\omega_K = 16\pi \text{ с}^{-1}$$

$$N, \varepsilon, \varphi(t) - ?$$

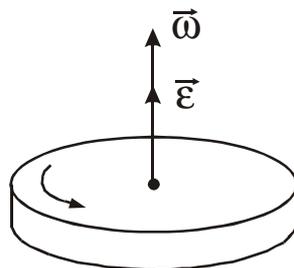


Рис. 3.1

Решение

Направление угловой скорости определяется по правилу буравчика. Вектор углового ускорения совпадает по направлению с вектором угловой скорости при ускоренном вращении.

Угловое ускорение ротора

$$\varepsilon = \frac{\omega_K - \omega_0}{t} = \frac{16\pi - 10\pi}{2} \text{ с}^{-2} = 3\pi \text{ с}^{-2}.$$

Запишем закон вращения в общем виде

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

и для данной задачи

$$\varphi = 10\pi t + 1,5\pi t^2.$$

За 2 с угловой путь

$$\varphi = 10\pi \cdot 2 + 1,5\pi \cdot 4 = 26\pi.$$

Число оборотов

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{26\pi}{2\pi} = 13.$$

Число оборотов можно было найти иначе.

$$N = \bar{n} \cdot t = \frac{\bar{\omega}}{2\pi} \cdot t = \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega_0 + \omega_K}{2\pi} \cdot t,$$

где \bar{n} - средняя частота вращения.

$$N = \frac{26\pi \cdot 2}{2 \cdot 2\pi} = 13.$$

3.2

Шахтный вентилятор совершал 900 об/мин. После выключения, вращаясь равнозамедленно, он сделал до остановки 75 оборотов. Работа сил торможения 45 Дж. Найти момент сил торможения и момент инерции вентилятора.

$$n_1 = 900 \text{ мин}^{-1} = 15 \text{ с}^{-1}$$

$$N = 75$$

$$A = -45 \text{ Дж}$$

$$M - ?$$

$$I - ?$$

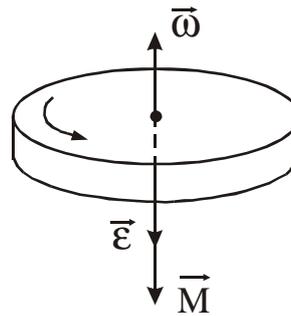


Рис. 3.2

Решение

Работа, совершаемая при вращении, и изменение кинетической энергии вентилятора связаны соотношением

$$A = \frac{I\omega_2^2}{2} - \frac{I\omega_1^2}{2}.$$

Начальная угловая скорость вращения $\omega_1 = 2\pi n_1$, конечная $\omega_2 = 0$.

Момент инерции вентилятора

$$I = -\frac{2A}{4\pi^2 n_1^2} = \frac{2 \cdot 45}{4 \cdot 3,14^2 \cdot 225} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \approx 0,01 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Работа постоянного момента сил, действующего на вращающееся тело,

$$A = M \cdot \varphi,$$

где $\varphi = 2\pi N$ (угол поворота тела)

Отсюда

$$M = \frac{A}{2\pi N} = \frac{-45}{2 \cdot 3,14 \cdot 75} \text{ Н} \cdot \text{м} \approx -0,1 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Момент сил торможения можно определить, используя II закон динамики вращательного движения

$$M = I \cdot \varepsilon,$$

где

$$\varepsilon = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t} \quad (\text{угловое ускорение}).$$

Векторы $\vec{\varepsilon}$ и \vec{M} направлены противоположно вектору $\vec{\omega}$ (рис. 3.2).

Учитывая, что $\omega_2 = 0$ и $t = \frac{N}{\bar{n}} = \frac{2N}{n_1}$,

найдем момент сил торможения

$$M = I \cdot \left(-\frac{2\pi n_1}{t} \right) = -\frac{I \cdot \pi n_1^2}{N} = -\frac{0,01 \cdot 3,14 \cdot 225}{75} \text{ Н} \cdot \text{м} = -0,1 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Вентиляторы используются для проветривания строящихся и действующих шахт. Проветривание строящихся шахт осуществляется сквозной струей воздуха, создаваемой вентилятором, установленным на поверхности. При одновременном производстве горных работ в направлении от главных и вентиляционных стволов организуются две-три самостоятельные системы проветривания, которые к концу строительства шахты соединяются в одну

общую вентиляционную систему. Каждая система обеспечивается вентиляционной установкой, расположенной на поверхности.

Различные типы вентиляторов имеют скорость вращения рабочего колеса от 500 до 1500 об/мин, диаметр рабочего колеса от 1 м до 3,6 м, массу от 3 до 50 т.

3.3

Состав из электровоза и вагонов имеет массу 80 т, причем масса колес составляет 0,1 от массы поезда. Определить "живую силу" состава, движущегося по штреку со скоростью 10,8 км/ч.

$$M = 8 \cdot 10^4 \text{ кг}$$

$$V = 10,8 \text{ км/ч} = 3 \text{ м/с}$$

$$m = 0,1 M$$

$$W_K - ?$$

Решение

В целом поезд совершает поступательное движение, одновременно некоторые его части (колесные пары, двигатели, редукторы) совершают еще вращательное движение. Поэтому "живая сила" (кинетическая энергия) поезда с учетом вращения колес

$$W_K = W_{\text{ПОСТ}} + W_{\text{ВРАЩ}} = \frac{MV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

где момент инерции колес $I = \frac{1}{2}mr^2$.

$$W_K = \frac{MV^2}{2} + \frac{\omega^2 r^2 \cdot 0,1M}{4} = 1,05 \frac{MV^2}{2}.$$

$$W_K = \frac{8 \cdot 10^4 \cdot 1,05 \cdot 9}{2} \text{ Дж} = 3,78 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$$

3.4

Кусок руды, имеющий форму шарика массой m , скатывается без скольжения по наклонной плоскости с высоты h . Какую скорость приобретет центр шарика в конце плоскости? Чему равны его ускорение и сила трения,

препятствующая скольжению шарика, если угол наклона плоскости к горизонту α ?

h

m

α

$V - ?$

$a - ?$

$F_{\text{ТР}} - ?$

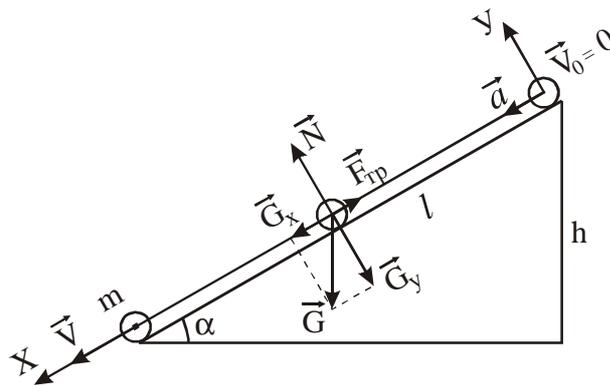


Рис. 3.3

Решение

Потенциальная энергия, которой обладал шарик в начальной точке на высоте h , в конце наклонной плоскости переходит в кинетическую энергию поступательного и вращательного движения.

$$mgh = \frac{mV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

где момент инерции шарика $I = \frac{2}{5}mr^2$.

$$mgh = \frac{mV^2}{2} + \frac{mr^2\omega^2}{5} = \frac{7}{10}mV^2,$$

откуда

$$V = \sqrt{\frac{10gh}{7}}.$$

Ускорение

$$a = \frac{V^2}{2l} = \frac{10gh \cdot \sin \alpha}{7 \cdot 2 \cdot h} = \frac{5}{7}g \cdot \sin \alpha.$$

По II закону Ньютона

$$\vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} = m\vec{a},$$

где \vec{G} - сила тяжести, \vec{N} - сила реакции опоры, $\vec{F}_{\text{тр}}$ - сила трения. Спроектируем силы на ось X (рис. 3.3)

$$mg \cdot \sin \alpha - F_{\text{тр}} = ma.$$

Отсюда

$$F_{\text{тр}} = mg \cdot \sin \alpha - ma = mg \cdot \sin \alpha - \frac{5}{7} mg \sin \alpha = \frac{2}{7} mg \sin \alpha.$$

3.5

Круглая платформа радиусом 1 м, момент инерции которой равен $130 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, вращается по инерции вокруг вертикальной оси, совершая 1 об/с. На краю платформы стоит человек массой 65 кг. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки. Сколько оборотов в секунду будет совершать платформа, если человек перейдет в ее центр?

$r = 1 \text{ м}$
$n_1 = 1 \text{ об/с}$
$m = 65 \text{ кг}$
$I = 130 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$
$n_2 = ?$

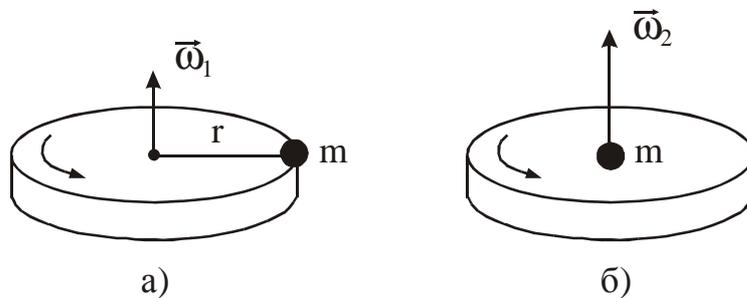


Рис. 3.4

Решение

Платформа с человеком (рис. 3.4 а) вращается по инерции. Это означает, что результирующий момент всех внешних сил, приложенных к системе, равен нулю. Для системы выполняется закон сохранения момента импульса, который запишем в виде $L_1 = L_2$.

Начальный момент импульса системы

$$L_1 = I_1 \omega_1 = (I + mr^2) \cdot 2\pi n_1.$$

Конечный момент импульса

$$L_2 = I_2 \omega_2 = I \cdot 2\pi n_2.$$

Решая относительно n_2 уравнение

$$(I + mr^2) \cdot 2\pi n_1 = I \cdot 2\pi n_2,$$

получим

$$n_2 = \frac{I + mr^2}{I} \cdot n_1 = \frac{130 + 65}{130} \cdot 1 \text{ об/с} = 1,5 \text{ об/с}.$$

При уменьшении момента инерции системы, связанном с перемещением человека в центр платформы (рис. 3.4 б), увеличилась угловая скорость вращения системы, что означает увеличение кинетической энергии за счет работы, совершенной человеком.

$$A = \frac{I_2 \omega_2^2}{2} - \frac{I_1 \omega_1^2}{2}.$$

Для изменения направления движущихся самокатом вагонеток применяются поворотные платформы. Во время работы платформы вагонетка самокатом наезжает на непрерывно вращающийся круг и поворачивается вместе с ним. Диаметр поворотного круга платформы ППВ-2 составляет 3,5 м, масса платформы – 5,5 т.

3.6

Определить момент инерции маховика рудничного гировоза, если длина пробега гировоза при уменьшении скорости вращения маховика с 50 об/с до 20 об/с составила 2 км, тяговое усилие 1960 Н, КПД гировоза 25 %.

$F = 1960 \text{ Н}$
$n_1 = 50 \text{ об/с}$
$n_2 = 20 \text{ об/с}$
$l = 2 \text{ км} = 2 \cdot 10^3 \text{ м}$
$\eta = 0,25$
$I - ?$

Решение

Коэффициент полезного действия

$$\eta = \frac{A_{\text{ПОЛ}}}{A_{\text{ЗАТР}}}$$

Полезная работа

$$A_{\text{ПОЛ}} = F \cdot l.$$

Затраченная работа

$$A_{\text{ЗАТР}} = \frac{I\omega_1^2 - I\omega_2^2}{2} = I \cdot 2\pi^2 (n_1^2 - n_2^2).$$

Отсюда момент инерции

$$I = \frac{F \cdot l}{2\pi^2 \eta (n_1^2 - n_2^2)}.$$

Производим вычисления.

$$I = \frac{1960 \cdot 2 \cdot 10^3}{2 \cdot 9,86 \cdot 0,25 \cdot (2500 - 400)} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 = 380 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Гировозы (инерционные локомотивы) предназначены для откатки вагонеток по вентиляционным выработкам сверхкатегорных по газу и опасных по пыли шахт, служат вспомогательным транспортом в гидрошахтах и шахтах сплошной конвейеризации. Они могут использоваться для доставки оборудования, породы.

Движение гировоза осуществляется за счет кинетической энергии вращающегося маховика (массой около 1,5 т), который раскручивается пневмодвигателем или электродвигателем.

Задачи для самостоятельного решения

41. Линейная скорость точек на окружности вращающегося диска равна 3 м/с. Точки, расположенные на 10 см ближе к оси, имеют скорость 2 м/с. Чему равна частота вращения диска? /1,6 с⁻¹/

42. Маховик, приведенный в равноускоренное вращение, сделав 40 полных оборотов, стал вращаться с частотой 480 мин⁻¹. Определить угловое ускорение маховика и продолжительность равноускоренного вращения. /10 с; 5 рад/с²/

43. Маховик, находящийся в покое, начал вращаться равноускоренно. Он приобрел угловую скорость 62,8 рад/с, совершив 200 оборотов. Найти угловое ускорение маховика и продолжительность равноускоренного движения. /1,57 рад/с²; 40 с/

44. Маховое колесо, вращающееся с частотой 240 мин⁻¹, останавливается в течение 0,5 мин. Сколько оборотов оно сделало до остановки, если его движение равнозамедленное? /60/

45. Маховик, выполненный в виде диска радиусом 0,4 м и имеющий массу 100 кг, был раскручен до 480 оборотов в минуту и предоставлен самому себе. Под действием трения вала о подшипники маховик остановился через 80 с. Определить момент сил трения. /5 Н·м/

46. Маховик вращался, делая 8 оборотов в секунду. Под действием постоянного тормозящего момента 100 Н·м он остановился через 50 с. Найти момент инерции маховика. /100 кг·м²/

47. Диск радиусом 20 см и массой 8 кг вращался с частотой 10 с⁻¹. При торможении он остановился, совершив пять полных оборотов. Определить тормозящий момент. /10 Н·м/

48. Под действием вращающего момента 40 Н·м маховик из состояния покоя начал вращаться равноускоренно. Какую кинетическую энергию приобрел маховик, если его момент инерции 80 кг·м², а равноускоренное вращение продолжалось 10 с ? /1 кДж/

49. Ротор шахтного электродвигателя совершает 960 об/мин. После выключения он останавливается через 10 с. Считая вращение равнозамедленным, найти угловое ускорение ротора. Сколько оборотов сделал ротор до остановки? /-10 рад/с²; 80/

50. Крутящий момент двигателя электрической лебедки 1,2 кН·м. Для остановки двигателя служат тормозные деревянные колодки, прижимающиеся с двух сторон к тормозному чугунному диску радиусом 0,6 м, жестко связанному с ротором двигателя. Найти силу давления, необходимую для остановки ротора, если коэффициент трения равен 0,5. /2 кН/

51. Вал массой 100 кг и радиусом 5 см вращался с частотой 8 с⁻¹. К поверхности вала прижали тормозную колодку с силой 40 Н, под действием которой вал остановился через 10 с. Определить коэффициент трения. /0,31/

52. Какую работу надо произвести, чтобы раскрутить маховик массой 80 кг до 180 об/мин? Массу маховика считать равномерно распределенной по ободу с диаметром 1 м. /3,6 кДж/

53. Была произведена работа в 1 кДж, чтобы из состояния покоя привести маховик во вращение с частотой 8 с⁻¹. Какой момент импульса (количества движения) приобрел маховик? /40 Дж·с/

54. Якорь двигателя делает 240 об/мин. Определить вращающий момент, если мощность двигателя 1 кВт. /40 Н·м/

55. Двигатель мощностью 3 кВт за 12 с разогнал маховик до 10 об/с. Найти момент инерции маховика. /18 кг·м²/

56. Якорь двигателя вращается с частотой 40 с⁻¹, развиваемая им мощность 3 кВт. Найти вращающий момент якоря. /12 Н·м/

57. Шар и сплошной цилиндр катятся по горизонтальной плоскости. Какую часть энергии поступательного движения каждого тела составляет от общей кинетической энергии? /5/7; 2/3/

58. Шар и цилиндр имеют одинаковую массу 5 кг и катятся со скоростью 10 м/с по горизонтальной плоскости. Найти кинетическую энергию этих тел. /350 Дж; 375 Дж/

59. Сплошной цилиндр и шар, двигаясь с одинаковой скоростью, вкатываются вверх по наклонной плоскости. Какое из тел поднимется выше? Найти отношение высот подъема. /1,07/

60. Какую линейную скорость приобретет центр шара, если шар скатится с наклонной плоскости высотой 1 м? /3,7 м/с/

4. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Примеры решения задач

4.1

Вибропитатель, служащий для подачи руды в дробилку, совершает гармоническое колебательное движение, уравнение которого имеет вид:

$X = \cos \frac{\pi}{2}(40t + 1)$, см. Найти амплитуду, период, частоту и начальную фазу колебаний.

$X = \cos \frac{\pi}{2}(40t + 1)$, см	Решение
А, Т - ?	Запишем уравнение гармонического колебательного движения в общем виде
ν, φ_0 - ?	$X = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$

и сравним его с заданным

$$X = 1 \cdot \cos\left(20\pi t + \frac{\pi}{2}\right), \text{ см.}$$

Находим, что амплитуда $A = 1$ см, начальная фаза колебаний $\varphi_0 = \pi/2$, циклическая частота $\omega = 20\pi \text{ с}^{-1}$, частота $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{20\pi}{2\pi} \frac{1}{\text{с}} = 10$ Гц, период колебаний $T = 1/\nu = 0,1$ с.

Различные типы вибрационных питателей и конвейеров применяются

для выпуска, доставки и погрузки руды в пределах очистного блока. Виброконвейеры используются на шахтах для транспортировки твердых и абразивных грузов. С помощью вибраторов за несколько секунд происходит очистка вагонеток.

4.2

Для погружения обсадных труб в глинистые отложения применяется вибровозбудитель, амплитуда колебаний которого 0,13 см, частота вращения дебалансов 1200 об/мин. Определить максимальные скорость и ускорение колебаний, написать уравнение, если $\varphi_0 = 0$.

$$A = 0,13 \text{ см}$$

$$\nu = 1200 \text{ мин}^{-1} = 20 \text{ с}^{-1}$$

$$\varphi_0 = 0$$

$$V_0 - ?$$

$$a_0 - ?$$

$$X(t) - ?$$

Решение

Циклическая частота колебаний

$$\omega = 2\pi\nu = 40\pi \text{ с}^{-1}.$$

Уравнение гармонического колебательного

движения

$$X = A \cdot \sin \omega t.$$

Скорость

$$V = \frac{dX}{dt} = A\omega \cdot \cos \omega t.$$

Ускорение

$$a = \frac{dV}{dt} = -A\omega^2 \sin \omega t.$$

Максимальная скорость

$$V_0 = A\omega = 0,13 \cdot 40\pi \text{ см/с} = 17 \text{ см/с}.$$

Максимальное ускорение

$$a_0 = A\omega^2 = 0,13 \cdot (40\pi)^2 \text{ см/с}^2 \approx 2 \cdot 10^3 \text{ см/с}^2.$$

Уравнение колебаний

$$X = 0,13 \cdot \sin 40\pi t \text{ (см).}$$

При вибрационном способе бурения скважин для разрушения породы используются механические колебания большой частоты ($1200 \div 2500 \text{ мин}^{-1}$), создаваемые вибрационной машиной и передаваемые породоразрушающему инструменту через колонну бурильных труб. Вибрационный способ разрушения мягких, рыхлых пород осуществляется при погружении специального забойного инструмента под действием вынужденных продольных колебаний (вибраций) и осевой нагрузки. Вибрационное бурение применяется при бурении неглубоких скважин различного назначения: при геологической съемке, сейсморазведке, разведке россыпных месторождений, инженерно-геологических и гидрогеологических исследованиях.

4.3

Уравнение продольных свободных колебаний вагона подвесной канатной дороги при отсутствии искусственного демпфирования

$X = A_0 e^{-0,084t} \cdot \sin (1,68 t + \varphi_0)$, см. За какое время амплитуда уменьшится в e раз? Каким должен быть коэффициент затухания, чтобы такое же уменьшение амплитуды произошло за период колебания?

$$X = A_0 e^{-0,084t} \cdot \sin (1,68 t + \varphi_0), \text{ см}$$

$$A_0/A = e$$

$$\beta_1 = 8,4 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$$

$$\omega = 1,68 \text{ с}^{-1}$$

$$\tau_2 = T$$

$$\tau_1 - ?$$

$$\beta_2 - ?$$

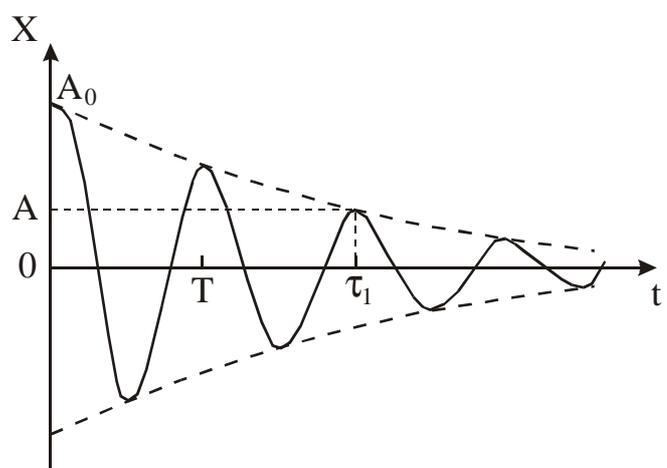


Рис. 4.1

Решение

Запишем уравнение затухающих колебаний в общем виде:

$$X = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0),$$

где A_0 - амплитуда в момент времени $t = 0$ (рис. 4.1);

β - коэффициент затухания;

ω - циклическая частота.

Амплитуда уменьшается по экспоненциальному закону:

$$A = A_0 e^{-\beta t}; \quad A = \frac{A_0}{e} \quad \text{при } \beta_1 \tau_1 = 1.$$

Отсюда время релаксации

$$\tau_1 = \frac{1}{8,4 \cdot 10^{-3}} \text{ с} = 120 \text{ с}.$$

Колебания затухают медленно, в течение 120 с вагон успевает совершить более 30 полных колебаний, так как период

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6,28}{1,68} \text{ с} = 3,8 \text{ с}.$$

Чтобы амплитуда уменьшилась в e раз за 3,8 с, коэффициент затухания

$$\beta_2 = \frac{1}{3,8} \text{ с}^{-1} = 0,27 \text{ с}^{-1}.$$

Увеличение коэффициента затухания создается искусственным демпфированием. Существуют разные способы гашения возникающих поперечных и продольных колебаний вагонов, кабин и кресел пассажирских подвесных канатных дорог.

Грузовые подвесные канатные дороги применяются в труднодоступных горных местностях для перевозки полезных ископаемых с места добычи

к местам переработки, хранения или погрузки, для дальнейшего транспортирования.

4.4

Определить полную энергию колебаний и максимальную силу взаимодействия между подъемным сосудом массой 90 т и армировкой ствола шахты "Гигант-Глубокая", если амплитуда горизонтальных колебаний сосуда 3 см, а циклическая частота 7 с^{-1} .

$$m = 90 \text{ т} = 9 \cdot 10^4 \text{ кг}$$

$$A = 3 \text{ см} = 0,03 \text{ м}$$

$$\omega = 7 \text{ с}^{-1}$$

$$F_0 - ?$$

$$W - ?$$

Решение

Исследованиями установлено, что в системе "подъемный сосуд-армировка" реализуются устойчивые горизонтальные колебания сосуда, которые приближенно можно считать гармоническими. Запишем уравнение гармонических колебаний в виде:

$$X = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Скорость

$$V = \frac{dX}{dt} = A\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0), \quad V_0 = A\omega.$$

Ускорение

$$a = \frac{dV}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0), \quad a_0 = A\omega^2.$$

Максимальная сила взаимодействия

$$F_0 = m \cdot a_0 = m\omega^2 A = 9 \cdot 10^4 \cdot 49 \cdot 0,03 \text{ Н} = 13 \cdot 10^4 \text{ Н}.$$

Полная энергия равна максимальной кинетической энергии.

$$W = \frac{mV_0^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2} = \frac{F_0 \cdot A}{2} = \frac{13 \cdot 10^4 \cdot 0,03}{2} \text{ Дж} \approx 2 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

Практика эксплуатации подъемных установок в стволах с жесткой арматурой и теоретические исследования показывают, что при определенных критических скоростях подъема может возникнуть параметрический резонанс, который может привести к аварии. Для предотвращения этого явления на подъемном сосуде устанавливаются специальные демпфирующие устройства, а также проводят варьирование параметров, проектируют армировку с переменным шагом.

4.5

При движении подъемного сосуда по рельсовым проводникам складываются два колебания, совпадающие по направлению, уравнения которых $X_1 = \cos \pi t$, см; $X_2 = \cos (\pi t + \pi/2)$, см. Определить амплитуду, период, начальную фазу результирующего колебания и написать его уравнение.

$$X_1 = \cos \pi t, \text{ см}$$

$$X_2 = \cos (\pi t + \pi/2), \text{ см}$$

$$A_1 = A_2 = 1 \text{ см}$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \pi \text{ с}^{-1}$$

$$\varphi_{01} = 0$$

$$\varphi_{02} = \pi/2$$

$$A, T, \varphi_0, X(t)\text{-?}$$

Решение

При сложении колебаний одинаковой частоты возникает колебание с такой же циклической частотой $\omega = \pi \text{ с}^{-1}$. Период результирующего колебания

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} \text{ с} = 2 \text{ с}.$$

Уравнение результирующего колебания будет иметь вид:

$$X = A \cdot \cos (\omega t + \varphi_0).$$

Задачу решим разными способами.

1-й способ. При аналитическом способе решения задачи

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 A_2 \cos (\varphi_{02} - \varphi_{01}).$$

Амплитуда результирующего колебания

$$A = \sqrt{1 + 1 + 2 \cos \pi/2} \text{ см} = \sqrt{2} \text{ см} = 1,4 \text{ см.}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02}}{A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02}} = \frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot 1}{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0} = 1.$$

Начальная фаза результирующего колебания $\varphi_0 = \pi/4$,
а его уравнение

$$X = 1,4 \cos (\pi t + \pi/4), \text{ см.}$$

2-й способ. Смещение результирующего колебания

$$X = X_1 + X_2 = \cos \pi t + \cos (\pi t + \pi/2) = 2 \cos \frac{\pi t + \pi t + \pi/2}{2} \cdot \cos \frac{\pi t - \pi t - \pi/2}{2};$$

$$X = 2 \cos (\pi t + \pi/4) \cdot \cos (-\pi/4), \text{ см} = \sqrt{2} \cos (\pi t + \pi/4), \text{ см.}$$

3-й способ. Решим задачу с помощью векторной диаграммы амплитуд (рис. 4.2). Гармоническое колебательное движение можно представить движением проекции на некоторую ось конца вектора амплитуды, отложенной из произвольной точки оси под углом, равным начальной фазе, и вращающегося с угловой скоростью ω вокруг этой точки.

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{2} \text{ см} = 1,4 \text{ см}; \quad \varphi_0 = \pi/4.$$

4-й способ. Задачу можно решить графическим способом. На рис. 4.3 изображены графики складываемых колебаний и график результирующего колебания $X(t)$.

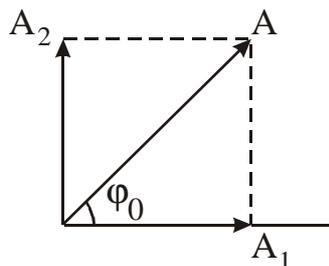


Рис. 4.2

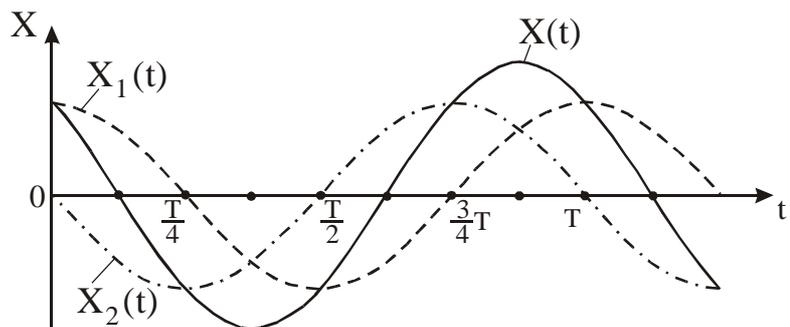


Рис. 4.3

4.6

Известно, что сложное колебаний, график которого приведен на рис. 4.4, состоит из двух синусоидальных колебаний. Найти их частоты и амплитуды.

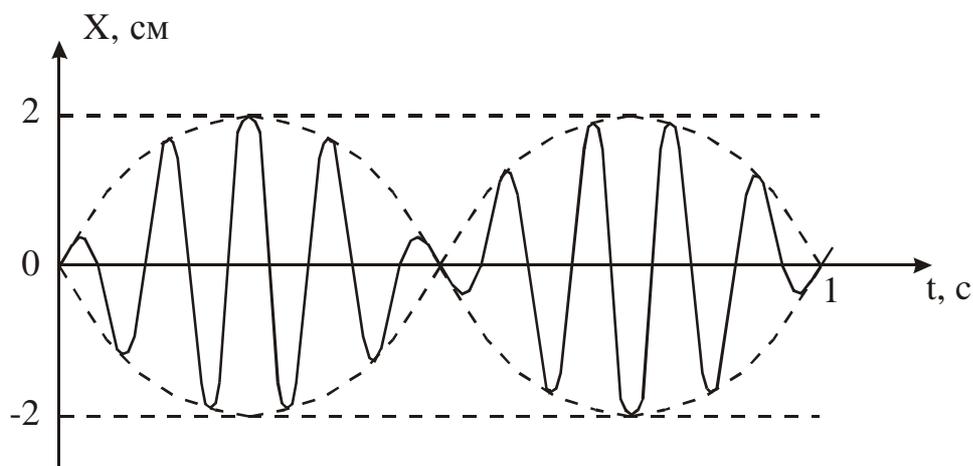


Рис. 4.4

Решение

Приведенный график изображает гармоническое колебание с медленно периодически изменяющейся амплитудой. Такие колебания, называемые биениями, получаются в результате сложения двух одинаково направленных гармонических колебаний с мало различающимися частотами ν_1 и ν_2 . При этом частота сложных колебаний $\nu = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$, а частота изменения амплитуды (частота биений)

$$\nu_{\text{б}} = \nu_1 - \nu_2.$$

Из графика видно, что за 1 секунду произошло 9 полных колебаний, значит $\nu = 9$ Гц. За это же время совершилось два полных цикла изменений амплитуды, следовательно, частота биений $\nu_{\text{б}} = 2$ Гц.

Из уравнений

$$9 \text{ Гц} = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}, \quad \nu_1 - \nu_2 = 2 \text{ Гц}$$

находим, что $\nu_1 = 10$ Гц, $\nu_2 = 8$ Гц.

Из графика определяем максимальную и минимальную амплитуды:

$$A_{\text{МАКС}} = A_1 + A_2 = 2 \text{ см}; \quad A_{\text{МИН}} = A_1 - A_2 = 0.$$

Следовательно, $A_1 = A_2 = 1 \text{ см}$.

Биения представляют обычное явление у сейсмографов с весьма малым затуханием и сильно искажают запись. Однако, по записи движения можно определить частоту биений $\nu_{\text{б}} = \nu_{\text{ПРИБОРА}} - \nu_{\text{ПОЧВЫ}}$. Отсюда, зная частоту собственных колебаний прибора, можно вычислить частоту колебаний почвы.

Биения возникают при одновременной работе двух параллельно установленных буровых насосов, число ходов которых незначительно отличается друг от друга. В этом случае происходит периодическое усиление и ослабление пульсаций давления с периодом $T_{\text{б}}$, значительно бóльшим, чем периоды пульсаций, создаваемые работой каждого насоса. $T_{\text{б}} = 3,3 \div 4 \text{ мин}$.

4.7

Найти скорости распространения продольных и поперечных волн в стальном стержне, если модуль растяжения и модуль сдвига соответственно $2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$ и $0,77 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$, а плотность стали $7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

$$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$$

$$G = 0,77 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$$

$$\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$$

$$V_{\text{ПРОД}} - ?$$

$$V_{\text{ПОПЕР}} - ?$$

Решение

Упругие механические волны делятся на продольные и поперечные. В продольной волне частицы колеблются в направлении распространения волны, в поперечной – перпендикулярно этому направлению.

Скорости распространения продольных и поперечных волн можно найти по формулам:

$$V_{\text{ПРОД}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{11}}{7,8 \cdot 10^3}} \text{ м/с} = 5,1 \cdot 10^3 \text{ м/с},$$

$$V_{\text{ПОПЕР}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{0,77 \cdot 10^{11}}{7,8 \cdot 10^3}} \text{ м/с} = 3,1 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$$

Изучая скорости распространения продольных и поперечных волн, можно сделать заключение о природе веществ, через которые проходят упругие волны. На этом основаны сейсмические методы геологической разведки. От места сильного взрыва через землю бегут волны деформации, скорость которых зависит от механических свойств пород. Измеряя скорость распространения волн на разных расстояниях от места взрыва, можно оценить характер залеганий.

Такие же волны деформации бегут по земной коре и от места землетрясения. Продольные волны бегут быстрее поперечных. Поэтому приборы на сейсмостанции регистрируют толчок от происшедшего на расстоянии L землетрясения дважды через промежуток времени

$$t = \frac{L}{V_{\text{ПОПЕР}}} - \frac{L}{V_{\text{ПРОД}}}.$$

Измеряя его, можно оценить расстояние от сейсмостанции до очага землетрясения или места подземного атомного взрыва.

Определение скорости распространения упругих волн производят как в естественном залегании пород на поверхности земли и в скважинах, так и на образцах в лабораторных условиях.

4.8

В результате взрыва, произведенного геологами, в земной коре распространилась волна со скоростью 4,5 км/с. На какой глубине залегает порода другой плотности, если отраженная от нее волна была зафиксирована на поверхности через 20 с после взрыва? Каковы фаза колебаний, смещение, скорость и ускорение точки, отстоящей на расстоянии 13,5 км от источника вол-

ны в момент времени 4 с. Найти разность фаз колебаний двух точек, лежащих на луче и отстоящих от источника волн на расстояниях 20 км и 25 км, если известно, что период колебаний точек земной коры 1,2 с, а амплитуда колебаний 4 см.

$$V_B = 4,5 \cdot 10^3 \text{ м/с}$$

$$t_1 = 20 \text{ с}$$

$$X = 13,5 \cdot 10^3 \text{ м}$$

$$t = 4 \text{ с}$$

$$T = 1,2 \text{ с}$$

$$A = 0,04 \text{ м}$$

$$X_1 = 20 \cdot 10^3 \text{ м}$$

$$X_2 = 25 \cdot 10^3 \text{ м}$$

$$H, \varphi, Y - ?$$

$$V, a, \Delta\varphi - ?$$

Решение

Глубина залегания породы

$$H = V_B \cdot t' = 4,5 \cdot 10^3 \cdot 10 \text{ м} = 4,5 \cdot 10^4 \text{ м},$$

где $t' = 0,5 t_1$, так как время распространения прямой и отраженной волн одинаково.

Запишем уравнение плоской волны в общем виде:

$$Y = A \cdot \sin \omega \left(t - \frac{X}{V_B} \right),$$

где Y - смещение колеблющейся точки,

X - расстояние точки от источника волн,

V_B - скорость распространения волны.

Фаза колебаний точки с координатой X в момент времени t определяется выражением, стоящим в уравнении волны под знаком синуса.

$$\varphi = \omega \left(t - \frac{X}{V_B} \right) = \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{X}{V_B} \right) = \frac{2\pi}{1,2} \left(4 - \frac{13,5 \cdot 10^3}{4,5 \cdot 10^3} \right) = 1,67\pi,$$

Смещение Y определим, подставив в уравнение волны численные значения амплитуды и фазы.

$$Y = 0,04 \cdot \sin 1,67\pi, \text{ м} = 0,04 \cdot \sin 300^\circ, \text{ м} = -0,04 \cdot \sin 60^\circ, \text{ м} \approx -0,035 \text{ м}.$$

Скорость точки есть первая производная от смещения по времени

$$V = \frac{dY}{dt} = A \cdot \omega \cos \omega \left(t - \frac{X}{V_B} \right) = \frac{2\pi}{T} A \cdot \cos \omega \left(t - \frac{X}{V_B} \right).$$

$$V = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 0,04}{1,2} \cdot \cos 300^\circ, \text{ м/с} = 0,208 \cdot \cos 60^\circ, \text{ м/с} = 0,104 \text{ м/с}.$$

Ускорение точки является первой производной от скорости по времени

$$a = \frac{dV}{dt} = -A \omega^2 \sin \omega \left(t - \frac{X}{V_B} \right).$$

$$a = -\frac{0,04 \cdot 4\pi^2}{1,2^2} \sin 300^\circ, \text{ м/с}^2 = \frac{0,16 \cdot 9,86}{1,44} \sin 60^\circ, \text{ м/с}^2 = 0,95 \text{ м/с}^2.$$

Разность фаз колебаний двух точек волны связана с расстоянием ΔX между этими точками соотношением

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta X = \frac{2\pi}{V_B T} (X_2 - X_1);$$

$$\Delta\phi = \frac{2\pi (25 - 20) \cdot 10^3}{4,5 \cdot 10^3 \cdot 1,2} = 1,85\pi.$$

Задачи для самостоятельного решения

61. Маятник для гравиметрической съемки за сутки совершил 57600 колебаний. Найти ускорение свободного падения, если длина маятника 0,56 м. /9,83 м/с²/

62. Днище вибролюка, применяемого для погрузки руды в бункер поезда из очистной камеры, совершает гармоническое колебательное движение с амплитудой 5 мм и частотой 1500 мин⁻¹. Написать уравнение колебаний, если начальная фаза равна нулю. /x = 0,5 sin 50πt (см)/

63. Стол питателя, предназначенного для погрузки руды в вагонетки, колеблется с частотой 45 мин⁻¹. Определить максимальные скорость и ускорение стола, полную энергию колебаний, если масса питателя 1000 кг, амплитуда колебаний 72 мм. /0,34 м/с; 1,6 м/с²; 58 Дж/

64. Решето рудообогатительного грохота совершает вертикальное колебательное движение с амплитудой 5 см. Найти наименьшую частоту колебаний, при которой куски руды, лежащие на решете, будут отделяться от него и подбрасываться вверх. /2,2 с⁻¹/

65. Вибропитатель, служащий для подачи руды в дробилку, совершает колебательное движение, уравнение которого $x = \cos \pi/2 (40t + 1)$ (см). Найти амплитуду, период, частоту и начальную фазу колебаний.

/1 см; 0,1 с; 10 Гц; $\pi/2$ /

66. Для погружения обсадных труб в глинистые отложения применяется вибровозбудитель ВО-10, амплитуда колебаний которого 0,13 см, частота вращения дебалансов 1200 мин⁻¹. Определить максимальные скорость и ускорение, написать уравнение колебаний, если начальная фаза равна нулю.

/0,17 м/с; 20 м/с²; $x = 0,13 \sin 40\pi t$ (см)/

67. Амплитуда колебаний материальной точки 5 см, период 0,2 с, начальная фаза равна нулю. Какова скорость точки в тот момент, когда ее смещение равно 3 см? /1,26 м/с/

68. Точка совершает гармонические колебания по закону $x = A \sin \omega t$. В некоторый момент времени ее смещение равно 5 см. При увеличении фазы вдвое смещение стало 8 см. Найти амплитуду колебаний.

/8,3 см/

69. Точка совершает гармонические колебания. Максимальная скорость точки 10 см/с, максимальное ускорение 100 см/с². Найти циклическую частоту колебаний, их период, амплитуду. Написать уравнение колебаний.

/10 с⁻¹; 0,63 с; 1 см; $x = \sin (10t + \varphi_0)$ (см)/

70. Определить полную энергию колебаний и максимальную силу взаимодействия между подъемным сосудом массой 90 тонн и армировкой ствола шахты, если амплитуда горизонтальных колебаний сосуда 3 см, а циклическая частота 7 с⁻¹. /2 кДж; 130 кН/

71. Под влиянием веса электродвигателя консольная балка, на которой он установлен, прогнулась на 1 мм. При какой частоте вращения якоря электродвигателя может возникнуть опасность резонанса? /16 с⁻¹/

72. Полная энергия тела, совершающего гармонические колебания, $5 \cdot 10^{-7}$ Дж, амплитуда колебаний 2 см. Определить смещение, при котором на тело действует сила $2,2 \cdot 10^{-5}$ Н, и максимальную силу, действующую на тело. / $8,8 \cdot 10^{-3}$ м; $5 \cdot 10^{-5}$ Н/

73. К спиральной пружине подвешивают снизу груз, масса которого значительно больше массы пружины. При этом пружина удлиняется на 1 см. С какой частотой будет колебаться груз, если ему дать толчок в вертикальном направлении? /5 с⁻¹/

74. Груз, подвешенный к пружине, гармонически колеблется по вертикали с периодом 0,5 с. Коэффициент упругости пружины 4 Н/м. Определить массу груза. /25 г/

75. Складываются два колебания одинакового направления и одинакового периода: $x_1 = \sin \pi t$, $x_2 = \sin (\pi t + \pi/2)$ (см). Определить амплитуду и начальную фазу результирующего колебания, написать его уравнение. /1,4 см; 45°; $x = \sqrt{2} \sin (\pi t + \pi/4)$ (см)/

76. Два совпадающих по направлению гармонических колебания одного периода с амплитудами по 2 см складываются в одно колебание с амплитудой 1 см. Найти разность фаз складываемых колебаний. /151°/

77. Два одинаково направленных гармонических колебания одного периода с амплитудами 10 см и 6 см складываются в одно колебание с амплитудой 14 см. Определить разность фаз складываемых колебаний. / $\pi/3$ /

78. Точка одновременно совершает два гармонических колебания, происходящих по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемых уравнениями: $x = 0,5 \sin t$, $y = 2 \cos t$. Найти уравнение траектории точки, построить график ее движения. / $4x^2 + y^2/4 = 1$ /

79. Амплитуда затухающих колебаний маятника за 5 мин уменьшилась в два раза. За какое время, считая от начального момента, амплитуда уменьшится в восемь раз? /15 мин/

80. Амплитуда затухающих колебаний за 20 с уменьшилась в два раза. Во сколько раз она уменьшится за 1 мин? /8 /

81. Колебания источника незатухающих гармонических колебаний происходят по закону $y = 5 \sin 3140 t$ (м). Определить смещение, скорость и ускорение точки, находящейся на расстоянии 340 м от источника, через 1 с от начала колебаний, если скорость волны 340 м/с. /0; $1,57 \cdot 10^4$ м/с; 0/

82. Поперечная волна распространяется вдоль шнура со скоростью 15 м/с. Период колебания точек шнура 1,2 с, амплитуда 2 см. Определить длину волны, фазу, смещение для точки, отстоящей от источника на 45 м, в момент времени 4 с от начала колебаний. /18 м; $1,67\pi$; -1,73 см/

83. Уравнение незатухающих колебаний $y = 0,1 \sin 0,5\pi t$ (м). Скорость волны 300 м/с. Написать уравнение колебаний для точек волны в момент времени 4 с после начала колебаний. Найти разность фаз для источника и точки на расстоянии 200 м от него. / $y(x) = 0,1 \sin (2\pi - \pi x/600)$ (м); $\pi/3$ /

84. Уравнение незатухающих колебаний $y = 4 \sin 600 \pi t$ (см). Найти смещение от положения равновесия точки, лежащей на расстоянии 75 см от источника, через 0,01 с после начала колебаний и разность фаз двух точек, лежащих на 10 м и 16 м от источника, если скорость волны 300 м/с. /0,04м ; 12π /

85. Смещение от положения равновесия точки, находящейся на расстоянии 4 см от источника в момент времени $T/6$, равно половине амплитуды. Найти длину волны. /0,48 м/

86. Уравнение незатухающих колебаний $y = \sin 2,5 \pi t$ (см). Найти смещение от положения равновесия, скорость, ускорение точки, отстоящей от источника на 20 м, для времени 1 с после начала колебаний при скорости волны 100 м/с. /0; 7,85 см/с; 0/

87. Уравнение незатухающих колебаний $y = 0,1 \sin 0,5 \pi t$ (м). Записать уравнение волны, если скорость волны 300 м/с. Написать уравнение колебаний для точки, отстоящей от источника на 600 м.

$$/y(x,t) = 0,1 \sin 0,5 \pi(t - x/300) \text{ (м)}; y(t) = 0,1 \sin 0,5 \pi(t - 2) \text{ (м)}/$$

88. Поперечная волна распространяется вдоль шнура со скоростью 15 м/с. Период колебаний точек шнура 1,2 с, амплитуда 2 см. Определить скорость и ускорение для точки, отстоящей от источника на 45 м, в момент времени 4 с от начала колебаний. /5,3 см/с; 47,5 см/с²/

89. Уравнение незатухающих колебаний источника $y = 5 \cos \omega t$ (см). Определить смещение от положения равновесия точки, отстоящей от источника на $1/12$ длины волны, для момента времени, равного $1/6$ периода. Найти разность фаз колебаний этой точки и источника. /4,4 см; $-\pi/6$ /

90. Плоская волна распространяется со скоростью 20 м/с вдоль прямой. Две точки, находящиеся на этой прямой на расстояниях 12 м и 15 м от источника волн, колеблются с разностью фаз $0,75\pi$. Найти длину волны и смещение указанных точек в момент времени 1,2 с, если амплитуда равна 0,1 м. Написать уравнение волны. /8м; 0; 0,071м; $y = 0,1 \sin 5\pi(t - x/20)$ (м)/

91. Определить скорость распространения волн в упругой среде, если разность фаз колебаний двух точек, отстоящих друг от друга на расстоянии 15 см, равна $\pi/2$. Частота колебаний 25 Гц. /15 м/с/

92. Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью 15 м/с. Период колебаний точек шнура 1,2 с. Определить разность фаз колебаний двух точек, лежащих на луче и отстоящих от источника волн на расстояниях 20 м и 30 м. / $1,1\pi$ /

93. В упругой среде распространяется гармоническая волна $y = 10^{-5} \cos (10^3 \pi t - 2x)$ (м). Определить длину волны и максимальную скорость колебаний частиц среды. /3,14 м; 3,14 см/с/

94. К одному из концов длинного стержня прикреплен вибратор, колеблющийся по закону $y = 10^{-6} \sin 10^4 \pi t$ (м). Определить скорость точек в сечении стержня, отстоящем от вибратора на расстоянии 25 см, в момент времени 10^{-4} с. Скорость волны $5 \cdot 10^3$ м/с. /0/

95. В некоторой упругой среде распространяется гармоническая волна $y = 0,001 \sin (2000 t - 0,4x)$ (м). Определить длину волны и ее скорость. /15,7 м; $5 \cdot 10^3$ м/с/

96. Звуковые колебания с частотой 500 Гц и амплитудой 0,25 мм, распространяются в воздухе. Длина волны 70 см. Определить скорость распространения волны и наибольшую скорость колебаний частиц воздуха. /350 м/с; 0,78 м/с/

97. Найти скорость распространения упругих продольных волн в медном стержне, если плотность меди $8,9 \cdot 10^3$ кг/м³, а модуль Юнга $1,2 \cdot 10^{11}$ Н/м². /3,8 км/с/

98. Найти скорости распространения продольных и поперечных волн в стальном стержне, если модуль растяжения $2 \cdot 10^{11}$ Н/м², модуль сдвига $0,77 \cdot 10^{11}$ Н/м², а плотность стали $7,8 \cdot 10^3$ кг/м³. /5,1 км/с; 3,1 км/с/

99. Определить коэффициент сжатия горной породы - величину, обратную модулю Юнга, если скорость распространения звуковых волн в горной породе равна 4500 м/с, а плотность породы составляет $2,3 \cdot 10^3$ кг/м³. / $2,2 \cdot 10^{-11}$ м²/Н/

100. Стержень из дюралюминия длиной 50 см закреплен с обоих концов. Определить возможные собственные частоты продольных колебаний, если плотность $2,7 \cdot 10^3$ кг/м³, модуль Юнга 70 ГПа. /5,1 кГц; 10,2 кГц; .../

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антонов В. Я. и др. Технология полевой сушки торфа. М.: Недра, 1981. – 239 с.
2. Асонов В. А. и др. Буровзрывные работы. – М.: Госстройиздат, 1960. – 408 с.
3. Волькенштейн В. С. Сборник задач по общему курсу физики. М.: Наука, 1990. – 396 с.
4. Ганджумян Р. А. Практические расчеты в разведочном бурении. – М.: Недра, 1986. – 252 с.
5. Егоров В. Л. Магнитные, электрические и специальные методы обогащения руд. – М.: Недра, 1977. – 200 с.
6. Каландадзе В. А. и др. Колебания вагонов подвесных канатных дорог. – Тбилиси.: Мецниераба, 1973. – 110 с.
7. Коломийцев А. Д. и др. Рудничный транспорт. – М.: Недра, 1966. – 292 с.
8. Мисюрёв М. А. Методика решения задач по теоретической механике. – М.: Высшая школа, 1963. – 307 с.
9. Мисюрёв М.А. Сборник задач по теоретической механике для горных вузов. – Свердловск: СГИ, 1954. – 131 с.
10. Новодворская В. М. Методика проведения упражнений по физике. – М.: Высшая школа, 1981. – 319 с.
11. Осецкий В. М. Механика в горном деле. – М.: Углетехиздат, 1957. – 287 с.
12. Поляков Н. С. и др. Сборник задач и упражнений по рудничному транспорту. – М.: Углетехиздат, 1959. – 258 с.
13. Поляков Н. С., Штокман И. Г. Основы теории и расчеты рудничных транспортных установок. – М.: Госгортехиздат, 1962. – 491 с.

14. Сароян А. Е. Бурильные колонны в глубоком бурении. – М.: Недра, 1979. – 231 с.
15. Трофимова Т. И. Курс физики. – М.: Высшая школа, 1990. – 478 с.
16. Трофимова Т. И. Сборник задач по курсу физики. – М.: Высшая школа, 1996. – 303 с.
17. Трофимова Т. И., Павлова З. Г. Сборник задач по курсу физики с решениями. – М.: Высш. школа, 1999. – 591 с.
18. Чертов А. Г., Воробьев А. А. Задачник по физике: Учебное пособие. – М.: Интеграл-Пресс, 1997. – 544 с.
19. Хаджиков Р.Н. Горная механика. – М.: Недра, 1982. – 407 с.
20. Хаджиков Р.Н., Бутаков С.А. Сборник примеров и задач по горной механике. – М.: Недра, 1989. – 187 с.

О. В. Садырева, Л. Н. Лукашевич, И. А. Келарева, Н. А. Шварте

МЕХАНИКА, МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ ВСЕХ НАПРАВЛЕНИЙ

Корректурa кафедры физики

Подписано в печать 02.2003 г.

Бумага писчая. Формат бумаги 60×84 1/16.

Печ. л. 3,75. Уч.-изд.л. 3,33. Тираж 200 экз. Заказ №

Лаборатория педагогики

620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30.

Уральская государственная горно-геологическая академия

Лаборатория множительной техники