

Теория погрешностей

При анализе измерений следует четко разграничивать два понятия: истинные значения физических величин и их эмпирические проявления - результаты измерений.

Истинные значения физических величин - это значения, идеальным образом отражающие свойства данного объекта, как в количественном, так и в качественном отношении. Они не зависят от средств нашего познания и являются абсолютной истиной.

Результаты измерений, напротив, являются продуктами нашего познания. Представляя собой приближенные оценки значений величин, найденные путем измерения, они зависят не только от них, но еще и от метода измерения, от технических средств, с помощью которых проводятся измерения, и от свойств органов чувств наблюдателя, осуществляющего измерения.

Причинами возникновения погрешностей являются: несовершенство методов измерений, технических средств, применяемых при измерениях, и органов чувств наблюдателя. В отдельную группу следует объединить причины, связанные с влиянием условий проведения измерений. Последние проявляются двояко. С одной стороны, все физические величины, играющие какую-либо роль при проведении измерений, в той или иной степени зависят друг от друга. Поэтому с изменением внешних условий изменяются истинные значения измеряемых величин. С другой стороны, условия проведения измерений влияют и на характеристики средств измерений и физиологические свойства органов чувств наблюдателя и через их посредство становятся источником погрешностей измерения.

Описанные причины возникновения погрешностей определяются совокупностью большого числа факторов, под влиянием которых складывается суммарная погрешность измерения. Их можно объединить в две основные группы.

1. Факторы, проявляющиеся весьма нерегулярно и столь же неожиданно исчезающие или проявляющиеся с интенсивностью, которую трудно предвидеть. К ним относятся, например, перекосы элементов приборов в их направляющих, нерегулярные изменения моментов трения в опорах, малые флюктуации влияющих величин, изменения внимания операторов и др.

Доля, или составляющая, суммарной погрешности измерения, определяемая действием факторов этой группы, называется *случайной погрешностью измерения*. Ее основная особенность в том, что она случайно изменяется при повторных измерениях одной и той же величины. Случайные погрешности подчиняются законам вероятности, а значит, что при одном измерении результат получился больше истинного, то при одном из последующих измерений столь же вероятно может получиться результат меньше истинного. Поэтому многократные измерения позволяют уменьшить влияние случайных погрешностей на результат. При многократных измерениях среднее арифметическое большего числа результатов отдельных измерений будет ближе к истинному значению измеряемой величины.

При создании измерительной аппаратуры и организации процесса измерения в целом интенсивность проявления большинства факторов данной группы удастся свести к общему уровню, так что все они влияют более или менее одинаково на формирование случайной погрешности. Однако некоторые из них, например внезапное падение напряжения в сети электропитания, могут проявиться неожиданно сильно, в результате чего погрешность примет размеры, явно выходящие за границы, обусловленные ходом эксперимента в целом. Такие погрешности в составе случайной погрешности называются *грубыми*. К ним тесно примыкают *промахи* - погрешности, зависящие от наблюдателя и связанные с неправильным обращением со средствами измерений, неверным отсчетом показаний или ошибками при записи результатов.

2. Факторы, постоянные или закономерно изменяющиеся в процессе измерительного эксперимента, например плавные изменения влияющих величин или погрешности применяемых при измерениях образцовых мер. Составляющие суммарной погрешности (1), определяемые действием факторов этой группы, называются *систематическими погрешностями измерения*. Их отличительная особенность в том, что они остаются постоянными или закономерно изменяются при повторных измерениях одной и той же величины. До тех пор, пока систематические погрешности больше случайных, их зачастую можно вычислить или исключить из результатов измерений надлежащей постановкой опыта. Например, если часы отстают на одну секунду в течение часа, то к

их показаниям следует прибавлять соответствующую поправку из расчёта 1 секунда на каждый час времени. Другим видом систематической погрешности является погрешность известного происхождения, но неизвестного знака. Подобного типа систематическую погрешность называют *приборной погрешностью*. Часто она указывается на шкале приборов; для электроизмерительных приборов она определяется классом точности. Если приборная погрешность не указана в паспорте или на шкале прибора, то за её величину можно принять половину цены наименьшего деления шкалы прибора. Например, для термометра с ценой деления шкалы 1° приборная погрешность равна $\pm 0,5^\circ$. Если шкала снабжена нониусом, то за приборную погрешность обычно принимают точность нониуса.

Таким образом, мы имеем три типа погрешностей измерения:

- случайные, изменяющиеся случайным образом при повторных измерениях одной и той же величины;
- систематические погрешности, остающиеся постоянными или закономерно изменяющиеся при повторных измерениях;
- грубые погрешности и промахи.

Оценка случайных погрешностей при прямых измерениях

Обозначим результаты прямых измерений какой либо величины "X" через $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Величина $\langle x \rangle$ будет средним арифметическим из указанных результатов:

$$\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (1)$$

Среднее арифметическое $\langle x \rangle$ достовернее отдельных результатов, так как случайные отклонения от $\langle x \rangle$ в разные стороны равновероятны. При небольшом числе измерений (в лабораторных условиях обычно три, пять или семь) можно вычислить абсолютную погрешность каждого i -го измерения

$$\Delta x_i = \langle x \rangle - x_i. \quad (2)$$

Среднее арифметическое абсолютных величин погрешностей отдельных измерений

$$\langle \Delta x \rangle = \frac{|\Delta x_1| + |\Delta x_2| + |\Delta x_3| + \dots + |\Delta x_n|}{n} \quad (3)$$

называется средней абсолютной погрешностью. Если все x_i совпадают, то все Δx_i равны нулю и $\langle \Delta x \rangle$ тоже равно нулю. В этом случае, а также при однократном измерении за абсолютную погрешность принимается приборная погрешность δx , равная половине цены наименьшего деления шкалы прибора (без нониуса), если объект измерения неподвижен, и цена наименьшего деления, если объект находится в движении. Если $\langle \Delta x \rangle$ не равно нулю, то за абсолютную погрешность измерения следует принять

$$\Delta x = \langle \Delta x \rangle + \delta x \quad (4)$$

Если случайная и приборная погрешности заметно различаются, в записи окончательного результата измерений будем указывать большую из них. Истинное значение величины X с большой степенью вероятности лежит в интервале от $\langle x \rangle - \langle \Delta x \rangle$ до $\langle x \rangle + \langle \Delta x \rangle$ и может принимать любое значение в данном интервале:

$$\langle x \rangle - \langle \Delta x \rangle \leq x_{\text{ист.}} \leq \langle x \rangle + \langle \Delta x \rangle \quad (5)$$

Этот результат справедлив при большом числе измерений величины X . Таким образом, результатом любого измерения является определение верхней и нижней границ для истинного значения измеряемой величины. Само же истинное значение остается неизвестным. Окончательный результат измерения записывается в виде

$$x = \langle x \rangle \pm \langle \Delta x \rangle \quad (6)$$

Абсолютная погрешность $\langle \Delta x \rangle$ измеряется в тех же единицах, в каких измеряется сама величина X .

Относительная погрешность показывает, какую часть составляет погрешность Δx от измеряемой величины:

$$E_x = \pm \frac{\langle \Delta x \rangle}{\langle x \rangle} \quad \text{или} \quad E_x = \pm \frac{\langle \Delta x \rangle}{\langle x \rangle} \cdot 100\% \quad (7)$$

$$f = \langle f \rangle \pm \langle \Delta f \rangle. \quad (13)$$

Относительная погрешность измерения величины f определяется:

$$E_f = \pm \frac{\Delta f}{\langle f \rangle} \cdot 100\%. \quad (14)$$

В таблице 1 приведены примеры вычисленных по формулам абсолютных и относительных погрешностей некоторых, чаще всего встречающихся на практике, функций.

Таблица 1

Примеры расчета погрешностей
(знаки среднего значения " $\langle \rangle$ " опущены)

Функция	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
$x_1 \pm x_2$	$\Delta x_1 + \Delta x_2$	$\frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{x_1 \pm x_2}$
$x_1 \cdot x_2$	$x_2 \cdot \Delta x_1 + x_1 \cdot \Delta x_2$	$\frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2}$
x^n	$n \cdot (x)^{n-1} \cdot \Delta x$	$n \cdot \frac{\Delta x}{x}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n} \cdot (x)^{\frac{1}{n}-1} \cdot \Delta x$	$\frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2}$
$\frac{x_1}{x_2}$	$\frac{x_2 \cdot \Delta x_1 + x_1 \cdot \Delta x_2}{x_2^2}$	$\frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2}$