

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
ФГБОУ ВО  
«Уральский государственный горный университет»

**ОДОБРЕНО**

Методической комиссией  
факультета геологии и геофизики

« \_\_\_\_\_ » июня 2015 г.

Председатель комиссии

\_\_\_\_\_ проф. В. И. Бондарев

В. И. Горбатов, В. Ф. Полев

**Т Е П Л О Ф И З И К А**

**Основы технической термодинамики, стационарная теплопроводность,  
конвективный теплообмен, элементы теории подобия,  
нестационарная теплопроводность, теплообмен излучением**

*Курс лекций*  
**по теплофизике для студентов  
всех специальностей направления  
20.03.01 – «Техносферная безопасность»**

Г 92

Рецензент: *Ивлиев А. Д.*, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры общей физики РГППУ, г. Екатеринбург

Курс лекций рассмотрен на заседании кафедры физики « 19 » мая 2015 г. (протокол № 80) и рекомендован для издания в УГГУ

**Горбатов В. И., Полев В. Ф.**

Г 92 ТЕПЛОФИЗИКА. Основы технической термодинамики, теплопроводность, конвективный теплообмен, элементы теории подобия, нестационарная теплопроводность, теплообмен излучением / В. И. Горбатов, В. Ф. Полев; Урал. гос. горный ун-т. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2015. – 90 с.

Курс лекций составлен в соответствии с ФГСВО и предназначен для студентов УГГУ очного и заочного обучения направления 20.03.01 – «Техносферная безопасность». Изложены основы технической термодинамики и теории теплообмена. Рассмотрены термические и энергетические характеристики идеальных и реальных газов, смеси идеальных газов, понятие технической работы, циклы двигателей внутреннего сгорания – Отто и Дизеля. В теории теплообмена рассмотрены законы теплопроводности и конвективного теплообмена, теория подобия и ее теоремы, нестационарная теплопроводность, регулярные тепловые режимы, теплообмен излучением, оптическая пирометрия. Учебное пособие выполнено для целей самостоятельного обучения студентов и для более глубокого изучения лекционного материала.

© Горбатов В. И., Полев В. Ф., 2015

© Уральский государственный  
горный университет, 2015

# ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ ТЕРМОДИНАМИКИ

## 1. Термодинамическая система

Термодинамика определяется как наука о взаимопревращениях и передаче энергии. Основу термодинамики составляют два начала (постулата). *Первое начало* устанавливает количественные соотношения при превращениях энергии из одних видов в другие, а *второе начало* определяет условия протекания и направление таких превращений.

Термодинамику в зависимости от круга рассматриваемых вопросов и целей исследования делят на общую, химическую и техническую. В общей термодинамике даются представления об общих теоретических основах термодинамики и о закономерностях превращения энергии в разнообразных физических явлениях, безотносительно к какому-либо конкретному приложению. Химическая термодинамика представляет собой приложение общих термодинамических положений к явлениям, в которых процессы обмена энергией сопровождаются изменениями химического состава участвующих тел.

*Техническая термодинамика* изучает применение законов термодинамики к процессам взаимного превращения теплоты и работы. Объектом изучения в технической термодинамике является какое-либо вещество, выполняющее главную функцию в тепловой машине (т.е. функцию преобразования теплоты в работу): пар, продукты сгорания топлива и т.д. Такое вещество называется *рабочим телом* машины и рассматривается как частный случай термодинамической системы.

*Термодинамической системой* называют совокупность макроскопических тел, которые являются объектом изучения и обмениваются энергией и веществом как друг с другом, так и с окружающей средой. Окружающая среда – тела, не входящие в состав изучаемой системы. Простейшим примером термодинамической системы может служить газ, находящийся в цилиндре под поршнем.

Термодинамическая система, которая совершенно не взаимодействует с окружающей средой (не обменивается с ней веществом и энергией), называется *изолированной* или *замкнутой*.

Термодинамическая система, которая не обменивается с окружающей средой веществом, называется *закрытой*.

Термодинамическая система, которая не обменивается с окружающей средой энергией в виде теплоты, называется *адиабатной*.

Термодинамическая система может быть однородной (гомогенной), либо разнородной (гетерогенной).

*Однородная система* – система, имеющая во всех своих частях одинаковый состав и физические свойства.

*Гетерогенная система* – система, состоящая из нескольких гомогенных частей (фаз) с различными физическими свойствами, отделенных одна от другой видимыми поверхностями раздела (лед и вода, вода и пар).

В термодинамике постулируется, что *изолированная система с течением времени всегда приходит в состояние термодинамического равновесия и нико-*

гда самопроизвольно не может выйти из него.

Достаточными условиями термодинамического равновесия являются равенство давлений и равенство температур термодинамической системы и окружающей среды.

## 2. Термодинамические параметры состояния

Любое равновесное состояние термодинамической системы характеризуется *параметрами состояния*. Основными параметрами являются: давление, температура и удельный объем. Эти параметры в термодинамике принято называть термическими параметрами.

*Давление*  $P$  представляет собой силу, действующую по нормали на единицу поверхности. В системе СИ давление измеряется в паскалях [ $\text{Па}=\text{Н}/\text{м}^2$ ].

Различают давления абсолютное, атмосферное, избыточное и разрежение (вакуум).

Действительное давление рабочего тела на стенки сосуда называют *абсолютным давлением*. *Атмосферным* называется давление атмосферного воздуха на уровне моря. Давление, которое больше атмосферного, называется *избыточным*, а которое меньше – *разрежением*. Атмосферное давление измеряют барометрами, избыточное давление измеряют манометрами, а недостаточное давление измеряют вакуумметрами.

Термодинамическим параметром состояния является только *абсолютное давление*, которое отсчитывается от абсолютного вакуума.

*Удельный объем*  $\nu$  [ $\text{м}^3/\text{кг}$ ] – это объем единицы массы:

$$\nu = V/m,$$

где  $V$  – объем произвольного количества вещества;  $m$  – масса этого вещества.

Величина, обратная удельному объему, называется плотностью. Плотность  $\rho$  [ $\text{кг}/\text{м}^3$ ] – это масса вещества, содержащегося в единице объема:

$$\rho = m/V = 1/\nu.$$

Температура  $T$  – мера степени нагретости равновесной системы. Она определяет тепловое равновесие между телами, находящимися в тепловом контакте, что соответствует равенству их температур, а если они не равны, то температура определяет направление перехода теплоты – от более нагретого тела к менее нагретому.

Температуру невозможно измерить непосредственно. Количественное определение температуры связано с измерением любого линейнозависящего от степени нагретости физического свойства вещества. Так, например, работа газовых и жидкостных термометров основана на тепловом расширении жидкости или газа при увеличении температуры. В термометрах сопротивления используется зависимость от температуры электрического сопротивления металлов и

полупроводников. В термоэлектрических преобразователях (термопарах) измеряется электродвижущая сила, возникающая при нагревании спая двух металлов.

Существует множество температурных шкал. Их многообразие определяется выбором термометрического свойства вещества, конкретной функциональной численной связью температуры с измеряемыми значениями этого свойства и выбором фиксированных (реперных) точек. Приведем лишь две из них.

*Практическая температурная шкала* (шкала Цельсия) базируется на двух реперных точках агрегатного состояния воды: точке таяния льда –  $t = 0^\circ\text{C}$  и точке кипения воды –  $t = 100^\circ\text{C}$ , взятых при нормальном давлении ( $P = 1,013 \cdot 10^5$  Па). В качестве термометрического параметра используют объем жидкости (обычно ртуть или спирт). За  $1^\circ\text{C}$  принимается сотая доля температурного интервала показаний термометра между реперными точками.

*Шкала Кельвина* градуируется так же, как и шкала Цельсия. В качестве термометрического параметра используется объем достаточно разреженных газов, для которых при постоянном давлении выполняется закон Гей-Люссака

$$V = V_0(1 + \alpha t),$$

где  $t$  – температура, определяемая по шкале Цельсия;  $V_0$  – объем газа при  $t = 0^\circ\text{C}$ ;  $\alpha = \frac{1}{273,15}$  – коэффициент теплового расширения, независимый ни от температуры, ни от рода газа. Точка абсолютного нуля  $T = 0$  К принимается равной  $t = -273,15^\circ\text{C}$ , а единица температуры 1 К принимается совпадающей с  $1^\circ\text{C}$ . Очевидно, что

$$T = 273,15 + t.$$

За термодинамический параметр состояния системы принимают температуру, определяемую по шкале Кельвина.

### 3. Термическое уравнение состояния реальных газов

Установлено, что если термодинамическая система однородна и отсутствуют внешние поля (электрическое, магнитное, гравитационное), то ее равновесное состояние однозначно определяется двумя из трех параметров состояния  $P$ ,  $v$ ,  $T$ , так как любой из этих параметров является функцией двух других. Уравнение, устанавливающее связь между ними называется *термическим уравнением состояния*. Следует подчеркнуть, что термодинамика постулирует наличие уравнения состояния, но не определяет его вид. Эти связи можно установить экспериментально или используя *молекулярно-кинетическую теорию* (МКТ) газов, базирующуюся на статистической физике.

Вид уравнений состояний реальных веществ весьма сложен, и к настоящему времени эти уравнения составлены далеко не для всех из них.

В связи с этим термодинамика широко использует физические модели рабочих тел, для которых уравнение состояния выглядит достаточно просто. Исторически первой такой моделью стала модель *идеального газа*. Молекулы такого газа имеют незначительный размер (не имеют своего объема), не взаимодействуют на расстоянии, а взаимодействуют только при столкновениях друг с другом и со стенками сосуда как твердые упругие шарики.

Уравнение состояния идеального газа впервые было получено Клапейроном путем объединения известных экспериментальных газовых законов Бойля-Мариотта, Гей-Люссака и Шарля:

$$PV = mRT, \quad (1)$$

где  $R$  – *удельная* газовая постоянная, зависящая только от химического состава газа.

Менделеев объединил уравнение Клапейрона с законом Авогадро, отнеся его к одному *молю* газа. В соответствии с законом Авогадро при одинаковых давлениях и температурах 1 моль любого газа занимает одинаковый объем  $V_\mu$  и содержит одно и то же число структурных элементов (атомов или молекул)  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup> (постоянная Авогадро). Поэтому величина  $R$  в данном случае будет одинаковой для всех газов и равна  $R_\mu$ . Тогда уравнение (1) запишется в виде:

$$PV_\mu = R_\mu T \quad (2)$$

где  $V_\mu = \frac{V}{m} \cdot \mu$  – объем одного моля газа;  $\mu$  – молярная масса газа, кг/моль;  $R_\mu$  – *универсальная газовая постоянная*.

Уравнение (2) называется уравнением Менделеева – Клапейрона.

При нормальных физических условиях ( $P_0=101332$  Па,  $T_0=273,15$  К) молярный объем равен  $22,41 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>/моль. Подставляя эти величины в (2), получим

$$R_\mu = \frac{P_0 V_\mu}{T_0} = 8,314 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}).$$

Сравнивая выражения (1) и (2) между собой, видим, что удельная газовая постоянная связана с универсальной газовой постоянной соотношением:

$$R = \frac{R_\mu}{\mu}. \quad (3)$$

Умножим левую и правую части уравнения (2) на число молей  $\nu = m/\mu$ . Получим:

$$PV = \frac{m}{\mu} R_\mu T = mRT, \quad (4)$$

где  $V = V_{\mu} \cdot v$ .

Это выражение называется уравнением состояния Менделеева – Клапейрона для произвольного числа молей идеального газа

Согласно МКТ идеальных газов, давление газа является результатом передачи импульса при ударе хаотически движущихся молекул стенкам сосуда и определяется по формуле

$$P = n \frac{m_0 \bar{w}^2}{3} = \frac{2 N m_0 \bar{w}^2}{3 V 2}, \quad (5)$$

где  $n$  – концентрация молекул;  $m_0$  – масса одной молекулы в кг;  $\bar{w}^2$  – среднее значение квадрата скорости молекул,  $(\text{м/с})^2$ .

Уравнение (4) называется *основным уравнением* МКТ идеальных газов. Согласно представлениям МКТ абсолютная температура является мерой средней кинетической энергии поступательного движения молекул идеального газа и определяется как

$$T = \frac{2 m_0 \bar{w}^2}{3k 2}, \quad (6)$$

где  $k = \frac{R_{\mu}}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – постоянная Больцмана.

Из (5) и (6) путем подстановки можно получить термическое уравнение состояния идеального газа (4).

Любой реальный газ с малой плотностью и не слишком низкой температурой, ведет себя как идеальный газ, а его свойства хорошо описываются уравнением (1). Однако с ростом давления и уменьшением температуры требуется более точное термическое уравнение состояния, учитывающее взаимодействие молекул реального газа. До сих пор окончательно вопрос построения уравнения состояния реальных газов окончательно не решен. Уравнение состояния реальных газов получают из гипотетических представлений о структуре газа или получают их экспериментально. Широкое распространение в научных исследованиях и технических расчетах получило термическое уравнение состояния реальных газов – уравнение Ван-дер-Ваальса:

$$\left( P + \frac{a}{v^2} \right) \cdot (v - b) = RT.$$

От уравнения Клапейрона оно отличается введением поправок к давлению  $P$  и к удельному объему  $v$ . Взаимное притяжение молекул создает добавочное давление  $P' = \frac{a}{v^2}$ , обусловленное возникающим внутренним давлением.

Поправка  $b$  учитывает конечность суммарного удельного объема самих молекул. Поправки  $a$  и  $b$  индивидуальны для разных газов, они зависят от свойств данного газа.

Уравнение Ван-дер-Ваальса качественно верно отражает состояние реальных веществ в жидком и газообразном состоянии. Для двухфазных состояний оно неприменимо.

Наиболее полно свойства реальных газов отражает уравнение Майера-Боголюбова:

$$Pv = RT \left( 1 - \sum_i \frac{i}{i+1} \cdot \frac{B_i}{v^i} \right),$$

где  $B_i$  – вириальные коэффициенты, выражающиеся через потенциальную энергию взаимодействия данного газа и его температуру.

Из-за сложности определения вириальных коэффициентов обычно ограничиваются расчетом первых двух из них. В этом случае расчетное уравнение имеет вид

$$Pv = RT \left( 1 - \frac{A}{v} - \frac{B}{v^2} \right),$$

где  $A = \frac{1}{2} B_1$ ,  $B = \frac{2}{3} B_2$  – первый и второй вириальные коэффициенты, являющиеся функцией только температуры.

#### 4. P-v диаграмма воды

Если один из параметров состояния системы является величиной постоянной, то переменных величин будет только две. Тогда их зависимость друг от друга можно изобразить на плоскости в виде *диаграмм состояния*  $P = f(v)$ ,  $P = f(T)$ ,  $v = f(T)$ , которые наглядно показывают изменение состояния данной системы.

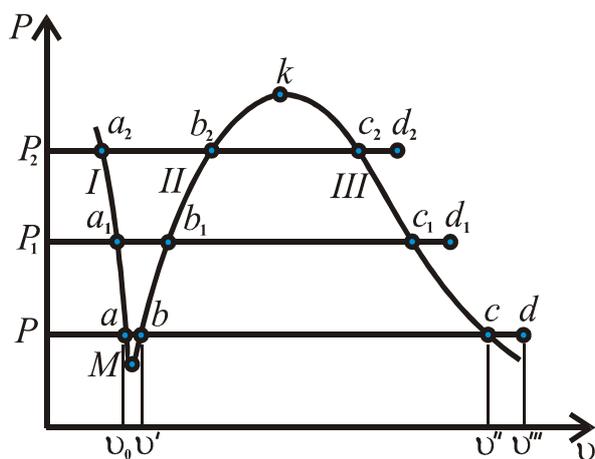


Рис. 1. P-v диаграмма воды

Рассмотрим экспериментальную P-v диаграмму состояния воды, поскольку вода является самым распространенным теплоносителем и средством пожаротушения (рис. 1).

Кривая I показывает зависимость удельного объема воды от давления при температуре *плавления*. Эта изотерма является пограничной кривой: слева – лед, справа – жидкость.

Кривая II характеризует состояние жидкости при температурах *кипения* и называется *пограничной кривой*

*жидкости*: слева жидкость, а справа влажный пар.

Кривая III характеризует состояние сухого насыщенного пара и называется *пограничной кривой пара*.

Пусть в точке  $a$ , координаты которой  $P$  и  $v_0$  (см. рис. 1) жидкость находится при температуре плавления (кривая  $I$ ). Если теперь при постоянном давлении  $P$  ей сообщать теплоту, то температура будет непрерывно повышаться, пока не достигнет температуры кипения (кривая  $II$ ). Также будет увеличиваться и удельный объем от  $v_0$  до  $v'$ . Но поскольку вода имеет аномальные свойства при нагревании от 0 до 4 °С, то удельный объем сначала уменьшается до минимального значения, а только затем увеличивается до  $v'$ .

При дальнейшем подводе тепла начинается процесс парообразования (участок  $b-c$ ), который является одновременно изобарическим и изотермическим. На этом участке жидкость и пар находятся в динамическом равновесии.

Процесс превращения жидкости в пар прекращается в точке  $c$  (кривая  $III$ ). Пар в этой точке становится сухим насыщенным с удельным  $v''$ . Если продолжать подводить тепло при постоянном давлении, то с ростом температуры получится перегретый пар (точка  $d$ ) с удельным объемом  $v'''$ .

Если взять воду при температуре кипения с давлением  $P_1 > P$ , то точка  $b_1$  лежит правее точки  $b$ , так как с увеличением давления увеличивается температура кипения всех жидкостей.

В то же время участок  $b_1-c_1$  становится более коротким чем  $b-c$  и далее с повышением давления пограничные кривые  $II$  и  $III$  сходятся в точке  $k$ , которая называется *критической точкой*.

Эта точка характеризует критическое состояние, при котором исчезает различие в свойствах пара и жидкости. Для воды эти критические параметры имеют следующие значения:  $P_k = 22,115$  МПа,  $T_k = 647,27$  К,  $v_k = 3,147 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>/кг. Очевидно, что критическая температура есть максимальная температура жидкости и ее насыщенного пара. При температурах выше критической никаким сжатием не может быть осуществлено ожижение воды.

Из рисунка 1 видно, что с понижением давления кривые  $I$  и  $II$  сближаются и сходятся в точке  $M$ , которая называется *тройной точкой*, в ней вещество существует одновременно в трех состояниях: твердом, жидком, газообразном. В тройной точке каждое вещество имеет только ему присущие значения давления и температуры. Например, для воды  $P_M = 611$  Па,  $T_M = 273,16$  К,  $v_M = 10^{-3}$  м<sup>3</sup>/кг.

## 5. Смеси идеальных газов. Закон Дальтона. Закон Амага

На практике приходится иметь дело не с чистыми газами, а их смесями, такими как воздух, природный газ, продукты сгорания топлив – угля, мазута, бензина, керосина и т. п. Газовой смесью называется смесь отдельных газов, не вступающих между собой ни в какие химические реакции.

Для газовых смесей справедливы следующие положения.

1. Каждый газ (компонент), входящий в смесь, имеет температуру, равную температуре смеси.

2. Любой из газов, входящих в смесь, равномерно распространяется по всему объему смеси и поэтому объем каждого газа равен объему всей смеси.

3. Каждый из газов, входящих в смесь, подчиняется своему уравнению состояния.

Установим параметры, определяющие состояние газовых смесей. Для этого рассмотрим термодинамическую систему, состоящую из  $N$  компонентов различных газов. Обозначим массы компонентов газа через  $m_1, m_2, \dots, m_N$ , а их количество вещества – через  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N$ .

Качественно смесь газов может быть задана массовыми или мольными долями.

*Массовая доля* представляет собой отношение массы  $i$ -той компоненты смеси к массе всей смеси:

$$g_1 = \frac{m_1}{m_{\text{см}}}, g_2 = \frac{m_2}{m_{\text{см}}}, \dots, g_N = \frac{m_N}{m_{\text{см}}},$$

где

$$m_{\text{см}} = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_N = \sum_{i=1}^N m_i. \quad (7)$$

Сумма всех массовых долей равна единице:  $\sum_{i=1}^N g_i = 1$ .

*Молярные доли* каждого компонента смеси можно определить как

$$r_1 = \frac{\nu_1}{\nu_{\text{см}}}, r_2 = \frac{\nu_2}{\nu_{\text{см}}}, \dots, r_N = \frac{\nu_N}{\nu_{\text{см}}},$$

где  $\nu_{\text{см}} = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_N = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{\mu_i}$ ;  $\mu_i$  – молярная масса  $i$ -й компоненты смеси.

При нормальных условиях – не слишком низких температурах и не высоких давлениях – данную систему можно рассматривать смесь идеальных газов. В состоянии термодинамического равновесия при температуре  $T_{\text{см}}$  давление смеси по *закону Дальтона равно сумме парциальных давлений её компонентов*:

$$P_{\text{см}} = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_N = \sum_{i=1}^N P_i,$$

где *парциальное давление*  $P_i$  – давление, которое производил бы газ, входящий в состав газовой смеси, если бы он один занимал объем, равный объему смеси при той же температуре.

В некоторых случаях состав смеси удобно задавать *объемными долями*

$$y_1 = \frac{V_1}{V_{\text{см}}}, y_2 = \frac{V_2}{V_{\text{см}}}, \dots, y_N = \frac{V_N}{V_{\text{см}}},$$

где  $V_i$  – *приведенный объем*  $i$ -й компоненты – это такой объем, который занимал бы данный газ, если бы его давление было не  $P_i$ , а  $P_{см}$ . По закону Амага *сумма приведенных объемов равна объему смеси*

$$V_{см} = \sum_{i=1}^N V_i.$$

Приведенный объем получается следующим образом. Берется отдельный газ до смешения при его парциальном давлении  $P_i$  с температурой  $T_{см}$ , объемом смеси  $V_{см}$  и изотермически сжимается до давления  $P_{см}$ . Для действительного состояния связь между параметрами определяется уравнением  $P_i V_{см} = m_i R_i T_{см}$ , а для условного –  $P_{см} V_i = m_i R_i T_{см}$ . Из равенства правых частей этих уравнений следует, что  $P_i V_{см} = P_{см} V_i$ .

Отсюда находим две важные формулы для определения приведенного объема и парциального давления  $i$ -той компоненты смеси:

$$V_i = V_{см} \frac{P_i}{P_{см}} \quad \text{и} \quad P_i = P_{см} \frac{V_i}{V_{см}} = P_{см} \cdot y_i.$$

По закону Авогадро при одинаковых давлениях и температурах молярные объемы газов  $V_{\mu}$  одинаковы, тогда

$$V_i = V_{\mu} \cdot v_i, \quad V_{см} = V_{\mu} \cdot v_{см}.$$

Разделим первое выражение на второе. Получим

$$\frac{V_i}{V_{см}} = \frac{v_i}{v_{см}} \quad \text{или} \quad y_i = r_i,$$

т. е. *молярные доли численно равны объемным долям.*

## 6. Уравнение состояния смеси идеальных газов

Если рабочим телом является смесь невзаимодействующих идеальных газов, то такая смесь также является идеальным газом и подчиняется соответственно уравнению Менделеева – Клапейрона

$$P_{см} V_{см} = m_{см} R_{см} T_{см} = \frac{m_{см}}{\mu_{см}} R_{\mu} T_{см},$$

где  $\mu_{см}$  – *кажущаяся молярная масса смеси*, так как не существует ни одного химически однородного соединения с такой молярной массой.

Чтобы применить уравнение Менделеева – Клапейрона для смеси идеальных газов необходимо определить кажущуюся молярную массу смеси.

При массовом задании газовой смеси молярная масса рассчитывается по формуле:

$$\mu_{\text{см}} = \frac{1}{\frac{g_1}{\mu_1} + \frac{g_2}{\mu_2} + \dots + \frac{g_N}{\mu_N}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N g_i / \mu_i}.$$

Если задан молярный состав смеси, то  $\mu_{\text{см}}$  определяется следующим образом:

$$\mu_{\text{см}} = \frac{v_1}{v_{\text{см}}} \mu_1 + \frac{v_2}{v_{\text{см}}} \mu_2 + \dots + \frac{v_N}{v_{\text{см}}} \mu_N = \sum_{i=1}^N r_i \mu_i,$$

т. е. кажущаяся молярная масса смеси равна сумме произведений молярных масс газов входящих в смесь, на их мольные доли.

Зная молярную массу смеси, можно легко установить связь между молярными и массовыми долями:

$$g_i = \frac{m_i}{m_{\text{см}}} = \frac{v_i \mu_i}{v_{\text{см}} \mu_{\text{см}}} = r_i \frac{\mu_i}{\mu_{\text{см}}},$$

или наоборот

$$r_i = \frac{v_i}{v_{\text{см}}} = \frac{m_i / \mu_i}{m_{\text{см}} / \mu_{\text{см}}} = g_i \frac{\mu_{\text{см}}}{\mu_i}.$$

Если молярная масса смеси найдена, то по формуле (3) можно вычислить газовую постоянную смеси:

$$R_{\text{см}} = \frac{8,314}{\mu_{\text{см}}}.$$

После нахождения  $R_{\text{см}}$  и  $\mu_{\text{см}}$  смесь рассматривается как однородный газ.

## 7. Энергия, работа, теплота

Энергия является универсальной мерой различных форм движения материи. Увеличение или уменьшение энергии системы означает изменение в ней движения в количественном и качественном соотношениях. Изменение энергии в системе происходит тогда, когда она вступает во взаимодействие с другими системами. При этом происходит передача энергии, которая может осуществляться двумя способами – *теплообменом* или посредством *совершения работы*. Первый способ характеризуется теплотой  $Q$  [Дж], второй – работой  $A$  [Дж]. Теплота и работа являются *функциями процесса*, т. е. их значения будут зависеть от пути перехода системы из одного равновесного состояния в другое.

Пусть газ (рабочее тело) находится в цилиндре под поршнем,двигающимся без трения. Когда поршень находится в положении с координатой  $x_2$  давление внутри цилиндра равно давлению снаружи. Переместим поршень в положение  $x_1$ , действуя на него силой  $F$  (например, положим груз на поршень). При этом давление газа изменится. Поскольку равновесие внутри цилиндра достигается быстрее, чем время перемещения поршня, то процесс расширения или сжатия газа можно считать *квазистатическим*. Если теперь снять действующую силу, то газ совершит работу.

Элементарную работу при бесконечно малом перемещении  $dx$  можно определить как:

$$\delta A = Fdx = PSdx = PdV ,$$

где  $P$  – давление внутри цилиндра;  $S$  – площадь поршня;  $dV$  – приращение объема.

Конечная работа квазистатического процесса будет равна

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} PdV .$$

В технической термодинамике эта работа называется *деформационной*.

На практике все машины работают периодически (циклически) со *сменяющимся рабочим телом*. Например, у двигателей внутреннего сгорания цилиндры снабжены входными и выходными клапанами, которые позволяют выпускать отработанную рабочую смесь и вводить в цилиндр новую порцию рабочей смеси.

Пусть рабочее тело поступает в цилиндр под постоянным давлением  $P_1$ , а вытесняется из цилиндра под постоянным давлением  $P_2$ . При втекании оно совершает работу над поршнем равную  $A_1 = P_1V_1$  (рис. 2). Затем при закрытых клапанах рабочее тело расширяясь (сгорает рабочая смесь) совершает работу  $A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} PdV$ . Далее при меньшем давлении  $P_2$  поршень совершает отрицательную (над рабочим телом) работу вытеснения  $A_2 = -P_2V_2$ . За цикл рабочее тело передает поршню технически полезную (*располагаемую*) работу

$$A_{\text{техн}} = P_1V_1 + \int_{V_1}^{V_2} PdV - P_2V_2 .$$

Если применить метод интегрирование по частям для интеграла

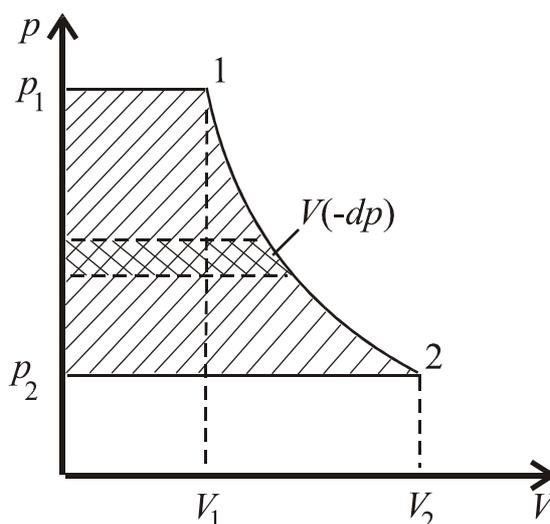


Рис. 2. К определению технической работы

$$\int_{V_1}^{V_2} PdV = P_2V_2 - P_1V_1 - \int_{P_1}^{P_2} VdP,$$

то располагаемую работу можно определить как

$$A_{\text{техн}} = - \int_{P_1}^{P_2} VdP.$$

На диаграмме состояния (рис. 2) располагаемая работа отображена заштрихованной областью.

Передача энергии в форме теплоты между взаимодействующими системами происходит только при наличии разности температур между ними. Этот процесс передачи энергии представляет собой совокупность микроскопических процессов (передача энергии при соударении молекул, теплопроводность и излучение). Калориметрическим путем установлено, что элементарное количество теплоты, которое может получить или отдать одна из взаимодействующих систем, пропорционально изменению её температуры

$$\delta Q = CdT.$$

Коэффициент пропорциональности  $C$  называется теплоемкостью термодинамической системы (тела).

## 8. Внутренняя энергия, ее свойства

В термодинамике полная энергия системы складывается из внутренней энергии  $U$ , кинетической энергии движения системы  $E_k$  как единого целого и потенциальной энергии системы во внешних силовых полях  $E_{\text{п}}$ .

Внутренняя энергия  $U$  термодинамической системы состоит из энергии беспорядочного, теплового движения частиц, т. е. из кинетической энергии поступательного, вращательного и колебательного движений молекул, потенциальной энергии их взаимодействия, внутриатомной и внутриядерной энергии частиц из которых состоят атомы.

Опытным путем установлено, что изменение внутренней энергии  $\Delta U$  не зависит от типа процесса, а, следовательно,  $U$  является *функцией состояния* и определяется лишь начальными и конечными параметрами состояния системы.

$$\Delta U = U_2 - U_1.$$

Поскольку из взаимосвязанных термических параметров состояния  $P$ ,  $V$ ,  $T$  состояние системы определяется двумя независимыми параметрами, то выбрав  $V$  и  $T$ , получим:

$$U = f(T, V).$$

Внутренняя энергия обладает свойством *аддитивности*. Для сложной системы *внутренняя энергия равна сумме внутренних энергий ее частей*.

Если термодинамическая система находится в состоянии равновесия, и отсутствуют внешние силы, то внутренняя энергия системы совпадает с полной энергией системы  $E = U$ .

Найдем внутреннюю энергию одного моля идеального газа. Перед этим заметим, что для молекул идеального газа потенциальная энергия взаимодействия на расстоянии не учитывается, поэтому внутренняя энергия не будет зависеть от среднего расстояния между молекулами  $d = \sqrt[3]{V}$ , а, следовательно, и от объема.

Теперь воспользуемся законом Больцмана о равнораспределении энергии по степеням свободы молекул. Закон равнораспределения гласит: для статистической системы (системы, состоящей из большого числа частиц) в состоянии термодинамического равновесия на каждую поступательную и на каждую вращательную степень свободы в среднем приходится кинетическая энергия  $\frac{1}{2}kT$ , а на каждую колебательную степень свободы – энергия  $kT$ , где  $k$  – постоянная Больцмана.

Тогда средняя энергия одной молекулы любого идеального газа будет равна:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2}kT,$$

где  $i = n_{\text{пост}} + n_{\text{вращ}} + 2n_{\text{колеб}}$  – сумма числа поступательных, вращательных и колебательных степеней свободы молекулы. Для моля вещества с количеством молекул  $N_A$  получим:

$$U_{\mu} = \langle \varepsilon \rangle \cdot N_A = \frac{i}{2}kN_A T = \frac{i}{2}R_{\mu}T,$$

т. е. внутренняя энергия идеального газа зависит от числа степеней свободы молекул (сорта молекул) и от температуры.

Для  $\nu = \frac{m}{\mu}$  молей газа внутренняя энергия будет равна

$$U = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R_{\mu} T = m \frac{i}{2} RT.$$

Внутренняя энергия реального газа кроме кинетической энергии теплового движения его молекул определяется еще потенциальной энергией межмолекулярного взаимодействия, обусловленного силами притяжения между молекулами. Эта потенциальная энергия, приходящаяся на один моль реального газа, равна

$$W_p = \int P' dV = -\frac{a}{V_{\mu}},$$

где  $a$  – постоянная для каждого газа величина, определяемая опытным путем.

Учитывая оба слагаемых, получим, что внутренняя энергия одного моля реального газа

$$U_{\mu} = \frac{i}{2} R_{\mu} T - \frac{a}{V_{\mu}}$$

зависит от сорта молекул, температуры и объема.

## 9. Первое начало термодинамики

Закон сохранения и превращения энергии в термодинамике называется *первым началом термодинамики*. Он определяет баланс энергии при всех взаимодействиях внутри системы, а также между термодинамической системой и окружающей средой. Обозначим подведенную к системе энергию через  $Q$ . Часть этой энергии может совершить внешнюю работу  $A$ , т. е. оказаться отведенной наружу. Остаток энергии, подведенный в виде тепла, может запасаться внутри системы как внутренняя энергия  $U$  и увеличить ее величину на  $\Delta U$ . Из этих соображений получаем:

$$Q = A + \Delta U .$$

Таким образом, *первое начало термодинамики* для закрытой системы формулируется следующим образом: *количество теплоты, сообщенное системе, идет на приращение внутренней энергии системы и на совершение системой работы против внешних сил*. Работа  $A$ , совершаемая против внешних сил, считается положительной.

Запишем первое начало термодинамики в дифференциальной форме:

$$\delta Q = \delta A + dU = PdV + dU . \quad (8)$$

В правой части данного выражения прибавим и отнимем выражение  $VdP$  :

$$\delta Q = dU + PdV + VdP - VdP .$$

Учитывая, что  $PdV + VdP = d(PV)$  получим:

$$\delta Q = dU + d(PV) - VdP = d(U + PV) - VdP .$$

Обозначим

$$H = U + PV . \quad (9)$$

Введенная функция  $H$  называется *энтальпией*. Ее свойства будут рассмотрены ниже. Тогда

$$\delta Q = dH - VdP = dH + \delta A_{\text{техн}} . \quad (10)$$

Это уравнение представляет собой *вторую математическую форму записи уравнения первого начала термодинамики*.

## 10. Энтальпия и ее свойства

Согласно выражению (9) энтальпия равна внутренней энергии тела, сложенной с величиной  $PV$ , представляющей собой работу, которую необходимо затратить, чтобы ввести рассматриваемое тело с объемом  $V$  в окружающую среду, имеющую давление  $P$  и находящуюся с телом в равновесном состоянии. Эта работа, отдаваемая среде, называется *потенциальной энергией давления*. Следовательно, энтальпия является суммой внутренней энергии тела и потенциальной энергии давления среды.

Если в термодинамическом процессе давление остается постоянным, то уравнение (10) примет вид  $\delta Q = dH$ . При переходе системы из состояния 1 в состояние 2 получим:

$$Q = H_2 - H_1.$$

Таким образом, *энтальпия* (синонимы: *тепловая функция* или *теплосодержание*) – это энергия, которая доступна для преобразования в теплоту при постоянном давлении.

В случае отсутствия теплообмена с окружающей средой уравнение (10) будет иметь вид  $\delta A_{\text{техн}} = -dH$ , или для конечного процесса:

$$A_{\text{техн}} = H_1 - H_2.$$

Следовательно, при  $Q = 0$  техническая (располагаемая) работа равна разности энтальпий в начале и конце процесса.

Физический смысл энтальпии заключается в том, что она является энергией расширенной системы – тела и окружающей среды.

Энтальпия, как и внутренняя энергия не зависит от типа процесса, а является функцией состояния системы – ее изменение  $\Delta H$  зависит только начальных и конечных состояний:

$$\Delta H = H_2 - H_1.$$

Энтальпию и внутреннюю энергию называют калорическими параметрами состояния.

Энтальпия величина аддитивная, т. е. для сложной системы, состоящей из  $N$  независимых частей

$$H = H_1 + H_2 + \dots + H_N = \sum_{i=1}^N H_i.$$

Энтальпия идеального газа, так же как и внутренняя энергия, является функцией только температуры и не зависит от объема и давления, так как отсутствуют силы взаимодействия между молекулами. Действительно, для одного моля идеального газа

$$H_{\mu} = U_{\mu}(T) + PV_{\mu} = U_{\mu}(T) + R_{\mu}T = \frac{i+2}{2} R_{\mu}T.$$

Значения энтальпии для паров, газов и газовых смесей приводятся в технической и справочной литературе. Пользуясь этими данными, можно определять количество теплоты, участвующее в процессе при постоянном давлении.

## 11. Теплоемкость газов, жидкостей и твердых тел

Во многих теплофизических задачах необходимо задание удельных калорических величин – теплоемкостей.

*Теплоемкостью* какого-либо тела называется физическая величина, численно равная количеству теплоты, которое нужно сообщить телу, чтобы повысить его температуру на 1 К

$$C = \frac{\delta Q}{dT},$$

где  $\delta Q$  – элементарное количество теплоты;  $dT$  – элементарное изменение температуры;  $C$  – *полная теплоемкость тела* (рабочего тела, системы).

Теплоемкость является свойством вещества.

В зависимости от количественной единицы вещества, к которому подводится теплота, различают:

*удельную* (массовую) *теплоемкость*  $c_{уд}$  [Дж/(кг·К)] – теплоемкость 1 кг вещества

$$c_{уд} = \frac{\delta Q}{m dT};$$

*молярную теплоемкость*  $c_{\mu}$  [Дж/(моль·К)] – теплоемкость 1 моля вещества

$$c_{\mu} = \frac{\delta Q}{\frac{m}{\mu} dT};$$

*объемную теплоемкость*  $c^*$  [Дж/(м<sup>3</sup>·К)] – теплоемкость 1 м<sup>3</sup> вещества при нормальных условиях  $P = 1,013 \cdot 10^5$  Па,  $T = 273,16$  К

$$c^* = \frac{\delta Q}{V dT}.$$

Между указанными теплоемкостями существует следующая связь:

$$c_{уд} = \frac{c^*}{\rho_0}; \quad c_{уд} = \frac{c_{\mu}}{\mu}. \quad (11)$$

Для газов теплоемкость также зависит от процесса, при котором осуществляется теплоотдача, при этом выделяют *изобарную*  $c_p$  и *изохорную* теплоемкость  $c_v$ . Такое разделение связано со свойством газов сильно расширяться при

нагревании, тогда как жидкости и твердые тела расширяются при нагревании незначительно.

Определим вначале *изохорную* теплоемкость  $c_v$ . Для этого воспользуемся первым началом термодинамики (8), записанным для 1 моля газа в виде:

$$\delta Q = dU_\mu + A = dU_\mu(T) + PdV_\mu.$$

Если подводить некоторое количество теплоты к газу при постоянном объеме ( $dV_\mu = 0$ ), то теплота будет затрачиваться только на приращение внутренней энергии газа. В этом случае

$$c_{\mu V} = \left( \frac{\delta Q}{dT} \right)_V = \left( \frac{\partial U_\mu}{\partial T} \right)_V = \frac{dU_\mu}{dT} = \frac{i}{2} R_\mu.$$

Определим теперь *изобарную* теплоемкость  $c_p$ . Для этого воспользуемся второй формулировкой первого начала термодинамики (10), который для 1 моля газа запишется в виде:

$$\delta Q = dH_\mu + \delta A_{\text{техн}} = dH_\mu(T) - V_\mu dP.$$

Если подводить некоторое количество теплоты к газу при постоянном давлении ( $dP = 0$ ), то теплота будет затрачиваться только на приращение энтальпии. Тогда

$$c_{\mu P} = \left( \frac{\delta Q}{dT} \right)_P = \left( \frac{\partial H_\mu}{\partial T} \right)_P = \left( \frac{dH_\mu}{dT} \right) = \frac{i+2}{2} R_\mu.$$

Отсюда видно, что  $c_{\mu P} - c_{\mu V} = R_\mu$ . Это соотношение называется *уравнением Майера*. Зная молярные теплоемкости, можно по формулам (11) рассчитать удельные и объемные теплоемкости в том или ином процессе.

Из вышеприведенных формул следует, что величина теплоемкости зависит только от степеней свободы молекул газа (сорта газа). Например, для двухатомного газа, обладающего тремя степенями свободы поступательного, двумя степенями свободы вращательного и одной степенью свободы колебательного движения, изохорная теплоемкость  $c_{\mu V} = \frac{7}{2} R_\mu$ . Однако, согласно экспериментальным данным  $c_{\mu V} \approx \frac{5}{2} R_\mu$ . Такое расхождение связано с тем, что энергии теплового движения молекул при обычных температурах недостаточно для возбуждения колебаний атомов в молекулах. Отсюда следует, что теплоемкость идеального газа зависит от температуры, а реального газа еще и от давления.

Для жидких и кристаллических веществ, учитывая только колебательные степени свободы, молярная теплоемкость должна быть равна  $c_{\mu V} = 3R_{\mu}$  для химически простых веществ (закон Дюлонга-Пти), и  $c_{\mu V} = 3nR_{\mu}$  для химически сложных веществ (закон Неймана-Коппа), где  $n$  – число атомов в молекуле соединения. В действительности эти значения – лишь предел, к которому стремится теплоемкость твердых тел при повышении температуры. У большинства металлов и некоторых простых соединений ( $\text{NaCl}$ ,  $\text{PbCl}_2$ ) он достигается уже при обычных температурах; у сложных соединений этот предел фактически не достижим, т. к. раньше наступает плавление вещества или его разложение.

Вблизи абсолютного нуля теплоемкость всех твердых тел пропорциональна  $T^3$ , а при высоких температурах, хотя и незначительно, растет примерно линейно. Такое поведение было объяснено квантовой теорией теплоемкости, созданной Эйнштейном и Дебаем, где учитывается квантование энергии колебательного движения.

В технических расчетах для температур выше комнатных часто принимают линейную зависимость теплоемкости от температуры

$$c = c_0 + a \cdot T ,$$

где  $c_0$  – массовая теплоемкость газа при  $T = 273$  К;  $a$  – постоянная, полученная опытным путем.

При анализе реальных процессов приходится иметь дело со смесями газов, а в справочниках приводятся теплоемкости только для чистых компонентов смеси. В связи с этим необходимо уметь определять теплоемкость газовой смеси.

Если смесь газов задана массовыми долями, то удельная теплоемкость смеси определяется по формуле

$$c_{\text{см}} = \sum_{i=1}^N g_i c_i .$$

Если известны мольные доли (или задан объемный состав смеси), то молярная теплоемкость будет определяться как

$$c_{\mu \text{ см}} = \sum_{i=1}^N r_i c_{\mu i} .$$

Отсюда видно, что теплоемкость смеси определяется как сумма произведений теплоемкостей газов, составляющих смесь, на их массовые и мольные (объемные) доли.

Аналогичным образом определяется теплоемкость жидких и твердых растворов (металлических сплавов).

## 12. Обратимые и необратимые процессы

Термодинамическая система будет находиться в равновесном состоянии, если во всех точках системы будут одинаковая температура и одинаковое давление.

Изменение состояния термодинамической системы при взаимодействии ее с окружающей средой происходит в результате термодинамического процесса. Всякий процесс перехода системы из одного состояния в другое, связан с нарушением равновесия системы. Для системы, находящейся в таком неустойчивом состоянии не может быть применено уравнение состояния до тех пор, пока система не придет в состояние равновесия. Чтобы система успевала в каждой точке перехода приходить в равновесное состояние нужно, чтобы процесс протекал бесконечно медленно. Процесс, в ходе которого в системе в каждый момент времени в системе успевает установиться равновесие, называется *равновесным*.

Бесконечно медленное протекание процесса в случае взаимодействия с окружающей средой возможно, если температура и давление в системе бесконечно мало отличаются от температуры и давления окружающей среды. Все реальные процессы протекают при конечной разности данных параметров. Следовательно, реальные процессы всегда неравновесные.

Реальные процессы, близкие к равновесным, называются *квазистатическими*. Квазистатические процессы обладают свойством *обратимости*.

*Обратимыми* называются процессы, осуществление которых возможно в прямом и обратном направлениях, причем таким образом, что в обратном процессе система проходит через те же промежуточные состояния, что и в прямом процессе, но лишь в обратной последовательности. При этом работа, совершаемая в обратном процессе внешней средой, будет равна работе, осуществляемой в прямом процессе рабочим телом.

Процесс, при котором система возвращается в исходное состояние, называется *круговым процессом* или *циклом*. На диаграммах состояния, цикл называется *прямым*, если он протекает по движению часовой стрелки и *обратным*, если против часовой стрелки.

Обратимые процессы – это идеализированные процессы. Действительные процессы всегда в большей или меньшей степени необратимы, т. е. они могут идти самостоятельно только в одном направлении. Для обратного протекания процесса необходима затрата энергии извне. Таким образом, *если в окружающей систему среде происходят изменения, то процесс будет необратимым*.

Круговые процессы или циклы играют важную роль при изучении тепловых машин. Цикл, состоящий из обратимых процессов, называется *обратимым*. Если хотя бы один процесс, входящий в цикл необратим, то цикл называется *необратимым*. При совершении цикла система приходит в первоначальное состояние, при этом изменение любого термодинамического параметра за цикл, равно нулю.

### 13. Второй закон термодинамики

В термодинамике доказывается, что элементарное количество теплоты  $\delta Q$ , сообщенное термодинамической системе в квазистатическом процессе при температуре  $T$ , можно преобразовать в полный дифференциал, если разделить  $\delta Q$  на эту температуру.

Обозначим полный дифференциал через  $dS$ , тогда

$$dS = \frac{\delta Q}{T},$$

где  $S$  – функция состояния, называемая *энтропией*.

Для равновесных процессов, происходящих внутри *изолированной* термодинамической системы, изменение энтропии равно нулю.

При неравновесных процессах наблюдается возрастание энтропии. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим процесс неравновесного теплообмена между двумя телами 1 и 2, помещенными в теплоизолированную оболочку. Пусть тело 1 имеет температуру  $T_1$ , а тело 2 – температуру  $T_2$  ( $T_1 > T_2$ ). Тогда между телами возникнет неравновесный теплообмен и первое тело отдаст, а второе тело получит некоторое количество тепла  $\delta Q$ . Энтропия первого тела уменьшится на величину  $dS_1$  ( $dS_1 < 0$ ), а энтропия второго тела увеличится на  $dS_2$  ( $dS_2 > 0$ ).

Запишем выражения, определяющие величину  $\delta Q$  для первого и второго тела:

$$-\delta Q = T_1 dS_1; \quad \delta Q = T_2 dS_2.$$

Теперь сложим их. Получим:

$$0 = T_1 dS_1 + T_2 dS_2.$$

Отсюда

$$|dS_2| = \frac{T_1}{T_2} |dS_1|.$$

Поскольку  $T_1/T_2 > 1$ , то получается, что

$$|dS_2| > |dS_1|.$$

Изменение энтропии всей системы равно сумме изменений энтропий первого и второго тела

$$dS = dS_1 + dS_2.$$

Учитывая знаки  $dS_1$  и  $dS_2$  и предыдущее неравенство, приходим к заклю-

чению, что

$$dS > 0.$$

Этот принцип, установленный М. Планком, согласно которому *при любых неравновесных процессах энтропия изолированной системы возрастает*, составляет одну из самых корректных формулировок *второго закона термодинамики*.

Более широко трактуется этот закон Больцманом: *природа стремится от состояний менее вероятных к состояниям более вероятным, вероятность обратных процессов ничтожна*.

#### 14. Политропический процесс

*Политропическими* называются процессы, при протекании которых теплоемкость системы остается постоянной ( $c = \text{const}$ ). Политропы – это кривые, описывающие газовые процессы, в которых происходит изменение всех термодинамических параметров.

Получим уравнение *политропы* для идеального газа. Для этого воспользуемся двумя формулировками первого начала термодинамики, записанными для 1 кг массы газа:

$$dQ = cdT = c_V dT + Pdv;$$

$$dQ = cdT = c_P dT - \nu dP,$$

где  $c$  – удельная теплоемкость политропического процесса. Разделим второе уравнение на первое:

$$\frac{c - c_P}{c - c_V} = -\frac{\nu dP}{Pdv}.$$

Обозначая  $\frac{c - c_P}{c - c_V} = n$ , получим

$$\frac{nd\nu}{\nu} = -\frac{dP}{P}.$$

После интегрирования найдем  $n \ln \nu + \ln P = \text{const}$ , или

$$P\nu^n = \text{const}.$$

Полученное уравнение является *уравнением политропического процесса*, где  $n$  - показатель политропы. Используя уравнение состояния идеального газа (3), можно легко получить уравнение политропического процесса, выраженное через другие термодинамические параметры состояния:

$$T\nu^{n-1} = \text{const}; \quad TP^{\frac{1-n}{n}} = \text{const}.$$

Выразим теплоемкость идеального газа в политропном процессе через известную изохорную теплоемкость. Из выражения для показателя политропы имеем

$$c = \frac{c_V}{n-1} \left( n - \frac{c_P}{c_V} \right).$$

Обозначим отношение теплоемкостей в правой части выражения как  $\gamma = c_P/c_V$ , где  $\gamma$  – *показатель адиабаты*. Тогда

$$c = c_V \cdot \frac{n - \gamma}{n - 1}.$$

## 15. Анализ изопроцессов с идеальным газом

*Изопроцессами* называются процессы, протекающие при постоянстве одного или нескольких параметров состояния системы.

Для всех рассматриваемых изопроцессов устанавливается общий метод исследования.

1. Определяются изменения внутренней энергии и энтальпии по формулам

$$\Delta U = \int_{T_1}^{T_2} c_V m dT, \quad \Delta H = \int_{T_1}^{T_2} c_P m dT.$$

2. Находится количество теплоты, участвующее в процессе

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} c_x m dT,$$

где  $c_x$  – удельная теплоемкость изопроцесса.

3. Определяются деформационная и располагаемая (техническая) работа газа по формулам

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P dV, \quad A_{\text{техн}} = - \int_{P_1}^{P_2} V dP.$$

Для политропного процесса с идеальным газом массой  $m$  получим:

$$Q = cm\Delta T = cm(T_2 - T_1) = c_V m \frac{n - \gamma}{n - 1} (T_2 - T_1);$$

$$\Delta U = c_V m \Delta T = c_V m (T_2 - T_1);$$

$$A = Q - \Delta U = \frac{mR}{n-1}(T_2 - T_1) = \frac{1}{n-1}(P_1V_1 - P_2V_2) = \frac{P_1V_1}{n-1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} \right];$$

$$\Delta H = c_p m(T_2 - T_1);$$

$$A_{\text{техн}} = nA,$$

где  $T_1, T_2$  – начальная и конечная температура газа в процессе;  $V_1, V_2$  – начальный и конечный объем газа в процессе;  $P_1, P_2$  – начальное и конечное давление газа в процессе.

Показатель политропы  $n$  может меняться от 0 до  $\infty$ . Рассмотрим частные случаи.

1. При  $n=0$  уравнение политропного процесса  $Pv^n = \text{const}$  переходит в уравнение изобарного процесса  $P = \text{const}$ . В этом случае  $c = c_p$ ;

$$Q = c_p m(T_2 - T_1); \quad \Delta U = c_v m(T_2 - T_1); \quad A = P(V_2 - V_1);$$

$$\Delta H = c_p m(T_2 - T_1); \quad A_{\text{техн}} = 0.$$

2. При  $n=1$  уравнение политропного процесса  $Pv = \text{const}$  переходит в уравнение изотермического процесса  $T = \text{const}$ . Тогда  $c \rightarrow \infty$ ;

$$\Delta U = 0; \quad A = mRT \ln \frac{V_2}{V_1}; \quad Q = A;$$

$$\Delta H = 0; \quad A_{\text{техн}} = A.$$

3. При  $n = \gamma$  уравнение политропного процесса  $Pv^n = \text{const}$  переходит в уравнение адиабатного процесса  $Pv^\gamma = \text{const}$ . В этом случае  $c = 0$ ;

$$Q = 0; \quad \Delta U = c_v m(T_2 - T_1);$$

$$A = \frac{mR}{\gamma-1}(T_2 - T_1) = \frac{1}{\gamma-1}(P_1V_1 - P_2V_2) = \frac{P_1V_1}{\gamma-1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right];$$

$$\Delta H = c_p m(T_2 - T_1); \quad A_{\text{техн}} = \gamma A.$$

4. При  $n = \infty$  уравнение политропного процесса  $Pv^n = \text{const}$  переходит в уравнение изохорного процесса  $V = \text{const}$ . В этом случае  $c = c_v$ ;

$$Q = c_v m(T_2 - T_1); \quad \Delta U = c_v m(T_2 - T_1); \quad A = 0;$$

$$\Delta H = c_p m(T_2 - T_1); \quad A_{\text{техн}} = -V(P_2 - P_1).$$

## 16. Тепловой двигатель. Цикл Карно. КПД цикла

Двигатель представляет собой систему, совершающую многократно круговой процесс (цикл). *Тепловым двигателем* называется периодически действующая машина, совершающая работу за счет подведенного извне тепла. Чтобы работа за цикл была больше нуля, рабочему телу в ходе расширения надо сообщать тепло, а в ходе сжатия отнимать от него тепло. Если  $Q_1$  – тепло, получаемое рабочим телом при расширении, а  $Q_2$  – тепло, отнятое в ходе сжатия, то работа  $A$  будет равна разности этих теплот:

$$A = Q_1 - Q_2.$$

Понятно, что чем больше получаемая извне теплота  $Q_1$  превращается в полезную работу  $A$ , тем более выгодна эта машина. Выгодность определяется *коэффициентом полезного действия*  $\eta$  (КПД), который равен отношению совершаемой за цикл работы  $A$  к получаемому за цикл теплу  $Q_1$ :

$$\eta = \frac{A}{Q_1}.$$

Учитывая (88), получим

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

Отсюда видно, что чем ближе КПД к единице, тем эффективнее двигатель.

Из сказанного следует, что для работы теплового двигателя нужно наличие двух тепловых резервуаров. Один с высокой температурой  $T_1$  – *нагреватель*, от которого двигатель получает тепло  $Q_1$ , другой, с низкой температурой  $T_2$  – *холодильник*, которому отдает тепло  $Q_2$ .

Наивыгоднейший теоретический цикл теплового двигателя, преобразующий между заданными температурами рабочего тела максимальное количество теплоты в работу, был предложен Карно. Цикл Карно представляет собой круговой обратимый процесс, состоящий из двух адиабат и двух изотерм (см. рис.

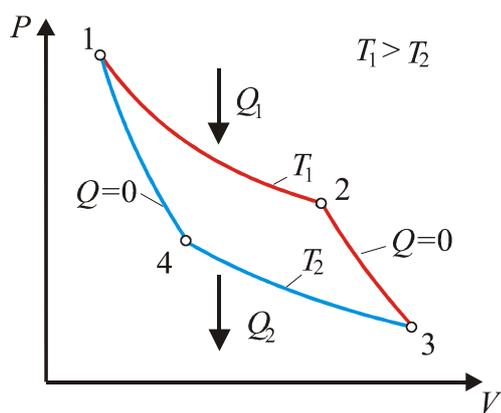


Рис. 3. Цикл Карно

3). Рабочим телом является идеальный газ.

Прямой цикл совершается по направлению 1-2-3-4-1, т. е. по направлению движения часовой стрелки, обратный – против часовой стрелки. В обратном процессе, затратив некоторую работу  $A'$ , можно создать *холодильную машину*.

В термодинамике доказывается, что КПД цикла Карно самый высокий среди реальных тепловых машин, и определяется только температурой нагревателя и холодильника:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Реальная тепловая машина не может работать по циклу Карно, так как все реальные процессы необратимы.

В технике большое распространение получили поршневые двигатели внутреннего сгорания (ДВС). Для анализа процессов, происходящих в таких двигателях, используют *идеальные круговые процессы*. При этом пренебрегают потерями на трение, потерями теплоты в окружающую среду. За рабочее тело в замкнутом цикле принимается идеальный газ. Считается, что ДВС работают по обратимым термодинамическим циклам. Для примера рассмотрим некоторые идеальные циклы ДВС.

## 17. Двигатель внутреннего сгорания. Цикл Отто

Цикл с подводом теплоты при постоянном объеме называется циклом *Отто*. По такому циклу работают двигатели, в которых воздушно-топливная смесь сжимается вначале до давлений 1-1,5 МПа, затем в конце сжатия поджигается электрической искрой. Процесс горения протекает настолько быстро, что объем газа фактически остается постоянным и равным  $V_1$  (рис.4).

После сгорания сжатой смеси давление повышается до значения  $P_1$ . С этого момента начинается рабочий цикл (расширение газа по адиабате  $1 \rightarrow 2$ ), в процессе которого совершается положительная работа. В состоянии 2 (нижняя мертвая точка) расширение достигает максимума. Поршень находится в крайнем положении. Объем  $V_2$  равен сумме объемов камеры сгорания и цилиндра. После открытия выпускного клапана давление в цилиндре падает до близкого к атмосферному. В идеальном цикле считаем эти процессы мгновенными. В реальном цикле выпускной клапан начинает открываться раньше достижения поршнем нижней мертвой точки 2, поэтому переход  $2 \rightarrow 3$  не строго изохорный. На участке  $3 \rightarrow 4$  происходит выталкивание оставшихся в цилиндре продуктов сгорания. В верхней мертвой точке 4 закрывается выпускной клапан и открывается впускной клапан. На участке  $4 \rightarrow 5$  происходит засасывание топлива. В точке 5 закрывается всасывающий клапан и на участке  $5 \rightarrow 6$  происходит сжатие рабочей смеси. В точке 6 смесь воспламеняется, и давление в камере сжатия возрастает до  $P_1$ . В

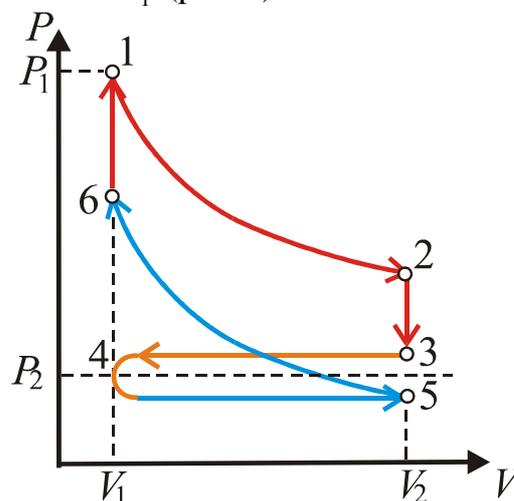


Рис. 4. Цикл Отто

идеальном цикле считаем, что точка 5 совпадает с 3, путь  $3 \rightarrow 4$  совпадает с  $4 \rightarrow 5$  и никакой работы на пути  $3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$  не совершается.

Рассчитаем КПД цикла:

$$\eta_o = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{c_V(T_2 - T_5)}{c_V(T_1 - T_6)} = 1 - \frac{T_2 - T_5}{T_1 - T_6}.$$

Найдем температуры узловых точек, учитывая характер термодинамических процессов. Сжатие 5-6 происходит адиабатически

$$T_6 = T_5 \left( \frac{V_5}{V_6} \right)^{\gamma-1} = T_5 \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1} = T_5 \varepsilon^{\gamma-1},$$

где  $\varepsilon = V_2/V_1$  – степень сжатия, т. е. отношение полного объема цилиндра к объему камеры сгорания;  $\gamma$  – показатель адиабаты.

При изохорическом подводе теплоты 6-1

$$T_1 = T_6 \left( \frac{P_1}{P_6} \right) = T_6 \lambda = T_5 \varepsilon^{\gamma-1} \lambda,$$

где  $\lambda = P_1/P_6$  – степень изохорного повышения давления.

Рабочий ход (расширение) 1-2 происходит также адиабатически

$$T_2 = T_1 \left( \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}} \right) = T_5 \varepsilon^{\gamma-1} \lambda \left( \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}} \right) = T_5 \lambda.$$

С учетом найденных значений температур формула для КПД примет вид

$$\eta_o = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}}.$$

Мы видим, что КПД цикла Отто  $\eta_o$  зависит от степени сжатия  $\varepsilon$  и показателя адиабаты  $\gamma$  рабочего тела. С увеличением  $\varepsilon$  термический КПД цикла увеличивается. Однако сильное повышение  $\varepsilon$  приводит к самопроизвольному возгоранию рабочей смеси – детонации и к возможному разрушению двигателя. У реальных машин степень сжатия достигает 10-12, а КПД существенно ниже, чем у идеального цикла Отто.

Полезная работа, совершаемая за цикл, определяется выражением

$$A_o = Q_1 \eta_o = c_V m T_5 \varepsilon^{\gamma-1} (\lambda - 1) \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}} \right).$$

## 18. Цикл с изобарным подводом тепла (Цикл Дизеля)

Цикл с подводом теплоты при постоянном давлении называется циклом Дизеля.

Р. Дизель для увеличения КПД предложил сначала сжимать негорючий газ (воздух) до давления 4-5 МПа, а затем впрыскивать в него менее летучее, чем бензин, не детонирующее топливо. От высокой температуры, достигаемой при сжатии воздуха, рабочая смесь самовоспламеняется. Постоянство давления при горении топлива обеспечивается соответствующей регулировкой топливной форсунки. Степень сжатия при этом достигает значений 18-22.

На рисунке 5 приведена  $P$ - $V$  диаграмма цикла. Он состоит из адиабатического сжатия (линия б-1), изобарического подвода теплоты (линия 1-2), адиабатического расширения (линия 2-3) и изохорического отвода теплоты (линия 3-б). В идеальном цикле считаем, что точка б совпадает с 4, путь 4 → 5 совпадает с 5 → б и никакой работы на пути 4 → 5 → б не совершается.

Вычислим КПД цикла по формуле:

$$\eta_D = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{c_V(T_3 - T_6)}{c_p(T_2 - T_1)} = 1 - \frac{T_3 - T_6}{\gamma(T_2 - T_1)}.$$

Температуры узловых точек найдем, учитывая характер термодинамических процессов.

1) Адиабатическое сжатие (б-1)

$$T_1 = T_6 \varepsilon^{\gamma-1},$$

где  $\varepsilon = V_2/V_1$  – степень сжатия.

2) Изобарное расширение (1-2)

$$T_2 = T_1 \left( \frac{V_3}{V_1} \right) = T_1 \beta = T_6 \varepsilon^{\gamma-1} \beta,$$

где  $\beta = V_3/V_1$  – степень предварительного изобарического расширения.

3) Адиабатическое расширение (2-3)

$$T_3 = T_2 \left( \frac{V_3}{V_2} \right)^{\gamma-1} = T_2 \left( \frac{V_3}{V_1} \cdot \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = T_2 \left( \frac{\beta}{\varepsilon} \right)^{\gamma-1} = T_6 \varepsilon^{\gamma-1} \beta \left( \frac{\beta}{\varepsilon} \right)^{\gamma-1} = T_6 \beta^\gamma.$$

Подставляя найденные температуры в выражение для КПД, получим:

$$\eta_D = 1 - \frac{\beta^\gamma - 1}{\gamma \varepsilon^{\gamma-1} (\beta - 1)}.$$

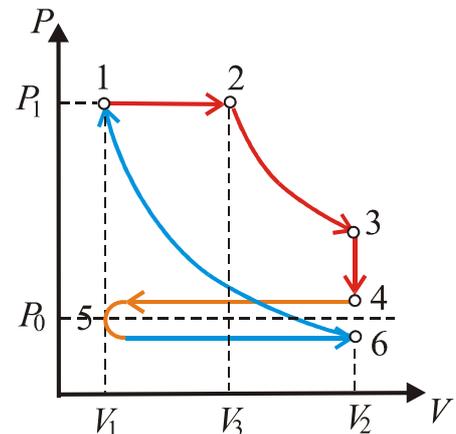


Рис. 5. Цикл Дизеля

Термический КПД цикла Дизеля зависит от степени сжатия  $\varepsilon$ , показателя адиабаты  $\gamma$  и степени предварительного изобарического расширения  $\beta$ . КПД увеличивается, если  $\beta$  уменьшать, а  $\varepsilon$  повышать. Для реальных двигателей КПД значительно ниже. Полезная работа за цикл находится по формуле

$$A_D = Q_1 \eta_D = c_p m T_1 \varepsilon^{\gamma-1} (\beta - 1) \left( 1 - \frac{\beta^\gamma - 1}{\gamma \varepsilon^{\gamma-1} (\beta - 1)} \right).$$

## ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТЕПЛООБМЕНА

### 19. Основные понятия теории теплообмена

Понятие теплообмена охватывает совокупность всех явлений, при которых имеет место передача теплоты от одной части пространства к другой. Эти процессы по своей физико-механической природе весьма многообразны, отличаются большой сложностью и обычно протекают в виде целого комплекса природных явлений. Поэтому для удобства принято делить перенос тепла на простейшие виды: теплопроводность, конвекцию и теплообмен излучением.

*Теплопроводностью* называется перенос теплоты структурными частицами вещества вследствие их теплового движения. Этот процесс возникает при неравномерном распределении температур в среде. В жидкостях и в твердых диэлектриках перенос теплоты осуществляется по средствам теплового движения молекул и атомов вещества. В газообразных средах теплота передается путем непосредственного соприкосновения молекул, имеющих различную скорость. В металлах теплопроводность осуществляется вследствие движения свободных электронов.

*Конвекцией* называется перенос теплоты при перемещении объемов газа или жидкости в пространстве из области с более низкой температурой в область с более высокой температурой. Конвективный перенос может осуществляться в результате свободного или вынужденного движения теплоносителя (газа или жидкости) и всегда сопровождается теплопроводностью.

*Теплообмен излучением* – процесс переноса теплоты электромагнитными волнами. Этот вид передачи теплоты обусловлен превращением внутренней энергии вещества в энергию излучения и его поглощением веществом.

Очень часто процессам теплообмена дают особые, специальные названия. Так передачу тепла от поверхности твердого тела в жидкую или газообразную среду называют *теплоотдачей*, а перенос тепла от одной жидкой или газообразной среды в другую такую же среду через разделяющую их твердую стенку называют *теплопередачей*. Теплообмен, обусловленный совместным переносом теплоты излучением, теплопроводностью и конвекцией, называется *радиационно-конвективным теплообменом*.

В практических расчетах сложные сочетания различных видов теплопередачи расчленяются, и весь процесс сводится к какому-либо одному из них.

При этом если возможно, указываются условия, когда один выделенный вид теплообмена существенно доминирует над остальными.

В основном все процессы, рассматриваемые в теории теплообмена, протекают при взаимодействии твердых тел с жидкими или газообразными средами, размеры которых много больше размеров составляющих их структурных частиц. Поэтому такие статистические понятия, как температура, давление, плотность, теплоемкость и др., могут быть приписаны даже таким малым элементам системы, которые с физико-математической точки зрения могут рассматриваться как дифференциалы ее объема. Это означает, что изучаемая среда может рассматриваться как *непрерывное сплошное пространство*.

Прежде чем переходить к построению математических моделей теплообмена, необходимо дать определение таким понятиям, как температурное поле, градиент температуры и плотность теплового потока.

## 20. Температурное поле. Температурный градиент. Плотность теплового потока

Любые процессы теплообмена всегда сопровождаются изменением температуры в пространстве и во времени. Совокупность всех мгновенных значений температур для каждой точки исследуемого пространства называется *температурным полем*. Математическим выражением распределения температуры является функция, содержащая в качестве независимых переменных пространственные координаты и время:

$$T = f(x, y, z, \tau).$$

Если температура конкретной точки поля зависит только от координат, то такое температурное поле называется *стационарным*:

$$T = f(x, y, z); \quad \partial T / \partial \tau = 0.$$

В зависимости от формы тела и количества координат, вдоль которых может изменяться температура тела, различают одномерное и двумерное поле температур (например,  $T = f(x)$  и  $T = f(x, y)$ ).

В любом температурном поле есть точки с одинаковой температурой. Если мысленно объединить их между собой, то получим *изотермическую поверхность*. Так как одна и та же точка пространства не может одновременно иметь разные значения температуры, то изотермические поверхности не могут пересекаться. Они или замыкаются на себя внутри тела, или кончаются на границах тела.

Сечение такой поверхности плоскостью дает линию, которую называют *изотермой*. Разным температурам соответствуют разные изотермы. Они обладают теми же свойствами, что и изотермические поверхности, т. е. не пересекаются и не обрываются внутри тела. Вдоль изотерм температура не меняется,

а значит и теплообмен не происходит. Чем гуще расположены изотермы, тем интенсивнее изменяется температура.

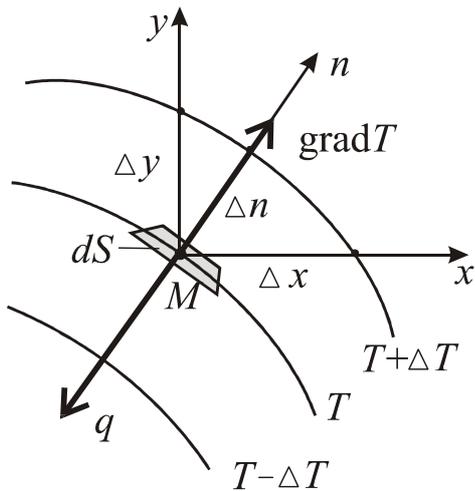


Рис. 6. Схема к определению градиента температур и плотности теплового потока

Рассмотрим на участке двумерного температурного поля две близкие изотермы с разностью температур  $\Delta T$ , расстояние между которыми по нормали к точке  $M$  равно  $\Delta n$  (рис.6). Из рисунка видно, что интенсивность изменения температуры в пространстве по различным направлениям различна. Средняя интенсивность изменения температуры по направлению  $x$  определяется соотношением  $\Delta T/\Delta x$ , а по направлению  $y$  – величиной  $\Delta T/\Delta y$ . Естественно, что максимальная интенсивность изменения температуры в пространстве будет по направлению, перпендикулярному к изотерме и определится отношением  $\Delta T/\Delta n$ .

Если  $\Delta n \rightarrow 0$ , то в пределе получим максимальную скорость возрастания температуры вблизи точки  $M$ , которая определяется выражением:

$$\vec{n}_0 \cdot \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta n} = \vec{n}_0 \cdot \frac{\partial T}{\partial n} = \text{grad}T,$$

где  $\vec{n}_0$  – единичный вектор нормали к изотермической поверхности в точке  $M$ .

Этот предел принято называть *градиентом температуры*.

*Градиент температуры* – вектор, направленный по нормали к изотермической поверхности в сторону возрастания температуры и равный

$$\text{grad}T = \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \vec{k},$$

где  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  – единичные векторы в направлении осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Таким образом, изучение температурного поля и его характеристик дает нам качественную картину явления, позволяя выделить наиболее теплонапряженные зоны, сопоставлять интенсивность процессов в разных точках тела и в разных направлениях. В этом смысле градиент температуры является основным теплофизическим параметром, определяющим условия возникновения теплового процесса. Следовательно, соотношение  $\text{grad}T \neq 0$  является необходимым условием возникновения внутри тела *теплового потока*.

*Тепловой поток*  $Q_\tau$  [Вт] – это физическая величина, численно равная количеству теплоты, передаваемого в единицу времени через произвольную поверхность. Тепловой поток в отличие от температуры (скалярная величина) имеет вполне определенное направление, а именно: от точек тела с более высо-

кой температурой к точкам с более низкой температурой. Для математического описания *поля тепловых потоков* вводится вектор  $\vec{q}$  [Вт/м<sup>2</sup>], называемый *вектором плотности теплового потока*. Ему задается направление по нормали к изотермической поверхности в сторону уменьшения температуры. Абсолютная величина этого вектора определяется как тепловой поток  $dQ_\tau$ , проходящий через изотермическую поверхность площадью  $dS$

$$q = \frac{dQ_\tau}{dS}.$$

Наглядное представление о мгновенном распределении потоков теплоты дают линии, касательные к которым в данной точке температурного поля совпадают с направлением вектора  $\vec{q}$ . Эти линии называются *линиями теплового потока*.

## 21. Основные законы теплопроводности и конвективного теплообмена

Исследуя процесс теплопроводности в твердых телах, Фурье выдвинул гипотезу, что плотность теплового потока через элемент изотермической поверхности прямо пропорциональна значению температурного градиента в рассматриваемой точке  $M$  (рис.6):

$$\vec{q} = -\lambda \cdot \text{grad}T,$$

где  $\lambda$  [Вт/м·К] – множитель пропорциональности, называемый *коэффициентом теплопроводности*.

Знак «минус» в приведенной формуле отражает противоположность направлений векторов плотности теплового потока и температурного градиента: вектор  $\vec{q}$  направлен в сторону уменьшения температуры, тогда как  $\text{grad}T$  – в сторону увеличения температуры.

Для абсолютных значений векторов, входящих в закон Фурье, можно записать:

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}.$$

Количество теплоты, которое пройдет за время  $\tau$  через изотермическую поверхность площадью  $S$ , будет равно:

$$Q = -\int_0^\tau \iint_S \lambda \frac{\partial T}{\partial n} dS d\tau.$$

Тепловой поток может быть определен вдоль любого направления  $\vec{l}$  через площадь, перпендикулярную этому направлению. Поэтому данное соотношение

ние справедливо для любых поверхностей, а не только для изотермических.

В частном случае, когда тепловой режим стационарный и температурный градиент одинаков по всей площади поверхности, можно записать

$$Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial l} S \tau.$$

При конвективном теплообмене между поверхностью твердого тела и омывающей ее жидкой или газовой средой связь плотности теплового потока с температурным полем устанавливается законом, сформулированным Ньютоном и Рихманом: *плотность теплового потока пропорциональна разности температур поверхности тела  $T_c$  и окружающей среды  $T_f$*

$$q = \alpha(T_c - T_f).$$

Здесь  $\alpha$  [Вт/(м<sup>2</sup>·К)] – коэффициент пропорциональности, называемый *коэффициентом теплоотдачи конвекцией*. Он характеризует интенсивность теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой и численно равен количеству тепла, отдаваемому (воспринимаемому) единицей поверхности в единицу времени при разности температур между поверхностью и средой один градус.

Если на всех участках поверхности плотность теплового потока, температуры  $T_c$  и  $T_f$  сохраняют свои значения, то коэффициент  $\alpha$  не будет зависеть от координат. В противном случае рассматривают *локальный коэффициент теплоотдачи* – коэффициент теплоотдачи в данной точке поверхности теплообмена

$$\alpha_i = \frac{q_i}{T_{ci} - T_{fi}}.$$

Если известны коэффициенты  $\alpha_i$  и участки поверхности теплообмена  $S_i$ , в пределах которых  $\alpha_i = \text{const}$ , то общий тепловой поток

$$Q_\tau = \sum_{i=1}^n q_i S_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i (T_{ci} - T_{fi}) S_i.$$

В самом общем (предельном) случае  $Q_\tau = \int_S \alpha(T_c - T_f) \cdot dS$ , где  $\alpha$ ,  $T_c$  и  $T_f$  – величины, определяемые в окрестности элемента площади  $dS$ .

Вопрос о способах расчета коэффициента теплоотдачи будет рассмотрен в разделе о конвективном теплообмене.

Таким образом, для определения количества теплоты, проходящей через

какую-либо площадь поверхности твердого тела, нужно знать температурное поле внутри данного тела, что составляет главную задачу аналитической теории теплопроводности.

## 22. Коэффициент теплопроводности

*Коэффициент теплопроводности*  $\lambda$  является теплофизической константой, характеризующей теплопроводящие свойства материала тела.

Численное значение  $\lambda$  определяет количество теплоты, переданное в единицу времени через единицу поверхности при градиенте температуры, равном единице. Коэффициент теплопроводности в общем случае зависит от агрегатного состояния вещества, его структуры, состава, давления, температуры и других факторов. В большинстве случаев  $\lambda$  для различных материалов определяется опытным путем, но его значение можно оценить также и исходя из понимания механизма теплопроводности в различных средах.

Перенос тепла теплопроводностью в газах при обычных давлениях и температурах определяется переносом кинетической энергии теплового движения в результате хаотического движения и столкновения отдельных молекул газа. Для идеального газа справедливо следующее выражение:

$$\lambda = \frac{1}{3} \rho c_V \bar{w} \bar{l},$$

где  $\rho$  – плотность газа,  $c_V = \frac{iR}{2\mu}$  – теплоемкость единицы массы газа при постоянном объеме,

$\bar{w} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$  – средняя скорость движения молекул,

$\bar{l} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d_{\text{молек}}^2 P}$  – средняя длина свободного пробега молекул. Поскольку

$\bar{l} \sim 1/P$ , а  $\rho \sim P$  ( $P$  – давление газа), то теплопроводность такого газа не зависит от давления. В случае газа, состоящего из многоатомных молекул, существенный вклад в  $\lambda$  вносят внутренние степени свободы молекул, что учитывает соотношение:

$$\lambda = \frac{1}{3} \rho c_V \bar{w} \bar{l} \cdot \left[ \frac{9\gamma - 5}{4} \right],$$

где  $\gamma$  – показатель адиабаты.

В реальных газах коэффициент теплопроводности с ростом давления и температуры увеличивается. Исключением является водяной пар, теплопроводность которого падает с ростом температуры. Для смесей газов правило аддитивности не действует, поэтому коэффициент теплопроводности для них определяется опытным путем. Для газов значение коэффициента теплопроводности лежит в диапазоне 0,005–0,5 Вт/(м·К). Самые высокие значения коэффициента теплопроводности имеют водород и гелий.

Распространение тепла в жидкостях происходит значительно интенсивнее, чем в газах, и скорость передачи энергии от горячих изотермических слоев жидкости к более холодным близка к скорости распространения малых возмущений, равной скорости звука, т. е.

$$\lambda = \rho c_V u_s \bar{L},$$

где  $u_s$  – скорость звука в жидкости,  $\bar{L}$  – среднее расстояние между молекулами. С повышением температуры уменьшается плотность жидкости и коэффициент теплопроводности (за исключением воды и глицерина) убывает, а с повышением давления – увеличивается. Для жидкостей коэффициент теплопроводности лежит примерно в диапазоне 0,07–0,7 Вт/(м·К).

В диэлектриках, не имеющих свободных электрических зарядов, перенос энергии теплового движения осуществляется фононами – квазичастицами, сопоставляемые волне смещения атомов кристалла из положения равновесия. Для них коэффициент теплопроводности определяется как

$$\lambda_{\text{реш}} = c \bar{v} \bar{l},$$

где  $c$  – теплоемкость диэлектрика, совпадающая с теплоемкостью газа фононов,  $\bar{v}$  – скорость фононов, приблизительно равная скорости звука,  $\bar{l}$  – средняя длина свободного пробега фононов. Температурная зависимость  $\lambda$  определяется зависимостью от температуры  $c$  и  $\bar{l}$ .

В металлах переносчиками тепла кроме фононов являются электроны проводимости. В общем случае  $\lambda = \lambda_{\text{э}} + \lambda_{\text{реш}}$ , где  $\lambda_{\text{э}}$  и  $\lambda_{\text{реш}}$  – электронная и решёточная (фононная) составляющие, причем, как правило  $\lambda_{\text{э}} \gg \lambda_{\text{реш}}$ . Свободные электроны движутся во всех направлениях – как из более нагретых областей в холодные, так и в обратном направлении, перенося энергию равную  $kT$ . В первом случае они отдают энергию атомам, а во втором – отбирают. Так как электроны в металлах являются еще и носителями электрической энергии, то отношение коэффициента теплопроводности к электропроводности пропорционально  $T$  (закон Видемана-Франца):

$$\frac{\lambda_{\text{э}}}{\sigma} = L_0 \cdot T,$$

где  $L_0$  – число Лоренца.

При повышении температуры вследствие усиления тепловых неоднородностей рассеивание электронов усиливается. Это влечет за собой уменьшение коэффициентов электропроводности и, соответственно, теплопроводности чистых металлов. Примеси также значительно снижают коэффициент теплопроводности, так как структурные неоднородности сильно рассеивают электроны. Например, у чистой меди  $\lambda \approx 395$  Вт/(м·К), а у меди с примесями мышьяка  $\lambda = 142$  Вт/(м·К). Для сплавов, в отличие от чистых металлов, коэффициент тепло-

проводности увеличивается с ростом температуры. В среднем коэффициент теплопроводности металлов лежит в диапазоне 20–400 Вт/(мК).

Явление переноса теплоты в полупроводниках еще сложнее, чем в диэлектриках и металлах, т. к. для них  $\lambda_{\text{э}}$  и  $\lambda_{\text{реш}}$  имеют значения одного порядка.

Для порошкообразных и пористых тел коэффициент теплопроводности сильно зависит от их объемной плотности и растет с ее увеличением, так как теплопроводность заполняющего поры воздуха существенно меньше теплопроводности твердых компонентов пористого материала. Для неметаллических твердых материалов коэффициент теплопроводности обычно ниже 10 Вт/(мК), для строительных и теплоизоляционных материалов составляет 0,02–3,0 Вт/(мК).

В технических расчетах значения коэффициента теплопроводности берутся из справочных таблиц, в которых, как правило, учитывается зависимость коэффициента теплопроводности от температуры.

### 23. Дифференциальное уравнение теплопроводности

Изучение любого физического явления сводится к установлению зависимости между величинами, характеризующими это явление. Для анализа сложных явлений, к которым следует отнести и процессы теплопроводности, в науке сложился общий подход, связанный с использованием методов математической физики. Суть этого подхода состоит в том, что на основании известных физических законов устанавливаются искомые связи в пределах бесконечно малого объема внутри тела и за бесконечно малый промежуток времени. В результате находят дифференциальное уравнение, описывающее весь класс исследуемых явлений. Затем это дифференциальное уравнение интегрируют в пределах изучаемого пространства и в пределах заданного интервала времени, получая, таким образом, аналитическое решение поставленной задачи.

Для решения задач, связанных с нахождением температурного поля, выведем дифференциальное уравнение теплопроводности. Для этого выделим в твердом изотропном теле элементарный параллелепипед объемом  $dV = dx dy dz$  и рассмотрим изменение его теплового состояния за промежуток времени  $dt$ . Предположим, что в левую грань этого объема вдоль оси  $x$  за время  $dt$  поступает количество теплоты

$$Q_x = q_x dy dz dt,$$

где  $q_x$  – плотность теплового потока вдоль  $x$ , а с правой грани за это же время уходит количество теплоты

$$Q_{x+dx} = q_{x+dx} dy dz dt,$$

где  $q_{x+dx}$  – плотность теплового потока на координате  $x+dx$ .

Разложим  $q_{x+dx}$  в ряд Тейлора вблизи точки  $x$ , ограничиваясь двумя членами разложения, т. е.  $q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx$ .

Количество теплоты, аккумулированное элементом, найдем как разницу между поступившей и вышедшей теплотой:

$$dQ_x = Q_x - Q_{x+dx} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy dz d\tau = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dV d\tau.$$

Аналогичные рассуждения проведем для осей  $y$  и  $z$ . Получим:

$$dQ_y = Q_y - Q_{y+dy} = -\frac{\partial q_y}{\partial y} dV d\tau \quad \text{и} \quad dQ_z = Q_z - Q_{z+dz} = -\frac{\partial q_z}{\partial z} dV d\tau.$$

Кроме накопления теплоты в объеме могут действовать внутренние источники теплоты (электрический ток, химические реакции и т. п.) с объемной плотностью  $q_V$  [Вт/м<sup>3</sup>]. В этом случае за время  $d\tau$  в объеме  $dV$  выделится теплота

$$dQ_V = q_V dV d\tau.$$

Накопленная в объеме и выделенная внутренними источниками теплота, согласно первому закону термодинамики, идет только на изменение её внутренней энергии (работы против внешних сил нет, т. к. элемент не деформируется). Тогда закон сохранения энергии для рассматриваемого объема можно сформулировать следующим образом: *изменение внутренней энергии  $dU$  вещества, содержащегося в этом объеме, за время  $d\tau$  равно суммарному количеству теплоты, вносимому в него вследствие теплопроводности и выделяемому внутренними источниками тепла*

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} \cdot dV \cdot d\tau = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) dV \cdot d\tau + q_V \cdot dV \cdot d\tau, \quad (12)$$

где  $c$ ,  $\rho$  – удельная теплоемкость и плотность вещества выделенного объема.

Теперь воспользуемся законом Фурье, который в проекциях на оси координат дает:

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}, \quad q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}.$$

Подставим эти выражения в формулу (12). Если  $\lambda = \text{const}$ , то после несложных преобразований и сокращений получим:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q_V}{c\rho},$$

где  $a = \frac{\lambda}{c\rho}$  – коэффициент температуропроводности.

Коэффициент температуропроводности характеризует скорость изменения температуры в нестационарных процессах и является мерой теплоинерционных свойств тела. Скорость изменения температуры будет тем выше, чем больше коэффициент температуропроводности.

Полученное дифференциальное уравнение описывает связь между изменением температуры в пространстве (правая часть) и времени (левая часть) в окрестностях любой точки внутри тела и представляет основу для решения всего класса задач теплопроводности. Это уравнение называют также дифференциальным уравнением Фурье.

В одномерных и двумерных задачах производные по координатам, в направлении которых тепло не распространяется, приравниваются нулю.

Если тело не содержит внутренних источников, то полагается, что  $q_V = 0$ .

В стационарных задачах теплопроводности  $\frac{\partial T}{\partial \tau} = 0$ .

Для тел с осевой симметрией удобно использовать цилиндрические координаты  $r$ ,  $\varphi$ , и  $z$ , в которых уравнение теплопроводности примет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q_V}{c\rho}.$$

## 24. Краевые условия задач теплопроводности

Для того чтобы выделить конкретный изучаемый процесс и дать его полное математическое описание, к дифференциальным уравнениям надо присоединить математическое описание всех частных особенностей рассматриваемого процесса. Эти частные особенности называются *условиями однозначности* или *краевыми условиями*. Они включают:

1) геометрические условия, характеризующие форму и размеры тела, в котором протекает процесс;

2) физические условия, характеризующие физические свойства тела (теплопроводность, теплоемкость, плотность, мощность внутренних источников тепла и т.д.);

3) временные или начальные условия, характеризующие распределение температуры в изучаемом теле в начальный момент времени:  $T_0 = f(x, y, z, 0)$ ;

4) граничные условия, характеризующие взаимодействие рассматриваемого тела с окружающей средой. Их записывают для совокупности точек, лежащих на граничной поверхности  $G$  тела, полагая, что во всех случаях  $\tau \geq 0$ .

В теории теплопроводности выделяют четыре основных вида граничных условий.

*Граничные условия первого рода* (условия Дирихле) задают распределение температуры на поверхности тела и ее изменение во времени:

$$T(G, \tau) = T_c(G, \tau).$$

*Граничные условия второго рода* (условия Неймана) задают распределение теплового потока для каждой точки поверхности тела и его изменение во времени:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_G = q_c(G, \tau).$$

При охлаждении тела принимают  $q_c > 0$ , а при нагревании  $-q_c < 0$ .

*Граничные условия третьего рода* (условия Ньютона) соответствуют случаю, когда на поверхности происходит конвективный теплообмен с жидкостью или газом, имеющими постоянную температуру  $T_f$ :

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_G = \alpha(T_f - T_c).$$

*Граничные условия четвертого рода* (условия сопряжения) соответствуют случаю идеального теплового контакта двух сред с теплопроводностями  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ :

$$\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{G-0} = \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{G+0} ; T|_{G-0} = T|_{G+0}.$$

Многие практически важные задачи имеют сложную форму граничных условий. В этом случае используется принцип суперпозиции.

Таким образом, дифференциальное уравнение совместно с условиями однозначности дают полную математическую формулировку конкретной задачи теплопроводности, которая может быть решена либо аналитически, либо численно.

## СТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

### 25. Теплопроводность через плоскую стенку

Рассмотрим однородную и неограниченную стенку толщиной  $\delta$  (рис. 7). Неограниченной стенкой называется тело, у которого один размер конечный, а два других бесконечно велики (намного больше первого). Предполагаем, что

коэффициент теплопроводности стенки  $\lambda$  не зависит от температуры, а на наружных поверхностях этой стенки поддерживаются постоянными температуры  $T_{c1}$  и  $T_{c2}$ . Эти условия позволяют искать изменение температуры только в направлении, перпендикулярном плоскости стенки, т. е. вдоль оси  $x$ .

В стационарном режиме тепловая задача для рассматриваемого случая запишется в виде

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0,$$

$$T(0) = T_{c1} \text{ и } T(\delta) = T_{c2}.$$

Чтобы найти распределение температуры по толщине пластины, дважды проинтегрируем исходное уравнение. Получим:

$$T(x) = C_1 x + C_2.$$

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  найдем из граничных условий. Из первого граничного условия получаем  $C_2 = T_{c1}$ , а из второго –  $C_1 = \frac{T_{c2} - T_{c1}}{\delta}$ .

После подстановки  $C_1$  и  $C_2$  в общее решение закон распределения температуры в плоской стенке имеет вид:

$$T(x) = \frac{T_{c2} - T_{c1}}{\delta} \cdot x + T_{c1}.$$

Это уравнение прямой линии, т.е. температура в плоской стенке изменяется линейно.

Для определения плотности теплового потока, распространяющегося в направлении оси  $x$ , воспользуемся законом Фурье, согласно которому

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\lambda}{\delta} (T_{c1} - T_{c2}).$$

Отсюда следует, что количество тепла, проходящее через поверхность стенки величиной  $S$  за промежуток времени  $\tau$  прямо пропорционально коэффициенту теплопроводности, разности температур на наружных поверхностях стенки и обратно пропорционально толщине стенки:

$$Q = q \cdot S \cdot \tau = \frac{\lambda}{\delta} \cdot (T_{c1} - T_{c2}) \cdot S \cdot \tau.$$

Отношение  $K_\lambda = \frac{\lambda}{\delta}$  называется *тепловой проводимостью* стенки, а об-

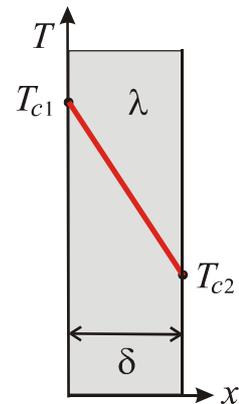


Рис. 7. Теплопроводность в плоской стенке

ратная величина  $R_\lambda = \frac{\delta}{\lambda}$  – *тепловым или термическим сопротивлением* стенки.

Последнее представляет собой падение температуры в стенке на единицу плотности теплового потока.

Решение исходного дифференциального уравнения было получено в предположении, что коэффициент теплопроводности не зависит от температуры. В действительности это не всегда так. Для многих материалов зависимость коэффициента теплопроводности от температуры близка к линейной

$$\lambda = \lambda_0 [1 + b(T - T_0)],$$

где  $\lambda_0$  – значение коэффициента теплопроводности при  $T_0 = 273$  К.

В этом случае плотность теплового потока через пластину можно определить как

$$q = \frac{\bar{\lambda}}{\delta} (T_{c1} - T_{c2}),$$

где  $\bar{\lambda} = \lambda_0 \left[ 1 + b \left( \frac{T_{c1} + T_{c2}}{2} - T_0 \right) \right]$  – коэффициент теплопроводности при среднеарифметическом значении температуры в стенке.

Распределение температуры по толщине стенки становится нелинейным и описывается формулой

$$T(x) = \sqrt{\left[ (T_{c1} - T_0) + \frac{1}{b} \right]^2 - \frac{2qx}{\lambda_0 b}} + T_0 - \frac{1}{b}.$$

Если  $b > 0$ , то распределение температур в плоской стенке изобразится параболой с выпуклостью, обращённой в сторону возрастания температуры. Если  $b < 0$ , то распределение температур будет иметь вогнутый вид.

## 26. Теплопроводность через многослойную плоскую стенку

Рассмотрим теплопроводность многослойной неограниченной стенки, состоящей из  $n$  однородных слоев, на внешних поверхностях которой поддерживаются постоянными температуры  $T_{c1}$  и  $T_{c(n+1)}$ . Примем, что контакт между слоями идеальный, т. е. на границе соприкосновения выполняются граничные условия 4-го рода (рис. 8).

При заданных размерах слоев и, соответственно, коэффициентах теплопроводности плотность теплового потока в  $i$ -том слое равна

$$q_i = \frac{\lambda_i}{\delta_i} (T_{ci} - T_{c(i+1)}).$$

Выразим отсюда разность температур на поверхностях этого слоя

$$T_{ci} - T_{c(i+1)} = q_i \frac{\delta_i}{\lambda_i},$$

и затем просуммируем соответственно левые и правые части выражений, записанных таким способом для всех слоев. Получим:

$$\sum_{i=1}^n (T_{ci} - T_{c(i+1)}) = \sum_{i=1}^n q_i \frac{\delta_i}{\lambda_i}.$$

Учитывая, что температуры поверхностей смежных слоев в месте контакта равны  $T_{ci} = T_{c(i+1)}$ , а тепловой поток, проходящий через любую изотермическую поверхность неоднородной стенки, один и тот же  $q_1 = q_2 = q_i \dots = q = \text{const}$  получим:

$$T_{c1} - T_{c(n+1)} = q \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}.$$

Отсюда

$$q = \frac{T_{c1} - T_{c(n+1)}}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}} = \frac{T_{c1} - T_{c(n+1)}}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{\delta_n}{\lambda_n}} = \frac{T_{c1} - T_{c(n+1)}}{R_{\lambda\Sigma}}.$$

Величина  $R_{\lambda\Sigma} = \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}$ , равная сумме тепловых сопротивлений всех  $n$  слоев,

называется *полным тепловым* или *термическим сопротивлением теплопроводности* многослойной стенки.

Для сравнения процессов переноса тепла через многослойную стенку и стенку из однородного материала удобно ввести в рассмотрение эквивалентный коэффициент теплопроводности для многослойной стенки

$$\lambda_{\text{ЭКВ}} = \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}}.$$

Он равен коэффициенту теплопроводности однородной стенки, толщина которой равна толщине многослойной стенки, а тепловое сопротивление равно термическому сопротивлению рассматриваемой многослойной стенки.

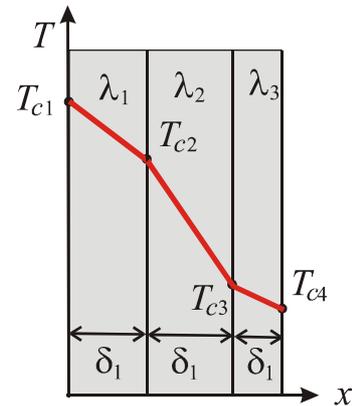


Рис. 8. Теплопроводность в многослойной плоской стенке

## 27. Теплопередача через плоскую стенку

Передача тепла от одного теплоносителя (жидкости или газа) к другому через разделяющую их однородную или многослойную твердую стенку любой формы называется *теплопередачей*. Этот сложный теплообмен включает в себя теплоотдачу от более горячего теплоносителя к стенке, теплопроводность в стенке и теплоотдачу от стенки к более холодной подвижной среде.

Пусть плоская однородная и неограниченная стенка имеет толщину  $\delta$ . Предполагаем, что заданы следующие параметры: коэффициент теплопроводности  $\lambda$  материала стенки, температуры окружающей среды  $T_{f1}$  и  $T_{f2}$ , а также коэффициенты теплоотдачи  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Будем считать, что  $T_{f1}$ ,  $T_{f2}$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  постоянны и не меняются вдоль поверхности, а режим теплопроводности в стенке – стационарным. Эти условия позволяют рассматривать изменение температуры только в направлении, перпендикулярном плоскости стенки, т. е. вдоль оси  $x$ .

В стационарном режиме плотность теплового потока, обусловленная теплопроводностью внутри стенки, определяется уравнением

$$q = \frac{\lambda}{\delta}(T_{c1} - T_{c2}).$$

Согласно закону Ньютона – Рихмана эта же плотность теплового потока от горячего теплоносителя к стенке и от стенки к холодному теплоносителю описывается уравнениями:

$$q = \alpha_1(T_{f1} - T_{c1}) \quad \text{и} \quad q = \alpha_2(T_{c2} - T_{f2}).$$

Выразим из этих трех уравнений разности температур

$$T_{f1} - T_{c1} = q \frac{1}{\alpha_1}; \quad T_{c1} - T_{c2} = q \frac{\delta}{\lambda}; \quad T_{c2} - T_{f2} = q \frac{1}{\alpha_2},$$

и затем почленно сложим их правые и левые части. В результате несложных преобразований получим:

$$q = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{R_\alpha}.$$

Величина  $R_\alpha = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}$  называется *полным термическим сопротивлением теплопередачи*. Она складывается из частных термических сопротивлений:  $R_{\alpha_1} = \frac{1}{\alpha_1}$  – термического сопротивления теплоотдачи от горячего теплоно-

сителя к поверхности стенки;  $R_\lambda = \frac{\delta}{\lambda}$  – термического сопротивления теплопроводности стенки;  $R_{\alpha_2} = \frac{1}{\alpha_2}$  – термического сопротивления теплоотдачи от поверхности стенки к холодному теплоносителю.

В случае многослойной неограниченной стенки (рис. 9), состоящей из  $n$  слоев, полное термическое сопротивление равно

$$R_{\alpha\Sigma} = \frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}.$$

Иногда требуется определить температуру в произвольном сечении стенки. Если это сечение  $x$  находится в  $i$ -том слое, то

$$T(x) = T_{f1} - q \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{\delta_{i-1}}{\lambda_{i-1}} + \frac{x_i}{\lambda_i} \right),$$

где  $x_i = x - (\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_{i-1})$  – расстояние от этого сечения до границы контакта с  $(i-1)$  слоем.

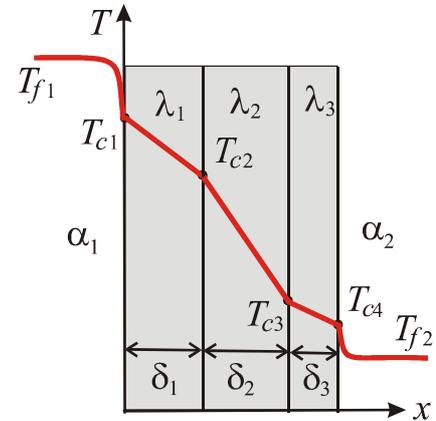


Рис. 9. Теплопроводность и теплопередача в плоской многослойной стенке

## 28. Температурное поле в плоской стенке при наличии тепловыделений

Рассмотрим однородную и неограниченную пластину, толщина которой равна  $2\delta$ . Предполагаем, что внутренние источники тепла равномерно распределены по всему объему, их мощности равны и постоянны ( $q_V = \text{const}$ ). С двух сторон заданы постоянные коэффициенты теплоотдачи  $\alpha$  и температура теплоносителя  $T_f$ .

Поместим начало координат в центр пластины. При указанных условиях температура пластины будет изменяться только вдоль оси  $x$ , направленной нормально к поверхности тела. Дифференциальное уравнение теплопроводности для этого случая имеет вид:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q_V}{\lambda} = 0.$$

Граничные условия на поверхностях пластины определяются уравнениями теплоотдачи:

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=-\delta} = \alpha(T_f - T_{c1}),$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=\delta} = \alpha(T_f - T_{c2}).$$

Благодаря симметричному отводу теплоты температуры обеих поверхностей пластины одинаковы  $T_{c1} = T_{c2} = T_c$  (рис. 14). Поскольку граничные условия

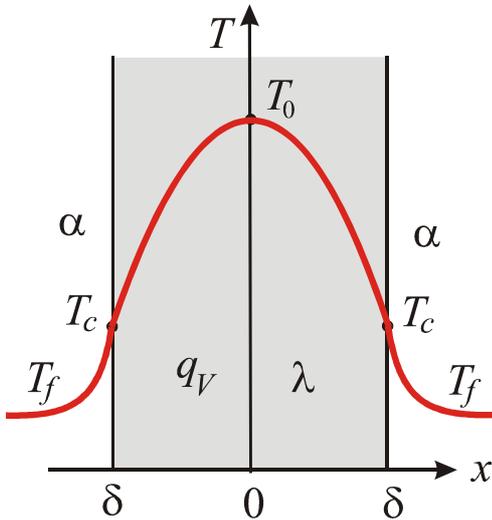


Рис. 14. Распределение температуры в пластине с внутренним тепловыделением

вательно получим:

для обеих сторон пластины становятся одинаковыми, температурное поле внутри пластины должно быть симметричным относительно плоскости  $x = 0$ . В этой точке плотность теплового потока равна нулю.

Это означает, что далее можно рассматривать лишь одну половину пластины, например, правую, и записать для нее граничные условия в следующем виде:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=\delta} = \alpha(T_f - T_c).$$

Дважды проинтегрировав дифференциальное уравнение теплопроводности, последо-

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= -\frac{q_V}{\lambda} x + C_1, \\ T(x) &= -\frac{q_V}{2\lambda} x^2 + C_1 x + C_2. \end{aligned}$$

Постоянные интегрирования найдем из граничных условий. Из первого граничного условия получим  $C_1 = 0$ , из второго  $C_2 = T_f + \frac{q_V \delta}{\alpha} + \frac{q_V \delta^2}{2\lambda}$ .

В этом случае уравнение температурного поля определяется по формуле

$$T(x) = T_f + \frac{q_V \delta}{\alpha} + \frac{q_V}{2\lambda} (\delta^2 - x^2),$$

из которой следует, что температура в плоской стенке в случае симметричной задачи распределяется по параболическому закону.

В рассматриваемой задаче плотность теплового потока изменяется вдоль оси  $x$  по закону  $q(x) = -\lambda \frac{\partial T(x)}{\partial x} = q_V x$ . Тепловой поток с единицы поверхности пластины (при  $x = \delta$ ) равен

$$q(\delta) = \alpha(T_c - T_f) = q_V \delta,$$

и общее количество тепла, отданное поверхностью  $S$  в единицу времени определяется выражением:

$$Q_{\tau} = q_V \cdot \delta \cdot S.$$

## 29. Теплопроводность в цилиндрической стенке

Рассмотрим стационарный процесс теплопроводности в бесконечной цилиндрической стенке (трубе) с внутренним диаметром  $d_1 = 2r_1$  и наружным диаметром  $d_2 = 2r_2$  с постоянным коэффициентом теплопроводности  $\lambda$  материала стенки. На наружных поверхностях трубы поддерживаются постоянными значения температуры  $T_{c1}$  и  $T_{c2}$  (рис. 10). Необходимо найти распределение температуры в цилиндрической стенке и тепловой поток через нее.

В рассматриваемом случае дифференциальное уравнение теплопроводности удобно записать в цилиндрической системе координат (ось  $z$  совмещена с осью трубы):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0.$$

Так как труба бесконечная и изотропная (частные производные по  $\varphi$  и  $z$  равны нулю), то дифференциальное уравнение теплопроводности примет вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = 0$$

с граничными условиями

$$T(r_1) = T_{c1} \text{ и } T(r_2) = T_{c2}.$$

Для решения поставленной задачи введем новую переменную  $u = \frac{\partial T}{\partial r}$  и перепишем исходное уравнение теплопроводности в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} u = 0.$$

Разделим переменные и проинтегрируем его. Получим:

$$\ln u = \ln C_1 - \ln r = \ln \frac{C_1}{r}.$$

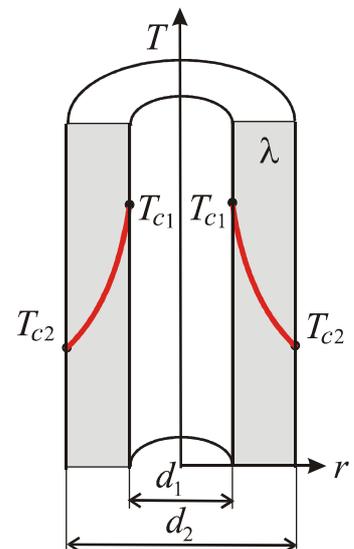


Рис. 10. Теплопроводность в цилиндрической стенке

После потенцирования и обратной замены переменной  $u$  уравнение теплопроводности примет вид

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{C_1}{r}.$$

Решением этого уравнения является функция

$$T(r) = C_1 \ln r + C_2.$$

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  найдем из граничных условий:

$$\begin{aligned} T_{c1} &= C_1 \ln r_1 + C_2, \\ T_{c2} &= C_1 \ln r_2 + C_2. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения совместно, получим:

$$C_1 = \frac{T_{c1} - T_{c2}}{\ln(r_1/r_2)}, \quad C_2 = T_{c1} - (T_{c1} - T_{c2}) \frac{\ln r_1}{\ln(r_1/r_2)}.$$

После подстановки  $C_1$  и  $C_2$  решение поставленной задачи примет вид:

$$T(r) = T_{c1} - (T_{c1} - T_{c2}) \frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}.$$

Данное выражение представляет собой уравнение убывающей логарифмической кривой, т. е. цилиндрические стенки не имеют такого же линейного изменения температуры по толщине, какое наблюдается у плоских стенок.

Для определения теплового потока, проходящего через цилиндрическую поверхность величиной  $S = 2\pi r l$  (где  $l$  – длина участка трубы), воспользуемся законом Фурье с учетом выражения для производной:

$$Q_\tau = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} S = -\lambda \frac{C_1}{r} S = \frac{2\pi\lambda l (T_{c1} - T_{c2})}{\ln(d_2/d_1)}.$$

Отсюда следует, что тепловой поток, проходящий через цилиндрическую стенку в единицу времени, полностью определяется заданными граничными условиями и не зависит от радиуса.

Совсем иначе обстоит дело с плотностью теплового потока. Действительно, плотность теплового потока на внутренней поверхности цилиндрической стенки

$$q_1 = \frac{Q_\tau}{\pi d_1 l} = \frac{2\lambda(T_{c1} - T_{c2})}{d_1 \ln(d_2/d_1)}$$

больше чем плотность теплового потока на внешней поверхности

$$q_2 = \frac{Q_\tau}{\pi d_2 l} = \frac{2\lambda(T_{c1} - T_{c2})}{d_2 \ln(d_2/d_1)}$$

т. к. внутренняя поверхность стенки трубы имеет меньший диаметр и соответственно меньшую площадь, а внешняя поверхность – больший диаметр и большую площадь.

Для удобства расчета теплового потока через стенки трубопровода различной протяженности вводится величина  $q_l$  [Вт/м], называемая *линейной плотностью теплового потока*:

$$q_l = \frac{Q_\tau}{l} = \frac{\pi(T_{c1} - T_{c2})}{\frac{1}{2\lambda} \ln(d_2/d_1)}.$$

Как видно из уравнения, при неизменном отношении диаметров линейная плотность теплового потока не зависит от площади поверхности цилиндрической стенки.

Все рассмотренные выше удельные тепловые потоки  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q_l$  связаны между собой простым соотношением:

$$q_l = \pi d_1 q_1 = \pi d_2 q_2. \quad (13)$$

Для многослойной цилиндрической стенки метод решения во многом аналогичен методу решения, представленному ранее для плоской многослойной стенки.

При заданных диаметрах слоев и, соответственно, коэффициентах теплопроводности линейная плотность теплового потока в  $i$ -том слое равна

$$q_{li} = \frac{\pi(T_{ci} - T_{c(i+1)})}{\frac{1}{2\lambda_i} \ln(d_{i+1}/d_i)}.$$

При стационарном тепловом режиме линейная плотность теплового потока не меняется по толщине стенки, т. е.  $q_l = \text{const}$ . Исходя из этого, составим систему уравнений линейных плотностей теплового потока для каждого из слоев и выразим из них температурные напоры (разности температур на поверхностях слоев)

$$T_{ci} - T_{c(i+1)} = \frac{q_{li}}{\pi} \frac{1}{2\lambda_i} \ln(d_{i+1}/d_i).$$

Затем почленно просуммируем левые и правые части полученных уравнений с

учетом условия:  $q_{l1} = q_{l2} = q_{l3} = \dots = q_l$ . В результате несложных преобразований найдем:

$$T_{c1} - T_{c(n+1)} = \frac{q_l}{\pi} \left( \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{2\lambda_3} \ln \frac{d_4}{d_3} + \dots + \frac{1}{2\lambda_n} \ln \frac{d_{n+1}}{d_n} \right).$$

Отсюда

$$q_l = \frac{\pi(T_{c1} - T_{c(n+1)})}{R_{l\lambda\Sigma}},$$

где  $R_{l\lambda\Sigma} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln(d_{i+1}/d_i)$  представляет собой *термическое сопротивление* всех слоев и называется *полным линейным внутренним термическим сопротивлением теплопроводности* многослойной цилиндрической стенки.

Для определения температуры в любой точке, отдаленной по радиусу  $r$  на расстоянии  $\Delta r_j = r - r_j$  от внешней границы ( $j-1$ ) слоя, можно воспользоваться следующей формулой:

$$T(r) = T_{f1} - \frac{q_l}{\pi} \left( \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{r_3}{r_2} + \dots + \frac{1}{2\lambda_{j-1}} \ln \frac{r_j}{r_{j-1}} + \frac{1}{2\lambda_j} \ln \frac{r_j + \Delta r}{r_j} \right)$$

### 30. Теплопередача через цилиндрическую стенку

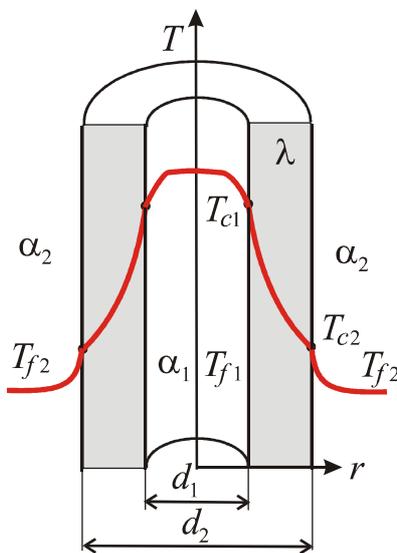


Рис. 11. Теплопроводность и теплопередача в цилиндрической стенке

Рассмотрим процесс теплопередачи через однородную бесконечную цилиндрическую стенку с теплопроводностью  $\lambda$  предполагая, что значения коэффициентов теплоотдачи на внутренней и наружной поверхностях трубы постоянны и равны соответственно  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  (рис. 11).

При установившемся тепловом режиме полный тепловой поток  $Q_1$ , отдаваемый теплоносителем с температурой  $T_{f1}$  в стенку, равен тепловому потоку  $Q_\lambda$ , проходящему через стенку и равен тепловому потоку  $Q_2$ , отдаваемому стенкой в теплоноситель с температурой  $T_{f2}$ , т. е.  $Q_1 = Q_\lambda = Q_2 = Q$ .

Запишем формулы, по которым можно рассчитать каждый из этих потоков:

$$Q_{\tau 1} = \alpha_1 (T_{f1} - T_{c1}) \cdot \pi d_1 l,$$

$$Q_{\tau \lambda} = \frac{\pi l (T_{c1} - T_{c2})}{\frac{1}{2\lambda} \ln(d_2/d_1)},$$

$$Q_{\tau 2} = \alpha_2 (T_{c2} - T_{f2}) \cdot \pi d_2 l.$$

Выразим из них разности температур и затем почленно сложим левые и правые части с учетом равенства тепловых потоков. После преобразований и очевидных сокращений получим:

$$T_{f1} - T_{f2} = \frac{Q_{\tau}}{\pi l} \cdot \left[ \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln(d_2/d_1) + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \right].$$

Величина, стоящая в квадратных скобках, называется *линейным термическим сопротивлением теплопередачи*:

$$R_{l\alpha} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln(d_2/d_1) + \frac{1}{\alpha_2 d_2}.$$

Отдельные составляющие полного термического сопротивления  $R_{l\alpha_1} = \frac{1}{\alpha_1 d_1}$  и  $R_{l\alpha_2} = \frac{1}{\alpha_2 d_2}$  представляют собой *линейные тепловые сопротивления теплоотдачи* на соответствующих поверхностях. В отличие от термических сопротивлений теплоотдачи для плоской стенки термические сопротивления теплоотдачи зависят не только от коэффициента теплоотдачи, но и от диаметра стенки.

Таким образом, линейная плотность теплового потока через цилиндрическую стенку при теплопередаче определяется как

$$q_l = \frac{Q_{\tau}}{l} = \frac{\pi(T_{f1} - T_{f2})}{R_{l\alpha}}.$$

Если тепловой поток отнести к внутренней или наружной поверхности стенки, то получим плотность теплового потока, отнесенную к единице соответствующей поверхности полого цилиндра:

$$q_1 = \frac{Q_{\tau 1}}{\pi d_1 l} = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{R_{l\alpha} d_1},$$

$$q_2 = \frac{Q_{\tau 2}}{\pi d_2 l} = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{R_{l\alpha} d_2}.$$

В случае теплопередачи через *многослойную* цилиндрическую стенку полное линейное термическое сопротивление теплопередачи будет равно

$$R_{l\alpha\Sigma} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}.$$

На практике часто встречаются цилиндры, толщина стенок которых мала по сравнению с диаметром. Расчеты показывают, что если  $\frac{d_2}{d_1} \leq 1.2$ , то для инженерных расчетов цилиндрическую стенку можно заменить плоской с толщиной  $\delta = (d_2 - d_1)/2$ .

### 31. Критический диаметр изоляции

Чтобы уменьшить тепловые потери или создать безопасные условия труда, часто нагретые стенки покрывают слоем (или несколькими слоями) тепловой изоляции. Толщину изоляции определяют, учитывая задаваемые ограничения. Например, плотность теплового потока должна быть не более определенной величины, или температура на поверхности изоляции не должна превышать некоторого заданного значения.

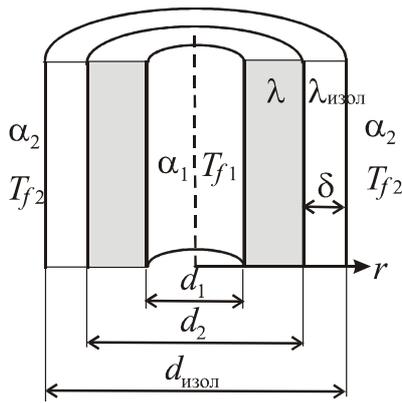


Рис. 12. Схема изоляции трубы

При теплоизоляции труб за счет слоя изоляции увеличивается термическое сопротивление теплопроводности, однако одновременно из-за увеличения наружного диаметра уменьшается термическое сопротивление внешней теплоотдачи. В результате теплотери трубы могут не всегда уменьшаться. Чтобы лучше понять это, рассмотрим трубу с диаметрами  $d_1$  и  $d_2$ , на которую нанесен слой тепловой изоляции толщиной  $\delta$  (рис. 12). Общее термическое сопротивление такой двухслойной цилиндрической стенки найдется по формуле:

$$R_{l\alpha\Sigma} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln(d_2/d_1) + \frac{1}{2\lambda_{\text{изол}}} \ln(d_{\text{изол}}/d_2) + \frac{1}{\alpha_2 d_{\text{изол}}}. \quad (14)$$

Рассмотрим теперь влияние наружного диаметра  $d_{\text{изол}} = d_2 + 2\delta$  на термическое сопротивление двухслойной цилиндрической стенки. При постоянных значениях  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda$ ,  $\lambda_{\text{изол}}$  и  $d_1$  первое и второе слагаемые не содержат  $d_{\text{изол}}$  и поэтому не меняются. Третье слагаемое с увеличением диаметра изоляции увеличивается по логарифмическому закону, а четвертое уменьшается гиперболически. При этом сумма  $R_{l\alpha\Sigma}$  имеет минимум (рис. 13). Диаметр изоляции, соответствующий минимальному термическому сопротивлению называют критическим  $d_{\text{кр}}$ .

Из уравнения

$$q_l = \frac{\pi(T_{f1} - T_{f2})}{R_{l\alpha\Sigma}}$$

следует, что линейная плотность теплового потока при увеличении внешнего диаметра изоляции  $d_{\text{изол}}$  сначала возрастает и при достижении  $d_{\text{изол}} = d_{\text{кр}}$  имеет максимум. При дальнейшем увеличении внешнего диаметра изоляции тепловой поток будет падать. Значит для эффективной работы изоляции необходимо, чтобы обязательно соблюдалось условие  $d_2 \geq d_{\text{кр}}$ . В этом случае при нанесении изоляции всегда  $d_{\text{изол}} = d_2 + 2\delta > d_{\text{кр}}$  и, следовательно, тепловые потери гарантировано уменьшаются.

Величину  $d_{\text{кр}}$  найдем, исследовав формулу (14) на экстремум. Для этого продифференцируем  $R_{l\alpha\Sigma}$  по  $d_{\text{изол}}$  и приравняем нулю полученное выражение:

$$\frac{\partial R_{l\alpha\Sigma}}{\partial d_{\text{изол}}} = \frac{1}{2\lambda_{\text{изол}}d_{\text{изол}}} - \frac{1}{\alpha_2 d_{\text{изол}}^2} = 0.$$

Значение  $d_{\text{изол}}$  из последнего выражения соответствует минимуму функции  $R_{l\alpha\Sigma} = f(d_{\text{изол}})$  и является критическим диаметром. Таким образом, при значении диаметра  $d_{\text{кр}} = 2\lambda_{\text{изол}}/\alpha_2$  термическое сопротивление теплопередачи будет минимальным.

Как правило, величина  $\alpha_2$  с изменением  $d_{\text{изол}}$  практически не изменяется. Поэтому изменить  $d_{\text{кр}}$  можно, лишь меняя материал изоляции, т. е. изменяя  $\lambda_{\text{изол}}$ .

Таким образом, условие, гарантирующее эффективную работу изоляции, должно иметь вид:

$$\lambda_{\text{изол}} \leq \frac{\alpha_2 d_2}{2}.$$

В противном случае уменьшения тепловых потерь можно добиться также существенным увеличением толщины изоляции, однако при этом большая часть слоя изоляции будет лежать, не принося пользы.

При расчетах многослойной изоляции нужно решать вопрос об оптимальном сочетании толщин каждого слоя, поскольку эффективность различных материалов различна. Доказано, например, что тот материал, у которого  $\lambda_{\text{изол}}$  меньше чем у других, следует располагать на горячей стороне стенки, там он работает более эффективно.

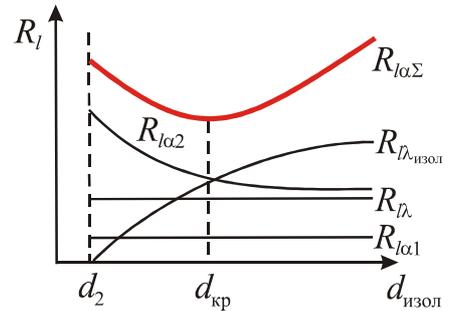


Рис. 13. Изменение термических сопротивлений теплопроводности и теплоотдачи от наружного диаметра изоляции

### 32. Теплопроводность цилиндра при наличии внутренних тепловыделений

Рассмотрим круглый цилиндр, радиус которого мал по сравнению с его длиной ( $r_0 \ll l$ ). Внутренние источники тепла  $q_V = \text{const}$  равномерно распределены по объему тела, коэффициент теплопроводности равен  $\lambda$ . Цилиндр находится в среде с постоянной температурой  $T_f$ . На поверхности задан постоянный коэффициент теплоотдачи  $\alpha$ .

При этих условиях явление стационарного распространения тепла в цилиндре описывается дифференциальным уравнением теплопроводности в форме одномерного уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{q_V}{\lambda} = 0.$$

с граничными условиями

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_0} = \alpha(T_f - T_c).$$

Для решения поставленной задачи введем новую переменную  $u = \frac{\partial T}{\partial r}$ .

Перепишем уравнение теплопроводности в виде  $\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} = -\frac{q_V}{\lambda}$ . Умножим левую и правую части уравнения на  $r \partial r$ . Получим

$$r \partial u + u \partial r = \partial(ur) = -\frac{q_V}{\lambda} r \partial r.$$

Дважды проинтегрировав это выражение, последовательно найдем:

$$u = -\frac{q_V}{2\lambda} r + \frac{C_1}{r} = \frac{\partial T}{\partial r},$$
$$T(r) = -\frac{q_V}{4\lambda} r^2 + C_1 \ln r + C_2.$$

Постоянные интегрирования определим из граничных условий. Они соответственно равны:  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = T_f + \frac{q_V r_0}{2\alpha} + \frac{q_V r_0^2}{4\lambda}$ . Следовательно, распределение температуры внутри бесконечного цилиндра будет иметь вид

$$T(r) = T_f + \frac{q_V r_0}{2\alpha} + \frac{q_V}{4\lambda} (r_0^2 - r^2),$$

Плотность теплового потока с поверхности цилиндрического стержня можно определить, используя выражение:

$$q = \alpha(T_c - T_f) = q_v \frac{r_0}{2}.$$

## КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН

### 33. Основные понятия и определения конвективного теплообмена

*Конвективный теплообмен* – процесс теплопереноса между поверхностью твердого тела и омывающей ее жидкой или газовой средой путем сочетания двух явлений – теплопроводности среды и перемещения (перемешивания) этой среды вблизи поверхности тела.

В дальнейшем движущуюся жидкую или газовую среду будем называть *теплоносителем*.

В соответствии со вторым началом термодинамики такой процесс возможен, если температура поверхности отличается от температуры теплоносителя.

Характерные размеры области, где происходит течение теплоносителя, всегда гораздо больше, чем длина свободного пробега его молекул. Поэтому движущуюся среду считают *непрерывной*. Это означает, что и температура в теплоносителе распределена непрерывно. Следовательно, градиент температуры и плотность теплового потока сохраняют здесь тот же самый смысл, что и в теории теплопроводности.

Движение любого теплоносителя и в природе, и в технике возникает благодаря наличию разности давлений. В зависимости от происхождения этой разности давлений различают *свободную* и *вынужденную* конвекцию (движение).

Свободная (естественная) конвекция возникает при неравномерной плотности теплоносителя. В неравномерно нагретой жидкости или газе плотность холодных и нагретых участков различна. Под действием поля массовых сил (земное притяжение) более плотные объемы перемещаются вниз, вытесняя более легкие, создавая при этом условия для перемешивания. Свободное движение возникает лишь около поверхности теплообмена. На некотором удалении от поверхности теплообмена теплоноситель практически неподвижен.

Вынужденная (принудительная) конвекция возникает в случае, когда движение теплоносителя возбуждается внешними силами, например, насосом, подающим жидкость по трубе или вентилятором, обдувающим поверхность тела. Характерной особенностью теплоотдачи при вынужденном движении является то, что она зависит от *скорости* потока теплоносителя вдоль стенки.

В общем случае наряду с вынужденным движением одновременно может развиваться и свободное движение. Относительное влияние последнего тем больше, чем больше разность температур в отдельных точках теплоносителя и чем меньше скорость вынужденного движения.

При любом типе движения жидкости в зависимости от его интенсивности различают следующие режимы.

*Ламинарный режим* – это спокойный, "слоистый" режим течения. Слои теплоносителя движутся параллельно друг другу со своей определенной скоростью, обтекая поверхность теплообмена без перемешивания. Теплоотдача в этом режиме наиболее слабая, так как теплота передается поперек слоев теплоносителя только теплопроводностью.

С увеличением скорости ламинарность потока сохраняется лишь до некоторого предела, после которого движение становится неустойчивым. В потоке периодически возникают небольшие вихри, которые то исчезают, то появляются вновь. Такой режим течения называется *переходным*.

*Турбулентный режим* – это интенсивный, вихревой режим движения. Слои теплоносителя теряют устойчивость, разрушаются, хаотически перемешиваясь друг с другом, образуя вихри различных размеров. Теплоотдача здесь идет более интенсивно, чем в ламинарном режиме, вследствие дополнительного переноса теплоты вихревой конвекцией.

Возникновение ламинарного или турбулентного режима зависит от средней массовой скорости теплоносителя, его вязкости, формы и размеров поверхности, наличия внешних турбулизаторов.

Взаимодействие потока теплоносителя с поверхностью твердого тела сопровождается молекулярным и конвективным переносом импульса и теплоты по нормали к стенке. Эти процессы переноса осуществляются одними и теми же материальными частицами, поэтому трение на поверхности теплообмена и перенос теплоты через эту поверхность оказываются связанными между собой. Под действием сил внутреннего трения в движущемся вдоль стенки теплоносителе формируется *поле скорости*, а в результате теплообмена – *поле температуры*. В этих полях выделяют две пристеночные области.

1. Пристеночную область, в пределах которой наблюдается существенное изменение продольной скорости, называют *гидродинамическим пограничным слоем*. В пределах гидродинамического пограничного слоя продольная скорость изменяется от нуля (на поверхности тел) до скорости невозмущенного потока (вдали от тела).

2. *Тепловой пограничный слой* – слой теплоносителя, прилегающий непосредственно к поверхности стенки, в пределах которого сосредоточено практически все изменение температуры теплоносителя: от температуры поверхности  $T_c$  до температуры теплоносителя в ядре потока  $T_f$ .

Толщины гидродинамического и теплового пограничных слоев в общем случае не равны. Соотношение их толщин зависит от рода теплоносителя и формы поверхности.

### **34. Факторы, влияющие на интенсивность конвекции**

В качестве теплоносителей используются различные вещества, находящиеся в газообразном или жидком состоянии. Очевидно, что в первую очередь влияние на интенсивность теплоотдачи будут оказывать такие *свойства* теплоносителя, как коэффициент теплопроводности  $\lambda_f$ , удельная теплоемкость  $c_f$ ,

коэффициент температуропроводности  $a_f$  и его плотность  $\rho_f$ , так как они определяют интенсивность переноса энергии в виде теплоты в газах и жидкостях за счет теплопроводности.

Толщина пограничного слоя и его структура зависят от скорости потока относительно поверхности теплообмена. При прочих равных условиях увеличение скорости за пределами гидродинамического пограничного слоя или средней скорости движения в канале ведет к уменьшению толщины пограничного слоя, создает более благоприятные условия для возникновения турбулентности и тем самым способствует повышению интенсивности теплоотдачи.

На свободный конвективный теплообмен существенное влияние оказывает также *тепловое расширение* теплоносителя, которое характеризуется *температурным коэффициентом объемного расширения*

$$\beta = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P.$$

В жидкостях тепловое расширение мало. В газе, близкого к идеальному, коэффициент объемного расширения равен  $\beta = 1/T$ .

При вынужденном конвективном теплообмене большое значение имеет вязкость теплоносителя. Вязкость теплоносителя связана с силой внутреннего трения, противодействующего движению. Согласно закону Ньютона эта касательная сила, отнесенная к единице поверхности, действующая в любой точке потока в плоскости, ориентированной по течению, и пропорциональная изменению скорости в направлении нормали к направлению движения

$$f_s = \mu \frac{\partial w}{\partial n},$$

где  $\mu$  – *динамический коэффициент вязкости* или просто вязкость;  $\frac{\partial w}{\partial n}$  – градиенте скорости набегающего потока по толщине слоя. Опыт показывает, что в более вязких теплоносителях теплоотдача протекает менее интенсивно.

В практических расчетах часто вместо динамической вязкости используют *кинематическую вязкость*  $\nu = \mu/\rho_f$ . Кинематическая вязкость капельных жидкостей пропорциональна динамической вязкости, так как их плотность слабо зависит от температуры. Напротив, у газов кинематический коэффициент вязкости сильно растет, так как с ростом температуры падает их плотность.

Во всех случаях конвективного теплообмена на интенсивность теплоотдачи в значительной мере влияет форма продольного сечения обтекаемого тела и его размеры, так как они определяют условия формирования пограничного слоя.

Анализ процесса теплоотдачи начнем с рассмотрения системы дифференциальных уравнений, описывающих этот процесс.

### 35. Дифференциальные уравнения конвективного теплообмена

Для получения аналитического решения задач конвективного теплообмена составляются дифференциальные уравнения, учитывающие тепловые и гидродинамические явления в данном процессе. Вывод таких уравнений рассматривается в специальной литературе. Мы будем использовать в дальнейшем только конечные результаты этих выводов.

Экспериментально установлено, что в тонком слое вблизи поверхности твердого тела теплоноситель практически неподвижен, и теплота здесь передается только молекулярным путем. Поэтому в соответствии с гипотезой Фурье в пристеночной области

$$q = -\lambda_f \left. \frac{\partial T_f}{\partial n} \right|_{n=0},$$

где  $\lambda_f$  – теплопроводность теплоносителя;  $\left. \frac{\partial T_f}{\partial n} \right|_{n=0} = \text{grad} T_f \Big|_{n=0}$  – нормальная составляющая градиента температуры теплоносителя вблизи поверхности.

Этот же удельный поток передается теплоотдачей и по закону Ньютона-Рихмана равен

$$q = \alpha(T_c - T_f).$$

Приравнивая правые части этих формул, получаем *дифференциальное уравнение теплоотдачи*

$$-\lambda_f \left. \frac{\partial T_f}{\partial n} \right|_{n=0} = \alpha(T_c - T_f) \quad (15)$$

В отличие от коэффициента теплопроводности  $\lambda$  коэффициент теплоотдачи конвекцией  $\alpha$  не является характеристикой вещества и не может быть взят из таблиц. Его величина в большой мере зависит от конкретных условий формирования пограничного слоя теплоносителя.

Действительно, из дифференциального уравнения теплоотдачи получаем

$$\alpha = -\frac{\lambda_f}{T_c - T_f} \cdot \left. \frac{\partial T_f}{\partial n} \right|_{n=0}.$$

В него входит неизвестная величина  $\left. \frac{\partial T_f}{\partial n} \right|_{n=0}$ , которую можно определить, зная уравнение поля температуры в теплоносителе:  $T_f = T_f(x, y, z, \tau)$ , где  $x, y, z, \tau$  – текущие координаты элементарного объема жидкости и текущее время.

Поле температур в теплоносителе определяется дифференциальным уравнением теплопроводности

$$\frac{dT_f}{d\tau} = \frac{\lambda_f}{c_f \rho_f} \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] = a_f \nabla^2 T_f,$$

где  $c_f$  – удельная теплоемкость;  $\rho_f$  – плотность;  $a_f$  – температуропроводность теплоносителя.

Этот закон сохранения энергии при конвективном теплообмене называется *уравнением энергии*.

Если теплоноситель движется, то координаты любого элементарного объема будут меняться во времени, поэтому

$$T_f = T_f[x(\tau), y(\tau), z(\tau), \tau].$$

Отсюда следует, что полная производная (так называемая *субстанциональная производная*) по времени должна иметь вид

$$\frac{dT_f}{d\tau} = \frac{\partial T_f}{\partial \tau} + \frac{\partial T_f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial T_f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \tau} + \frac{\partial T_f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \tau} = \frac{\partial T_f}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial T_f}{\partial x} + w_y \frac{\partial T_f}{\partial y} + w_z \frac{\partial T_f}{\partial z}.$$

В этом равенстве  $\frac{\partial T_f}{\partial \tau}$  – локальная составляющая изменения температуры во времени, а сумма  $w_x \frac{\partial T_f}{\partial x} + w_y \frac{\partial T_f}{\partial y} + w_z \frac{\partial T_f}{\partial z}$  – конвективная составляющая.

Из приведенных формул следует, что изменение температуры теплоносителя зависит от скорости ее движения:

$$\vec{v} = w_x \vec{i} + w_y \vec{j} + w_z \vec{k},$$

где  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  – единичные орты.

Скорость  $\vec{v}$ , вообще говоря, неизвестна, поэтому совокупность дифференциальных уравнений является незамкнутой. Необходимо дополнить её уравнением, описывающим движение теплоносителя. Это уравнение называется *уравнением движения*, или *уравнением Навье–Стокса*. В его основе лежит условие равновесия в подвижном объеме теплоносителя (второй закон Ньютона для движущегося элемента жидкости):

$$\rho_f \frac{d\vec{w}}{d\tau} = \bar{g} \beta \Delta T - \text{grad}P + \mu \nabla^2 \vec{w},$$

где  $\frac{d\bar{w}}{d\tau} = \frac{\partial\bar{w}}{\partial\tau} + w_x \frac{\partial\bar{w}}{\partial x} + w_y \frac{\partial\bar{w}}{\partial y} + w_z \frac{\partial\bar{w}}{\partial z}$  – субстанциональная производная скорости;  $\nabla^2$  – оператор Лапласа;  $\text{grad}P$  – градиент давления;  $\bar{g}$  – ускорение свободного падения;  $\mu$  – динамическая вязкость;  $\beta$  – температурный коэффициент объемного расширения теплоносителя.

Так как в уравнение движения входит еще одна неизвестная величина – плотность, то система уравнений не является замкнутой. Для замыкания системы требуется еще одна зависимость – *уравнение неразрывности потока* – частный случай закона сохранения массы для несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0.$$

Приведенные дифференциальные уравнения конвективного теплообмена описывают бесчисленное множество процессов. Чтобы решить конкретную задачу, к приведенным уравнениям следует присоединить условия однозначности. Условия однозначности дают математическое описание частных случаев. Условия однозначности состоят из:

- а) геометрических условий, характеризующих форму и размеры тела или системы, в которой протекает процесс;
- б) физических условий, характеризующих физические свойства среды;
- в) граничных условий, определяющих особенности протекания процесса на границах жидкой среды;
- г) временных, или начальных условий, характеризующих особенности процесса в начальный момент времени; для стационарных процессов эти условия отпадают.

Таким образом, коэффициент теплообмена  $\alpha$  представляет собой сложную функцию большого числа параметров:

$$\alpha = f(\Phi, l_0, w, \lambda_f, a_f, c_f, \rho_f, \mu, \beta),$$

где  $\Phi$  – символическое обозначение совокупности параметров, характеризующих форму и строение поверхности;  $l_0$  – характерный размер наиболее существенно влияющий на теплообмен. Обозначение остальных параметров приведено выше по тексту.

Аналитическое решение приведенных систем дифференциальных уравнений и условий однозначности с большим количеством переменных получается сложным. В настоящее время такие задачи решаются численными методами. Но компьютерные решения носят частный характер, поэтому большое значение приобретает экспериментальный путь исследования.

Достоинством экспериментального метода является:

- а) достоверность получаемых результатов;

б) основное внимание можно сосредоточить на изучении величин, представляющих наибольший практический интерес.

Основным недостатком этого метода является, что результаты данного эксперимента не могут быть использованы применительно к другому явлению, которое в деталях отличается от изученного. Поэтому выводы, сделанные на основании анализа результатов данного экспериментального исследования, не допускают распространения их на другие явления. Следовательно, при экспериментальном методе исследования каждый конкретный случай должен служить самостоятельным объектом изучения.

## ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ

### 36. Основные понятия теория подобия

Объединение преимуществ аналитического и экспериментального методов исследования позволяет осуществить *теория подобия*, которую часто называют методом научного обобщения. Сущность подхода здесь простая: все явления одного класса (теплопроводность, конвекция и др.) делят на отдельные группы подобных явлений, выявив особые признаки такого подобия. Далее из множества явлений каждой группы экспериментально исследуют лишь малое число их, выявляя зависимости не между конкретными размерными величинами, а между обобщенными, безразмерными числами подобия, количество которых всегда меньше, чем размерных параметров. Результаты опытов обобщают в виде полуэмпирических формул, которые являются справедливыми для всех явлений данной группы.

Понятие подобия пришло в физику из геометрии, где речь шла о геометрически подобных фигурах и телах. *Геометрически подобными* называются такие фигуры, у которых сходственные (одноименные) стороны пропорциональны, а сходственные углы равны.

Понятие подобия распространяется и на любое физическое явление. Физические явления считаются *подобными*, если они относятся к одному и тому же классу, протекают в геометрически подобных системах, и у них подобны все *однородные физические величины*, характеризующие эти явления. *Однородными* называются такие величины, которые имеют один и тот же физический смысл и одинаковую размерность.

Подобными могут быть только явления одинаковой природы, описываемые одинаковыми аналитическими зависимостями. Явления, описываемые одинаковыми по форме уравнениями, но имеющие различную физическую природу, называются *аналогичными*. Примером аналогичных явлений могут служить явления теплопроводности и электропроводности.

Таким образом, для подобных физических явлений в *сходственных точках* и в *сходственные моменты времени* любая величина  $\varphi'$  первого явления пропорциональна величине  $\varphi''$  второго явления, т. е.  $\varphi' = c_{\varphi} \cdot \varphi''$ . При этом каждая физическая величина  $\varphi$  имеет свою *константу подобия*  $c_{\varphi}$  численно отличную от других.

*Сходственными* называются такие точки систем, координаты которых удовлетворяют геометрическому подобию:  $c_l = \frac{l'_1}{l''_1} = \frac{l'_2}{l''_2} \dots$ , где  $l'_1, l'_2$  – линейные размеры, характеризующие геометрию первой системы;  $l''_1, l''_2$  – линейные размеры, характеризующие геометрию второй системы;  $c_l$  – константа геометрического подобия.

*Сходственные моменты времени* наступают по истечении периодов времени  $\tau'$  и  $\tau''$ , имеющих общее начало отсчета и связанных между собой константой подобия времени  $c_\tau$ :  $c_\tau = \tau'/\tau''$ .

Аналогично геометрическому подобию уравнения, описывающие подобные физические явления, после приведения их к безразмерному виду становятся тождественно одинаковыми. При этом в сходственных точках все одноименные безразмерные величины, в том числе и безразмерные параметры, будут равны.

Приведем к безразмерному виду дифференциальное уравнение теплоотдачи (15). Если ввести избыточную температуру  $\vartheta = T - T_f$ , то его можно записать в форме

$$\alpha = - \frac{\lambda_f}{\vartheta_c} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \Big|_{y=0}.$$

Выберем какой-либо характерный геометрический размер  $l_0$  и избыточную температуру стенки  $\vartheta_c = T_c - T_f$  в качестве *величин приведения*. Введем безразмерные величины  $Y = \frac{y}{l_0}$  и  $\theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_c}$ , тогда  $y = l_0 \cdot Y$  и  $\vartheta = \vartheta_c \cdot \theta$ . Подставим полученные выражения в исходное уравнение и преобразуем его к виду:

$$\alpha \cdot \frac{l_0}{\lambda_f} = - \frac{\partial \theta}{\partial Y} \Big|_{Y=0}.$$

Теперь помимо безразмерной температуры  $\theta$  и безразмерной координаты  $Y$ , в уравнение входит безразмерный комплекс  $Nu = \alpha \cdot \frac{l_0}{\lambda_f}$ , составленный из разнородных физических величин, характеризующих явление теплоотдачи. Полученный безразмерный комплекс называется числом Нуссельта и представляет собой *безразмерный коэффициент теплоотдачи*. Согласно свойству подобных физических явлений, этот комплекс должен иметь одинаковые значения для всех подобных систем. Такие комплексы носят название *чисел подобия*.

Числа подобия, составленные только из заданных параметров математического описания задачи – условий однозначности (краевые условия), называются *критериями подобия*.

Критерии подобия, представляющие собой соотношение одноименных величин, называют *параметрическими*.

Используя теорию подобия из системы дифференциальных уравнений конвективного теплообмена можно получить уравнение теплоотдачи в следующем критериальной форме:

$$Nu = f(\Phi; X; Y; Z; Re; Gr; Pr) ,$$

где:  $X, Y, Z$  – безразмерные координаты;  $\Phi$  – форм-фактор;

$Re = \frac{w \cdot l_0}{\nu}$  – критерий Рейнольдса, характеризующий отношение масштабов сил инерции и вязкости и определяющий гидродинамический режим движения теплоносителя;

$Gr = \frac{g \cdot l_0^3}{\nu^2} \cdot \beta \cdot \vartheta_c$  – критерий Грасгофа, характеризующий подъемную силу, возникающую вследствие разности плотности теплоносителя;

$Pr = \frac{\nu}{a_f} = \frac{\mu c_f}{\lambda_f}$  – критерий Прандтля, определяющий физические свойства теплоносителя.

Критерии, составленные из величин, определяющих характер процесса, но не включающие искомым (зависимых) величин, называются *определяющими*. Критерии, включающие искомые величины, называются *определяемыми*. Так, при расчёте конвективного теплообмена критерий  $Nu$  является определяемым, так как в него входит искомая величина  $\alpha$ . Критерии  $Re$  и  $Pr$  в этих расчётах – определяющие.

### 37. Теоремы подобия

Практическое применение теории подобия сводится к тому, что физическое явление изучают на *модели*, т. е. в удобных для опыта и расчетов масштабах величин, а затем полученные результаты обобщают на более широкий круг *подобных* явлений.

При этом требуется заранее знать:

- а) какие величины надо измерять в опыте на модели;
- б) как обобщать результаты опыта;
- в) на какие явления можно распространить полученные данные.

Ответ на эти вопросы дают теоремы подобия. Основные положения теории подобия формулируются в виде трех теорем. Первая и вторая теоремы подобия формулируют основные свойства подобных между собой явлений, третья устанавливает признаки, по которым можно определить, подобны ли рассматриваемые явления.

**Первую теорему** подобия называют теоремой Ньютона.

Согласно этой теореме, в сходственных точках подобных процессов одноимённые критерии должны иметь одинаковые значения. Здесь речь идёт о тех точках процессов, в которых определяются искомые величины.

Константы подобия сохраняют числовое значение только для пары подобных явлений, но они остаются одинаковыми для всех сходственных точек рассматриваемых систем.

Числа подобия сохраняют свое значение в сходственных точках всех подобных между собой систем, но в различных точках одной и той же системы числа имеют разные значения.

Таким образом, теорема Ньютона отвечает на вопрос: в опыте надо измерять величины, входящие в критерии подобия.

**Вторая теорема** была сформулирована Э. Бэкенгемом ( $\pi$ -теорема): *полное уравнение физического процесса, связывающее между собой  $N$  физических величин, может быть приведено к зависимости между  $M$  безразмерными комплексами этих величин, причем*

$$M = N - K ,$$

где  $K$  – число первичных величин, используемых при описании явления.

Первичной (основной) называют величину, которая вводится для данного класса явлений безотносительно к другим величинам и может быть измерена непосредственно. Первичными величинами теплообмена являются: длина, масса, время, температура.

Вторичная (производная) величина выражается через первичные на основе физических представлений, законов: например, скорость (вторичная величина) равна отношению длины и времени.

Функциональная зависимость между числами подобия называется *уравнением подобия*. При конвективном теплообмене уравнение подобия в общем случае имеет следующий вид

$$Nu = f(Re, Pr, Gr).$$

Сущность второй теоремы подобия хорошо определяется следующей формулировкой: *определяющие и определяемые критерии подобных процессов связаны между собой уравнением подобия, которое является безразмерным решением рассматриваемой задачи, справедливым для всех подобных процессов.*

Важно помнить, что  $\pi$ -теорема устанавливает минимальное значение  $M$ . Вообще же количество комплексов может быть любым.

**Третья теорема** подобия доказана М. В. Кирпичевым и А. А. Гухманом: *необходимыми и достаточными условиями для создания подобия являются пропорциональность сходственных параметров, входящих в условия однозначности (краевые условия), и равенство критериев подобия изучаемого явления.*

Теорию подобия можно рассматривать как учение о характерных для данного процесса обобщенных безразмерных переменных. Переход к таким переменным позволяет переносить полученные для единичного случая зависимости на группу подобных явлений, у которых определяющие параметры такие же, как у модели. На основании уравнений подобия можно определить значе-

ния числа Нуссельта и, следовательно, соответствующие значения коэффициента теплоотдачи

$$\alpha = \frac{\lambda_f}{l_0} \cdot \text{Nu}.$$

### 38. Определяющий размер и определяющая температура

При решении уравнений подобия следует обращать внимание на определяющую температуру и определяющий геометрический размер.

За *определяющий размер*, входящий в критерий подобия, выбирают наиболее характерный размер системы, который в наибольшей степени позволяет учесть физическую картину явления. Например, при свободной конвекции около вертикальных поверхностей в качестве определяющего размера логично принять высоту объекта  $h$ , а при вынужденном течении в трубах – внутренний диаметр трубы  $d$ . Для каналов некруглого сечения в качестве определяющего размера обычно принимают эквивалентный диаметр

$$d_{\text{эkv}} = \frac{4S}{P},$$

где  $S$  – площадь поперечного сечения канала;  $P$  – полный периметр канала.

При поперечном обтекании одиночной трубы или пучка труб в качестве определяющего размера обычно принимают внешний диаметр трубы, а при обтекании плиты – ее длину в направлении течения. В отдельных случаях в качестве определяющего размера может быть использована комбинация физических величин из условий однозначности, имеющая размерность длины.

За определяющую температуру обычно принимается одна из следующих температур: температура поверхности (стенки)  $T_c$ , средняя температура жидкости вдали от стенки  $T_f$ , а также средняя температура (средняя температура пограничного слоя)

$$T_m = \frac{T_c + T_f}{2}.$$

Таким образом, выбор  $l_0$  и  $T$  должен удовлетворять трем требованиям:

- 1) быть существенным для изучаемого процесса;
- 2) поддаваться измерению;
- 3) оставаться неизменным в ходе эксперимента.

Поскольку все-таки выбор остается неоднозначным, надо точно знать, каким образом выбраны эти величины в опытах. Этим фактом часто объясняется то обстоятельство, что различные авторы для одного и того же процесса получают различные эмпирические формулы. Разнообразие, существующее в выборе определяющей температуры, заставляет внимательно относиться к расчетам критериев подобия, входящих в уравнения. Будем далее обозначать такой вы-

бор подстрочными индексами. Например, символ  $Nu_{df}$  означает, что число Нуссельта рассчитано по характерному размеру  $d$ , а теплопроводность  $\lambda_f$ , входящая в него взята из таблиц при температуре  $T_f$

$$Nu_{df} = \alpha \cdot \frac{d}{\lambda_f|_{T=T_f}}.$$

### 39. Получение уравнений подобия на основе анализа размерностей

Математическая формулировка задачи является надежным основанием для выявления перечня и структуры чисел подобия, определяющих исследуемое явление. Однако часто возникает необходимость исследовать явление, которое не имеет математического описания. В этом случае перечень и структуру чисел подобия можно выявить на основе анализа размерностей. Сущность метода состоит в том, что составляется перечень размерных величин, которые могут влиять на протекание процесса, и из этих величин формируются безразмерные комплексы. Надежность полученных этим методом результатов зависит от правильности и полноты выявления перечня влияющих на явление величин.

Число безразмерных комплексов, которое получается на основе анализа размерностей, определяется на основании  *$\pi$ -теоремы*.

Для получения чисел подобия на основе анализа размерностей используют различные методы. Наиболее простой и удобный из них – *метод Рэлея*. В соответствии с этим методом, искомая величина выражается через влияющие на нее параметры с помощью степенного комплекса, включающего безразмерный коэффициент и все используемые в анализе параметры в различных степенях.

Например, при выявлении чисел подобия, которые можно использовать для обобщения опытных данных при исследовании вынужденной теплоотдачи в трубе, искомой величиной является коэффициент теплоотдачи  $\alpha$ .

Качественный анализ этого явления показывает, что если не учитывать влияния массовых сил и других усложняющих факторов на процесс теплоотдачи, то  $\alpha$  должен определяться линейным размером системы  $l_0$ , скоростью жидкости  $w$ , плотностью  $\rho_f$ , удельной теплоемкостью  $c_f$ , коэффициентом теплопроводности  $\lambda_f$  и динамическим коэффициентом вязкости  $\mu$ .

Для анализа размерности связь между характеристиками изучаемого процесса можно представить в виде

$$\alpha = C \cdot l_0^a \cdot w^b \cdot \rho_f^n \cdot c_f^m \cdot \lambda_f^g \cdot \mu^k. \quad (16)$$

Примем в качестве основной размерности длина – м, времени – с, массы – кг, температуры – К.

Тогда

$$\begin{aligned}
[\alpha] &= \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}} = \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{К}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{К}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{К}} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^3 \cdot \text{К}} = \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-1}; \\
[c_f] &= \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{К}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{К}} = \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{К}} = \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1}; \\
[\lambda_f] &= \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с} \cdot \text{м} \cdot \text{К}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{м} \cdot \text{К}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^3 \cdot \text{К}} = \text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-1}; \\
[\mu] &= \text{Па} \cdot \text{с} = \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{с}^2 \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{с} \cdot \text{м}} = \text{кг} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}; \\
[l_0] &= \text{м}; \quad [\rho_f] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = \text{кг} \cdot \text{м}^{-3}; \quad [w] = \frac{\text{м}}{\text{с}} = \text{м} \cdot \text{с}^{-1}.
\end{aligned}$$

Размерности левой и правой части зависимости (16) должны быть одинаковыми

$$\text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-1} = (\text{м})^a (\text{м} \cdot \text{с}^{-1})^b (\text{кг} \cdot \text{м}^{-3})^n (\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1})^m (\text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-1})^g (\text{кг} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{м}^{-1})^k.$$

Приравняв показатели степеней при каждой размерности в правой и левой частях равенства, получим:

$$\begin{aligned}
1 &= n + g + k; \\
-3 &= -b - 2m - 3g - k; \\
-1 &= -m - g; \\
0 &= a + b - 3n + 2m + g - k.
\end{aligned}$$

Таким образом, из шести показателей степени четыре можно выразить через два остальных:

$$a = n - 1; \quad b = n; \quad g = 1 - m; \quad k = m - n.$$

Тогда связь между характеристиками изучаемого процесса можно представить в виде

$$\alpha = C \cdot l_0^{n-1} \cdot w^n \cdot \rho_f^n \cdot c_f^m \cdot \lambda_f^{1-m} \cdot \mu^{m-n} = C \cdot \left( \frac{l_0^n}{l_0} \right) \cdot w^n \cdot \rho_f^n \cdot c_f^m \left( \frac{\lambda_f}{\lambda_f^m} \right) \left( \frac{\mu^m}{\mu^n} \right).$$

Объединим параметры с одинаковыми показателями степени:

$$\alpha \frac{l_0}{\lambda_f} = C \cdot \left( \frac{w l_0 \rho_f}{\mu_f} \right)^n \cdot \left( \frac{c_f \mu}{\lambda_f} \right)^m = C \cdot \left( \frac{w l_0}{v} \right)^n \cdot \left( \frac{v}{a_f} \right)^m.$$

Учитывая, что  $\text{Nu} = \frac{\alpha l_0}{\lambda_f}$ ,  $\text{Re} = \frac{w l_0}{v}$  и  $\text{Pr} = \frac{v}{a_f}$ , получим:

$$\text{Nu} = C \cdot \text{Re}^n \cdot \text{Pr}^m .$$

Число полученных безразмерных комплексов соответствует  $\pi$ -теореме, так как  $N = 7$ ,  $K = 4$ , следовательно  $M = N - K = 7 - 4 = 3$ .

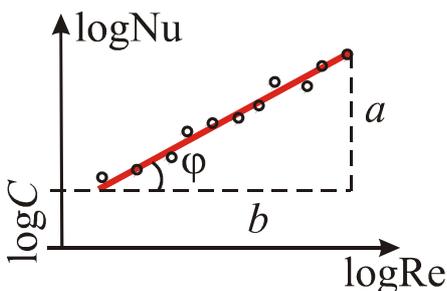
Такого рода зависимости являются чисто эмпирическими. Они применимы лишь в тех пределах изменения аргумента, которые подтверждены опытом. Экстраполяция этих зависимостей на большие или меньшие значения определяющих критериев, строго говоря, недопустима.

#### 40. Получение эмпирических критериальных уравнений

Зависимости между числами подобия, по которым определяют число Нуссельта, называют *критериальными уравнениями*. В общем виде

$$\text{Nu} = C \cdot \text{Re}^n \cdot \text{Pr}^m \cdot \text{Gr}^r .$$

Предположим, что критерий Nu зависит только от критерия Re (или, что опыты проводились с теплоносителем, критерий Pr которого является постоянной величиной, не зависящей от температуры). В этом случае



$$\text{Nu} = C \cdot \text{Re}^n .$$

Логарифмируя это уравнение, получаем:

$$\log \text{Nu} = \log C + n \cdot \log \text{Re}$$

Рис. 15. Графическое определение показателя степени  $n$

или

$$Y = A + n \cdot X .$$

Это уравнение является уравнением прямой линии (рис.15). Показатель степени  $n$  представляет собой тангенс угла наклона прямой к оси абсцисс, т. е.  $\varphi = \text{arctg}(n)$ . Следовательно, значение  $n$  можно определить с помощью графического представления опытных данных в логарифмических координатах.

Постоянная  $C$  определяется из уравнения  $C = \text{Nu}/\text{Re}^n$ , которому удовлетворяет любая точка прямой линии. Проверкой применимости степенной зависимости является тот факт, что в логарифмических координатах все точки укладываются на прямую линию. Если же опытные точки располагаются по кривой, то эту кривую обычно заменяют ломаной. Для отдельных участков такой кривой значения  $C$  и  $n$  различны.

Если искомая величина Nu является функцией двух аргументов, например

$$\text{Nu} = C \cdot \text{Re}^n \cdot \text{Pr}^m ,$$

то уравнение после логарифмирования примет вид

$$\log \text{Nu} = \log C + n \cdot \log \text{Re} + m \cdot \log \text{Pr}.$$

На графике (рис.16) в координатах  $\log \text{Nu}$  и  $\log \text{Re}$  получается семейство прямых, составляющих с осью абсцисс угол  $\varphi = \arctg(n)$ ; третий аргумент берется в качестве параметра. Тогда по одной из прямых определяют показатель  $n$  при числе  $\text{Re}$ . Затем опытные данные представляют на графике в виде зависимости

$$\log \left( \frac{\text{Nu}}{\text{Re}^n} \right) = \log C + m \cdot \log \text{Pr}.$$

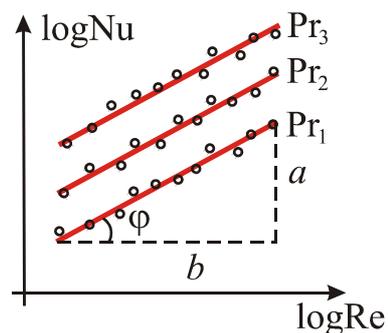


Рис. 16. Графическое определение показателя степени  $n$  при различных значениях числа  $\text{Pr}$

Величина  $n$  известна, поэтому все данные ложатся на прямую линию, наклоненную к оси  $\log \text{Pr}$  под углом  $\psi = \arctg(m)$ . Из последнего графика определяют показатель степени  $m$  при критерии  $\text{Pr}$ , а затем по уравнению

$$C = \text{Nu} / (\text{Re}^n \cdot \text{Pr}^m)$$

определяют значение коэффициента  $C$ . Аналогичным образом можно устанавливать и более сложные зависимости.

В последнее время все шире используется полуэмпирический метод получения формул. Зависимость между безразмерными переменными представляется в виде функции, получаемой предварительно с точностью до постоянных величин из аналитического рассмотрения задачи. Постоянные величины определяются с помощью опытных данных. Такой путь получения формул является предпочтительным по сравнению с эмпирическим методом.

Конкретный вид критериальной формулы, определяющий число Нуссельта (следовательно, и коэффициент теплоотдачи) зависит от условий подобия процессов теплоотдачи и приводится в справочной литературе и в руководствах по теплообмену. В настоящем пособии ограничимся лишь некоторыми, наиболее широко применяемыми формулами.

#### 41. Критериальные уравнения теплоотдачи при свободной конвекции

Всегда и неизбежно возникающая в земных условиях свободная конвекция определяет эффективность работы большого числа теплотехнического оборудования (например, батарей центрального отопления), и в тоже время является причиной тепловых потерь в окружающую среду. Поэтому инженеру нужно уметь рассчитывать интенсивность такой конвекции.

Можно выделить две основные группы подобных явлений у процессов свободной конвекции: возле вертикальных стенок и на горизонтальных трубах.

Картина образования свободной конвекции у «горячей» вертикальной стенки следующая. Нагреваясь от стенки, отдельные макрообъемы жидкости или газа образуют направленное движение вверх, а на их место подходят другие из более холодных слоев. Влияние внутреннего трения со стороны неподвижного слоя, прилипшего непосредственно к стенке, и со стороны неподвижной в целом массы теплоносителя, расположенной на достаточном удалении от стенки приводит к возникновению около стенки пограничного слоя, внутри которого их скорость движения отлична от нуля. С ростом высоты подъема все больше слоев вовлекаются в движение, толщина пограничного слоя растет. По мере прогрева скорость потока частиц увеличивается и это приводит к появлению пульсации и образованию турбулентных вихрей в ядре пограничного слоя, особенно в верхней его части.

Определяющим размером в этом процессе является высота стенки  $h$ .

Поскольку среднemasсовая скорость  $\bar{w}$  при свободной конвекции практически равна нулю, число  $Re$  тоже стремится к нулю, и поэтому, как любая постоянная величина, перестает влиять на ход процесса. В этом случае говорят о "вырождении" критерия  $Re$ .

Экспериментальные исследования и обработка опытных данных показали, что в абсолютном большинстве случаев (исключая расплавленные металлы) влияние чисел  $Pr$  и  $Gr$  на величину  $Nu$  одинаково.

Если определяющие критерии таковы, что  $Pr Gr < 10^9$ , то пограничный слой, в основном, ламинарный и для этого случая

$$Nu_{hf} = 0,76 \cdot (Pr Gr)_{hf}^{0,25} \left( \frac{Pr_f}{Pr_c} \right)^{0,25}.$$

Если  $Pr Gr > 10^9$ , то определяющей является турбулентная часть пограничного слоя, и в результате обработки опытных данных получено

$$Nu_{hf} = 0,15 \cdot (Pr Gr)_{hf}^{0,33} \left( \frac{Pr_f}{Pr_c} \right)^{0,25}.$$

Картина образования свободной конвекции у горизонтальных труб отличается от предыдущей симметричностью, цилиндрической искаженностью и образованием турбулентных вихрей только около верхней части трубы. В основном здесь движение ламинарное. Опытные исследования позволили получить для этой группы подобных явлений следующее критериальное уравнение

$$Nu_{df} = 0,5 \cdot (Pr Gr)_{df}^{0,25} \left( \frac{Pr_f}{Pr_c} \right)^{0,25}.$$

## 42. Критериальные уравнения теплоотдачи при движении теплоносителя в трубах

Интенсивность теплообмена в трубах зависит от скорости потока и его температуры, изменение которых происходит как по сечению канала, так и по длине. После втекания потока в трубу постепенно изменяется эпюра скоростей по сечению трубы, толщина и характер пограничного слоя. Стабилизированное течение устанавливается на расстоянии  $l > 50d$  ( $d$  – диаметр трубы) от начала трубы.

Режим течения характеризуется величиной числа Рейнольдса. При  $Re < 2320$  течение в трубах ламинарное, а при  $Re > 10^4$  – турбулентное. Когда  $2320 < Re < 10^4$ , имеют место переходные режимы. При турбулентном и переходном режимах вклад свободной конвекции в общее осредненное значение  $\alpha$  настолько мал, что практически это не обнаруживается опытами. При этих режимах изменение величины критерия Gr не влияет на величину Nu, т. е. критерий Gr, численно стремясь к нулю, вырождается.

При ламинарном течения в зависимости от условий это влияние может быть различным (от существенного до почти нулевого), это связано, как показали эксперименты, с величиной произведения  $PrGr$ . Так, при  $PrGr < 8 \cdot 10^5$  влияние свободной конвекции можно не учитывать и такой режим течения называют еще вязкостным. При вязкостном режиме передача теплоты осуществляется только теплопроводностью. При ламинарном течении жидкости в трубе в вязкостном режиме Михеев М. А. предлагает пользоваться эмпирической формулой

$$Nu_{df} = 0,15 \cdot Re_{df}^{0,33} Pr_f^{0,43} \left( \frac{Pr_f}{Pr_c} \right)^{0,25}.$$

При  $PrGr > 8 \cdot 10^5$  вклад свободной конвекции значителен. Такое течение называют вязкостно-гравитационным. При вязкостно-гравитационном режиме теплота передается теплопроводностью и конвекцией. В этом случае

$$Nu_{df} = 0,15 \cdot Re_{df}^{0,33} \cdot Pr_f^{0,43} \cdot Gr_{df}^{0,1} \cdot \left( \frac{Pr_f}{Pr_c} \right)^{0,25}.$$

Для воздуха эта формула упрощается

$$Nu_{df} = 0,15 \cdot Re_{df}^{0,33} \cdot Gr_{df}^{0,1}.$$

Приведенные формулы справедливы для любой жидкости. При определении коэффициента теплоотдачи для труб, имеющих длину  $l/d < 50$ , полученное значение следует умножить на поправочный коэффициент.

При турбулентном режиме движения жидкости ( $Pr_f = 0,6 \div 2500$ ,  $l/d > 50$ ) формула имеет вид:

$$Nu_{df} = 0,021 \cdot Re_{df}^{0,8} Pr_f^{0,43} \left( \frac{Pr_f}{Pr_c} \right)^{0,25},$$

При турбулентном режиме движения воздуха ( $Pr_f \sim 0,7$ )

$$Nu_{df} = 0,018 \cdot Re_{df}^{0,8}.$$

При переходном режиме в трубах ( $2320 < Re < 10^4$ ) теплоотдача зависит от очень многих величин, которые трудно определять, и поэтому не может быть описана одним уравнением подобия.

## НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЕ

### 43. Математическая формулировка задачи и приведение её к безразмерному виду

Рассмотрим перенос тепла за счет теплопроводности при отсутствии внутренних источников тепла, когда температура системы изменяется не только от точки к точке, но и с течением времени. Такие процессы теплопроводности называют *нестационарными*. Они имеют место, например, при нагревании или охлаждении тел, помещенных в среду с заданным тепловым состоянием.

Основной задачей расчета теплопроводности при нестационарном режиме является определение зависимости температурного поля от времени, а также количества полученной (отданной) телом теплоты по истечении определенного времени.

Для решения таких задач используются приемы, которые требуют специальной математической подготовки. Поэтому рассмотрим здесь метод непосредственного интегрирования путем разделения переменных (метод Фурье) на примере одномерной нестационарной теплопроводности в бесконечной пластине и остановимся на некоторых важных частных случаях решения.

Пусть однородная и изотропная бесконечная пластина толщиной  $2\delta$  с начальной температурой  $T_0$  помещается в среду с постоянной температурой  $T_f$ , что приводит к поверхностному теплообмену по закону Ньютона–Рихмана с коэффициентом теплоотдачи  $\alpha$ . Предполагается, что теплофизические свойства материала пластины (коэффициент теплопроводности  $\lambda$ , плотность  $\rho$ , удельную теплоемкость  $c$ ) известны и не зависят от температуры.

Очевидно, что в любой момент времени  $\tau > 0$  температура  $T(x, \tau)$  в поперечном сечении пластины и температура  $T_c(\tau)$  на ее поверхности будут менять-

ся, пока при  $\tau \rightarrow \infty$  не станут равными  $T_f$ . Поэтому температуру в рассматриваемой задаче удобно отсчитывать от значения температуры окружающей среды:

$$\vartheta(x, \tau) = T(x, \tau) - T_f; \quad \vartheta_0 = T_0 - T_f.$$

Такую температуру называют *избыточной температурой*.

Благодаря заранее принимаемой симметрии начального распределения и граничных условий относительно средней плоскости пластины, распределения температуры в различные моменты времени останутся симметричными. Наличие симметрии позволяет рассмотреть только половину пластины, например, правую, заменив при этом отброшенную левую половину граничным условием второго рода с нулевым тепловым потоком.

С введением избыточной температуры симметричная краевая задача Фурье примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} &= a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0; \quad -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \Big|_{x=\delta} = \alpha \cdot \vartheta_c; \\ \vartheta \Big|_{\tau=0} &= \vartheta_0, \end{aligned}$$

где  $\vartheta_c = T(\delta, \tau) - T_f$  – избыточная температура на поверхности пластины.

Чтобы получить обобщенную постановку задачи о нестационарной теплопроводности перейдем к математическому описанию в безразмерной форме. Для этого введем безразмерную температуру и безразмерную текущую координату, используя в качестве характерных масштабов начальную избыточную температуру  $\vartheta_0$  и половину толщины пластины  $\delta$ :

$$\Theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \frac{T(x, \tau) - T_f}{T_0 - T_f}; \quad X = \frac{x}{\delta}.$$

Для независимой переменной – *времени* – нет непосредственно заданного характерного масштаба. Однако такой масштаб явно диктуется дифференциальным уравнением теплопроводности при его приведении к безразмерному виду:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{a}{\delta^2} \cdot \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2}.$$

Видно, что время  $\tau$  и отношение  $\delta^2/a$  могут быть объединены в комплекс с образованием *безразмерного времени*:  $Fo = \frac{a \cdot \tau}{\delta^2}$ , называемого *числом Фурье*.

Размерные величины  $\alpha$  и  $\lambda$ , входящие в граничное условие 3-го рода

$$-\frac{\lambda}{\delta} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial X} \Big|_{X=1} = \alpha \cdot \Theta_c,$$

также объединяются в безразмерный комплекс:  $Bi = \frac{\alpha \cdot \delta}{\lambda}$  – число Био.

Таким образом, математическое описание сформулированной задачи приводится к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial(Fo)} &= \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2}; \\ \frac{\partial \Theta}{\partial X} \Big|_{X=0} &= 0; \quad \frac{\partial \Theta}{\partial X} \Big|_{X=1} = -Bi \cdot \Theta_c; \\ \Theta \Big|_{Fo=0} &= 1. \end{aligned}$$

Анализ полученных уравнений методами теории подобия показывает, что подобие процессов теплообмена на границах тела определяется числом Био, а безразмерная температура в сходственных точках зависит от числа Фурье. Следовательно, искомая функция  $\Theta = \Theta(Fo, X, Bi)$  зависит всего от двух безразмерных переменных и одного безразмерного параметра  $Bi$ . Данное обстоятельство значительно упрощает анализ решения задачи, поскольку описывает нестационарное температурное поле в любой пластине, независимо от численных значений  $\alpha, \delta, a = \lambda/(c\rho)$ .

#### 44. Аналитическое решение задачи методом разделения переменных

Решение линейного однородного дифференциального уравнения теплопроводности будем искать в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной независимой переменной:

$$\Theta(Fo, X) = \varphi(Fo) \cdot \psi(X).$$

После подстановки и разделения переменных оно расщепляется на два обыкновенных дифференциальных уравнения: одно – относительно безразмерного времени  $Fo$ , другое – относительно безразмерной координаты  $X$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial(Fo)} + \mu^2 \cdot \varphi = 0; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \mu^2 \cdot \psi = 0,$$

где  $\mu^2$  – константа разделения.

Оба уравнения классифицируются как линейные однородные с постоянными коэффициентами, которые легко интегрируются:

$$\varphi = C_1 \cdot \exp(-\mu^2 Fo),$$

$$\psi = C_2 \cdot \cos(\mu X) + C_3 \sin(\mu X).$$

Произвольные константы интегрирования  $C_1, C_2, C_3$  и  $\mu$  находятся при подстановке решений в соответствующие выражения для краевых условий.

Опуская промежуточные преобразования, получим, что окончательное решение задачи об охлаждении пластины представляет собой сумму бесконечного ряда

$$\Theta(Fo, X) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\mu_n) \cos(\mu_n X) \exp(-\mu_n^2 Fo),$$

где  $A_n(\mu_n) = \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n}$  – амплитудная функция,  $\mu_n$  – корни трансцендентного уравнения  $\operatorname{ctg}(\mu) = \mu/Bi$ . Значения корней  $\mu_n$  определяются по точкам пересечения кривых  $y_1 = \operatorname{ctg} \mu$  и  $y_2 = \mu/Bi$  (рисунок 17). Из рисунка видно, что они представляют собой ряд возрастающих чисел.

Поскольку все члены ряда  $A_n(\mu_n)$  являются только функцией корней характеристического уравнения, то нетрудно заметить, что чем больше  $\mu_n$ , тем меньше роль последующего члена ряда по сравнению с предыдущим. Обычно принимают  $n \leq 6$ .

Многочисленные исследования показали, что если  $Fo \geq 0,3$ , то ряд становится настолько быстросходящимся, что распределение температуры (рис. 18a) достаточно точно описывается только первым членом ряда:

$$\Theta(Fo, X) = A(\mu_1) \cos(\mu_1 X) \exp(-\mu_1^2 Fo).$$

Если рассматривать температуру для определенных значений безразмерной координаты, например, для центра и поверхности пластины ( $X = 0$  и  $X = 1$ ), то второй множитель уравнения  $\cos(\mu_1 X)$  также будет зависеть только от числа  $Bi$ . Поэтому решения в этих точках могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} \Theta(Fo, 0) &= N(Bi) \exp(-\mu_1^2 Fo), \\ \Theta(Fo, 1) &= P(Bi) \exp(-\mu_1^2 Fo). \end{aligned}$$

Для многих задач простой геометрической формы функции  $N(Bi)$  и  $P(Bi)$  рассчитаны и представлены в справочной литературе в виде таблиц, а соответствующие безразмерные избыточные температуры построены в виде графиков (номограмм) в зависимости от безразмерного времени  $Fo$ .

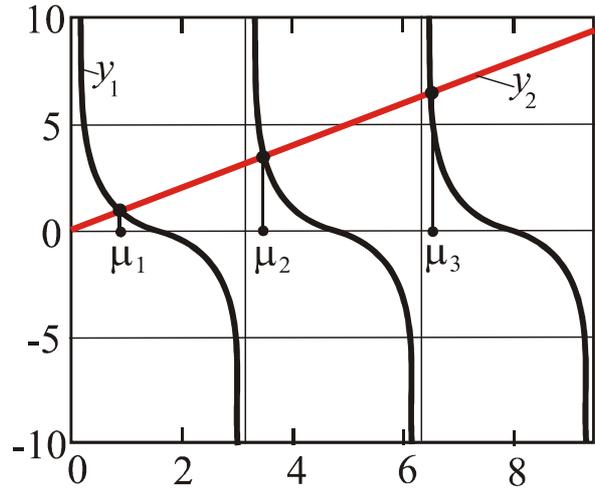


Рис. 17. Графическое решение трансцендентного уравнения

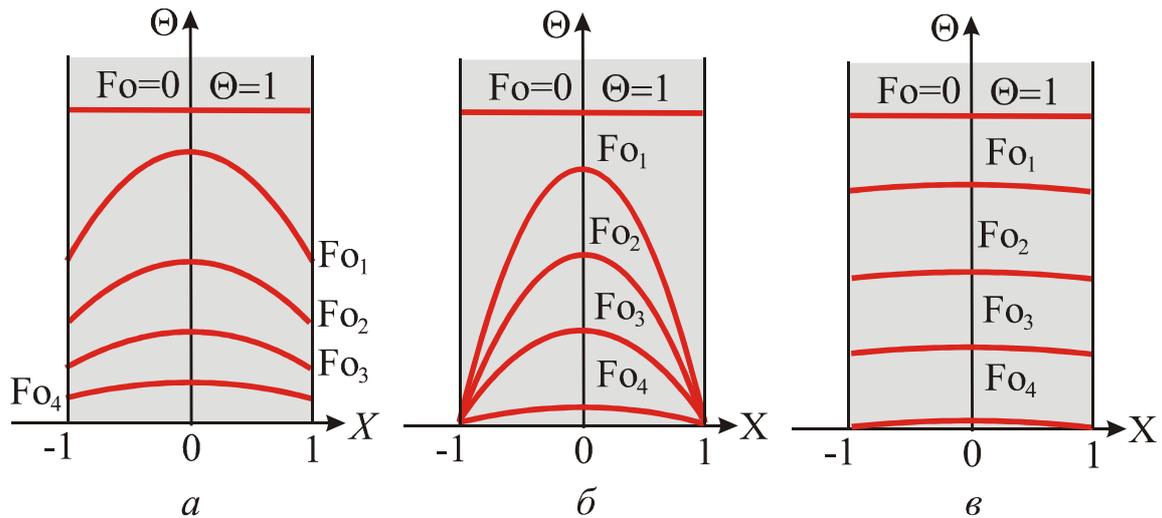


Рис. 18. Нестационарное распределение температуры в плоской стенке при различных значениях числа Би

Если заданы теплофизические свойства тела, его размеры и коэффициент теплоотдачи на поверхности, то используя номограммы, можно определять значения температур (безразмерных и размерных) в любой момент времени. Для этого, вначале рассчитывают числа  $Fo$  и  $Bi$ , а затем по таблицам находят значения корней  $\mu_n(Bi)$  и функций:  $N(Bi)$  и  $P(Bi)$ .

Количество теплоты  $Q$ , которое отдает или воспринимает тело за время охлаждения или нагрева определяется выражением

$$Q = Q_p [1 - \langle \Theta_\tau \rangle],$$

где  $Q_p = c\rho V(T_0 - T_f)$  – количество теплоты, отданное (полученное) телом при наступлении теплового равновесия;  $\langle \Theta_\tau \rangle = \frac{\langle T(\tau) \rangle - T_f}{T_0 - T_f}$  – средняя безразмерная избыточная температура в рассматриваемый момент времени;  $\langle T(\tau) \rangle$  – средне-массовая температура в момент  $\tau$ .

Для пластины средняя безразмерная избыточная температура вычисляется как:

$$\langle \Theta_\tau \rangle = \frac{1}{X} \int_0^1 \Theta dX .$$

#### 45. Зависимость решения от числа Био

Число Био является заданным параметром и характеризует отношение внутреннего термического сопротивления теплопроводности к внешнему термическому сопротивлению теплоотдачи.

Рассмотрим два крайних случая.

1. Критерий Био стремится к бесконечности (практически  $Bi > 100$ ).

По мере увеличения  $Bi$  линия на рис отклоняется от оси абсцисс на все меньший угол и при  $Bi \rightarrow \infty$  сольется с осью  $\mu$ , что даст значения корней

$$\mu_n = (2n - 1) \frac{\pi}{2}.$$

Тогда общее решение принимает вид:

$$\Theta(Fo, X) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} \cos\left((2n-1) \frac{\pi}{2} X\right) \exp(-\mu_n^2 Fo).$$

Если  $X = 1$ , то  $\Theta(Fo, 1) = \frac{T_c - T_f}{T_0 - T_f} = 0$ , так как множитель  $\cos\left((2n-1) \frac{\pi}{2}\right) = 0$ . В

этом случае температура поверхности пластины сразу становится равной температуре окружающей среды (рис. 18б).

При  $Fo \geq 0,3$  изменение температуры в центре пластины  $X = 0$  происходит по закону:

$$\Theta(Fo, 0) = \frac{4}{\pi} \exp\left[-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 Fo\right].$$

Из определения числа Био получаем, что этот режим реализуется при большой интенсивности теплоотдачи от поверхности: граничные условия 3-го рода вырождаются в условия 1-го рода.

2. Критерий Био стремится к нулю (практически  $Bi < 0,1$ ).

В этом случае все коэффициенты ряда  $A_n(\mu_n) = \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n}$ , начиная

со второго, обращаются в нуль, поскольку  $\mu_n = (n-1)\pi$ . При вычислении первого коэффициента возникает неопределенность, которая при раскрытии дает значение  $\lim_{\mu_1 \rightarrow 0} A_1(\mu_1) = 1$ .

Тогда распределение температуры по толщине пластины имеет вид:

$$\Theta(Fo, X) = \cos(\mu_1 X) \exp(-\mu_1^2 Fo) = \cos(\sqrt{Bi} \cdot X) \exp(-Bi \cdot Fo).$$

При малых  $Bi$  температура на поверхности пластины мало чем отличается от температуры на ее оси (рис. 18в). Это указывает на то, что температура по толщине пластины распределяется равномерно и кривая температур остается почти параллельной оси  $x$  для любого момента времени. Из определения числа Био следует, что этот режим реализуется при малых размерах толщины пластины, при больших значениях коэффициента теплопроводности, при малых значениях коэффициента теплоотдачи.

## 46. Регулярный тепловой режим

Анализ решений, полученных для тел различной геометрической формы, показывает, что все они имеют одинаковую структуру, т. е. представляют собой сумму бесконечного ряда, члены которого расположены по быстро убывающим экспоненциальным функциям.

При малых значениях времени распределение температуры внутри тела и скорость изменения температуры в отдельных точках тела зависят от особенностей начального распределения температур. Однако, начиная с некоторого момента времени ( $Fo \geq 0,3$ ), начальные условия начинают играть второстепенную роль, и процесс полностью определяется только условиями охлаждения на границе тела и среды, физическими свойствами тела и его геометрической формой и размерами. В этом случае температурное поле описывается первым членом ряда, т. е.

$$\vartheta = A(Bi) \cdot \exp(-\mu^2 Fo) = A(Bi) \cdot \exp(-m \cdot \tau),$$

где  $m = \mu^2 \frac{a}{\delta^2}$  – постоянное вещественное число.

Таким образом, в процессе охлаждения (нагрева) можно выделить две стадии процесса – *начальную* и *регулярную*; в последней избыточная температура во всех точках тела меняется во времени экспоненциально.

Если представить кривую охлаждения (нагрева) в полулогарифмических координатах

$$\ln \vartheta = -m \cdot \tau + C,$$

то, начиная с некоторого момента, она превратится в прямую линию, наклон которой можно определить как:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\ln \vartheta_1 - \ln \vartheta_2}{\tau_2 - \tau_1} = m.$$

Величина  $m > 0$ , характеризующая интенсивность отвода или подвода теплоты и равная тангенсу угла наклона, называется *темпом охлаждения* или *темпом нагрева*.

Зависимость темпа охлаждения от теплофизических свойств тела, его геометрической формы и размеров, а также условий теплообмена на поверхности тела можно найти из анализа уравнения теплового баланса.

Изменение внутренней энергии (энтальпии) тела

$$dU = -c\rho V \cdot \frac{\partial \langle \vartheta_V \rangle}{\partial \tau} \cdot d\tau,$$

где  $\langle \vartheta_V \rangle$  – средняя по объему избыточная температура.

С другой стороны, за тот же промежуток времени все тепло должно быть отведено с поверхности тела в окружающую среду за счет теплоотдачи:

$$dQ = \alpha \cdot \langle \vartheta_S \rangle \cdot S \cdot d\tau,$$

где  $\langle \vartheta_S \rangle$  – средняя по поверхности избыточная температура.

Приравнявая их, получим

$$-\frac{\partial \langle \vartheta_V \rangle}{\partial \tau} = \frac{\alpha S}{c\rho V} \langle \vartheta_S \rangle.$$

Разделим обе части уравнения на среднюю по объему избыточную температуру. Получим

$$-\frac{1}{\langle \vartheta_V \rangle} \frac{\partial \langle \vartheta_V \rangle}{\partial \tau} = \frac{\alpha S}{c\rho V} \frac{\langle \vartheta_S \rangle}{\langle \vartheta_V \rangle} = \psi \frac{\alpha S}{c\rho V}.$$

Выражение, стоящее слева, представляет собой темп охлаждения

$$m = -\frac{1}{\langle \vartheta_V \rangle} \frac{\partial \langle \vartheta_V \rangle}{\partial \tau}.$$

Следовательно

$$m = \psi \frac{\alpha S}{c\rho V}.$$

#### 47. Теоремы Кондратьева

Исходя из полученного соотношения, Г. М. Кондратьев сформулировал две теоремы.

**Первая теорема:** *темп охлаждения однородного и изотропного тела при конечном значении коэффициента теплоотдачи  $\alpha$  прямо пропорционален коэффициенту теплоотдачи на поверхности тела и обратно пропорционален его полной теплоемкости.*

Множитель  $\psi = \frac{\langle \vartheta_S \rangle}{\langle \vartheta_V \rangle}$  называется *коэффициентом неравномерного распределения температуры*. При  $Bi \rightarrow 0$  температура в теле распределяется почти равномерно  $\langle \vartheta_S \rangle \approx \langle \vartheta_V \rangle$ , поэтому  $\psi = 1$ . При  $Bi \rightarrow \infty$ , наоборот,  $\langle \vartheta_S \rangle \rightarrow 0$ , так как  $T_c \approx T_f$ , поэтому  $\psi = 0$ .

**Вторая теорема:** при коэффициенте теплоотдачи, стремящемся к бесконечности, темп охлаждения становится прямо пропорциональным коэффициенту температуропроводности тела:

$$m_\infty = K \cdot a,$$

где  $K$  – коэффициент, зависящий только от формы и размеров тела.

Докажем это на примере безграничной пластины толщиной  $2\delta$ . При коэффициенте теплоотдачи, стремящемся к бесконечности,  $Bi \rightarrow \infty$  (практически  $Bi > 100$ ). Если при этом еще и  $Fo \geq 0,3$ , то изменение температуры в центре пластины происходит по закону:

$$\Theta(\text{Fo}, X) = A \exp \left[ - \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 \text{Fo} \right] = A \exp(-m_\infty \tau).$$

Откуда

$$m_\infty = \left( \frac{\pi}{2\delta} \right)^2 \cdot a.$$

Выше речь шла о нагреве и охлаждении тел в среде с постоянной температурой  $T_f$ . Такой процесс называют *регулярным режимом первого рода*. Если температура среды меняется во времени линейно ( $T_f = T_{f0} + \omega\tau$ ) или гармонически ( $T_f = T_{f0} + T_m \cos \omega\tau$ ), то говорят о *регулярном режиме* соответственно *второго* и *третьего* рода. Эти режимы используются для определения теплофизических свойств материала, образующего однородное тело.

А. В. Лыков показал, что *все разновидности регулярного режима характеризует одна особенность: скорость нагрева тела пропорциональна разности температуры среды и средней по объему температуры тела:*

$$-\frac{\partial \langle T_V \rangle}{\partial \tau} = m(T_f - \langle T_V \rangle).$$

Метод регулярного теплового режима использует простой математический аппарат и удобен как в эксперименте, так и при расчете процессов нестационарной теплопроводности.

## ОСНОВЫ ТЕПЛООБМЕНА ИЗЛУЧЕНИЕМ

### 48. Основные понятия и определения

*Лучистый теплообмен* – перенос энергии от одного тела к другому, обусловленный процессами испускания, распространения, рассеяния и поглощения электромагнитного излучения.

Из опыта известно, тело, будучи нагретым, излучает (светится). Свечение тел, обусловленное нагреванием, называется *тепловым (температурным) излучением*. Тепловое излучение, являясь самым распространенным в природе, возникает за счет энергии теплового движения атомов и молекул вещества, т. е. за счет его внутренней энергии. Так как тепловое движение неустранимо (оно прекращается только при температуре, равной абсолютному нулю), то и тепловое излучение вещества имеет место практически всегда.

Большинство твердых и жидких тел имеет сплошной спектр излучения. К числу твердых тел, имеющих сплошной спектр излучения, относятся диэлектрики, полупроводники и окислы металлов. Некоторые тела излучают энергию только в определенных интервалах длин волн, т. е. испускают энергию преры-

вистым спектром. К ним относятся чистые металлы и газы, которые характеризуются селективным или выборочным излучением.

Излучение различных тел различно. Оно зависит от природы тела, его температуры, состояния поверхности, а для газов – еще и от толщины слоя и давления. Большинство встречающихся в природе и технике тел имеют значительную поглощательную и излучательную способность, поэтому в процессах лучистого теплообмена участвуют лишь тонкие поверхностные слои. Для проводников тепла толщина этих слоев имеет порядок 1 мкм, а для непроводников тепла – 1 мм. Поэтому применительно к твердым телам, а также к жидкостям тепловое излучение в ряде случаев приближенно можно рассматривать как поверхностное явление. Газообразные тела имеют значительно меньшее излучение, чем жидкие и твердые тела. Поэтому в излучении газов участвуют все его частицы, и процесс теплового излучения носит объемный характер.

Излучение всех тел зависит от температуры. С увеличением температуры излучение увеличивается, так как увеличивается внутренняя энергия тела. Изменение температуры тела вызывает не только изменение абсолютной величины интенсивности излучения, но сопровождается еще изменением спектрального состава или «цвета» излучения. С повышением температуры повышается интенсивность коротковолнового излучения и уменьшается интенсивность длинноволновой части спектра. Зависимость излучения от температуры значительно больше, чем процессов теплопроводности и конвекции. Поэтому при низких температурах преобладающую роль может играть теплообмен за счет конвекции и теплопроводности, а при высоких – основным видом переноса тепла может быть тепловое излучение.

Тепловое излучение может быть равновесным и неравновесным. *Равновесное излучение* возникает, например, в случае, когда тело находится внутри оболочки с непрозрачными стенками, температура которых равна температуре тела. Неравновесное излучение происходит, если источник излучения нагревают. Например, в лампах накаливания в энергию электромагнитных волн преобразуется часть тепла, выделяющаяся при протекании электрического тока.

#### 49. Отражение и поглощение энергии излучения

Рассмотрим взаимодействие потока электромагнитного излучения с каким-либо полупрозрачным телом. *Потоком излучения*  $Q$  назовем количество энергии, переносимое излучением в единицу времени через произвольно выбранную поверхность. Опыт показывает, что часть падающей на тело энергии излучения  $dQ^{\text{пад}}$  отражается, другая часть проходит через тело, а часть – поглощается телом и идет на его нагревание. Обозначим их соответственно через  $dQ^{\text{отр}}$ ,  $dQ^{\text{прх}}$  и  $dQ^{\text{погл}}$ .

В соответствии с законом сохранения энергии

$$dQ^{\text{пад}} = dQ^{\text{отр}} + dQ^{\text{прх}} + dQ^{\text{погл}},$$

или в безразмерной форме

$$1 = R + D + A,$$

где  $R = \frac{dQ^{\text{отр}}}{dQ_{\text{пад}}}$  – отражательная способность;  $D = \frac{dQ^{\text{прх}}}{dQ_{\text{пад}}}$  – пропускательная

способность;  $A = \frac{dQ^{\text{погл}}}{dQ_{\text{пад}}}$  – поглощательная способность тела. Эти величины

показывают доли падающей энергии, которые отражаются, проходят или поглощаются поверхностью тела за 1 секунду.

Значения  $R$ ,  $D$  и  $A$  зависят от частоты излучения, температуры тела, химического состава и состояния его поверхности (шероховатая или полированная).

Отражательная способность  $R$  зависит исключительно от состояния поверхности.

Если поверхность шероховатая, то отражение диффузное (равномерно рассеянное по всем направлениям). Полированная поверхность отражает энергию излучения согласно законам геометрической оптике, т. е. зеркально.

Тело, которое полностью отражает все падающие на него лучи, называется *абсолютно белым телом*.

*Тело, способное при любой температуре поглощать все падающее на него излучение любой частоты, называется абсолютно черным. Следовательно, для абсолютно черного тела  $A^{\text{абт}} \equiv 1$ .* Абсолютно черное тело – идеальная физическая модель. Абсолютно черных тел не существует. Сажа, например, имеет поглощательную способность, близкую к единице, лишь в очень ограниченном интервале частот; в далекой инфракрасной области ее поглощательная способность заметно меньше единицы. Реализовать абсолютно черное тело можно в виде полости с небольшим отверстием. Лучи, попадающие через отверстие внутрь полости, в результате многократных отражений на внутренних стенках полости практически полностью поглощаются и не выходят наружу.

Если поглощательная способность тела меньше единицы, но одинакова для всех частот, то такое тело называется *серым*. Отношение поглощательной способности серого тела к поглощательной способности абсолютно черного тела называется *степенью черноты* и обозначается как  $\epsilon$ .

Для реальных тел степень черноты изменяется в пределах  $0 < \epsilon < 1$  в зависимости от температуры, физической природы тела и от обработки его поверхности. Степени черноты различных материалов являются теплофизической характеристикой вещества. Они определяются экспериментально и приводятся в таблицах свойств веществ.

Если  $D=1$ , то тело или среду называют абсолютно прозрачным. К прозрачным средам близки инертные и двухатомные газы при умеренных температурах. Для твердых и жидких тел принимается  $D = 0$ , так как они поглощают лучистую энергию в тонком поверхностном слое.

## 50. Характеристики теплового излучения

При взаимодействии непрозрачного тела с излучением баланс энергии не исчерпывается рассмотрением только  $dQ^{\text{пад}}$ ,  $dQ^{\text{отр}}$  и  $dQ^{\text{погл}}$ . Тело, будучи нагретым, само излучает энергию  $dQ^{\text{изл}}$ . Опыт показывает, что свойства и величина этого излучения определяется природой данного тела, радиационными свойствами поверхности и его температурой.

Для количественного анализа собственного излучения тел вводятся следующие характеристики.

*Плотность потока* излучения (синонимы: интегральная интенсивность, излучательная способность тела) – лучистый поток, испускаемый с единицы поверхности тела по всем направлениям контрольного полусферического пространства

$$E = \frac{dQ^{\text{изл}}}{dS}.$$

Здесь  $dS$  – площадь бесконечно малого элемента поверхность тела. Это *интегральное* излучение, просуммированное по всем длинам волн и направлениям излучения. Лучистый поток со всей поверхности можно определить как

$$Q^{\text{изл}} = \int_S E dS.$$

*Спектральная плотность потока излучения (спектральная интенсивность)* – отношение плотности лучистого потока, испускаемого в бесконечно малом интервале длин волн от  $\lambda$  до  $\lambda + d\lambda$ , к величине этого интервала длин волн

$$E_\lambda = \frac{dE}{d\lambda}.$$

В этом случае имеет место излучение энергии одного цвета с единицы поверхности по всем направлениям контрольного полусферического пространства.

В общем случае плотность потока излучения изменяется в зависимости от направления, которое можно охарактеризовать углом  $\varphi$  между этим направлением и нормалью к поверхности излучения.

*Угловая интенсивность* – количество энергии, испускаемое в определенном направлении единицей площади, расположенной перпендикулярно направлению излучения, отнесенное к единице элементарного телесного угла  $d\Omega$ :

$$\text{интегральная} - J_\varphi = \frac{d^2 Q_\varphi^{\text{изл}}}{d\Omega dS} = \frac{dE_\varphi}{d\Omega},$$

$$\text{спектральная} - J_{\phi\lambda} = \frac{d^2 Q_{\phi\lambda}^{\text{изл}}}{d\Omega dS} = \frac{dE_{\phi\lambda}}{d\Omega}.$$

По определению *телесный угол* равен отношению площади элементарной площадки  $dF$ , вырезанный данным углом на поверхности сферы радиуса  $r$ , к квадрату радиуса:  $d\Omega = dF/r^2$ .

*Интенсивностью (яркостью) излучения* называется количество лучистой энергии, испускаемое в направлении угла  $\phi$  в единицу времени элементарной площадкой в пределах единичного элементарного телесного угла, отнесенное к проекции этой площадки на плоскость, перпендикулярную направлению излучения:

$$\begin{aligned} \text{интегральная} - J &= \frac{J_{\phi}}{\cos\phi}, \\ \text{спектральная} - J_{\lambda} &= \frac{J_{\phi\lambda}}{\cos\phi}, \end{aligned}$$

где  $\phi$  – угол между нормалью к площадке и направлением излучения.

Для черного и серого диффузного излучения яркость не зависит от направления излучения и в  $\pi$  раз меньше, чем плотность его полусферического излучения:

$$J = \frac{E}{\pi}.$$

Тепловое излучение – практически единственный вид излучения, который может быть *равновесным*. Предположим, что нагретое (излучающее) тело помещено в полость, ограниченную идеально отражающей оболочкой. Тогда излучение, испускаемое телом, не рассеивается по всему пространству, а, отражаясь стенками, сохраняется в пределах полости. В таких условиях никакой потери энергии система – излучающее тело и излучение – не испытывает. Энергия системы частично содержится в виде энергии излучения (электромагнитных волн), частично в виде внутренней энергии излучающего тела. С течением времени, в результате непрерывного обмена энергией между телом и излучением, наступит динамическое равновесие, т. е. тело в единицу времени будет поглощать столько же энергии, сколько и излучать.

В равновесном состоянии во всех точках полости устанавливается однородное, изотропное и не поляризованное излучение, энергия которого определенным образом распределена по спектру частот. Это обстоятельство позволяют ввести в рассмотрение *объемную спектральную плотность излучения*  $w_{\nu,T}$  как энергию, содержащуюся в единице объема полости в единичном спектральном интервале. При этом со всех направлений на единицу площади поверхности тел в единичном диапазоне частот будет падать поток электромагнитной энергии, равный

$$E_{0v} = \frac{c \cdot w_{v,T}}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{c}{4} w_{v,T},$$

где  $c$  – скорость света.

Аналогичное по свойствам излучение возникает в замкнутой полости, стенки которой имеют постоянную температуру  $T$ . Благодаря излучению стенок, полость также заполнится электромагнитным излучением со всевозможными направлениями распространения, поляризациями и частотами.

## 51. Законы теплового излучения

В силу общей природы электромагнитных волн основные законы, которым подчиняется излучение, являются для них общими. Эти законы получены применительно к идеальному телу, которым является абсолютно черное тело, и равновесному излучению, при котором все тела, входящие в данную излучающую систему, имеют одинаковую температуру.

### 1. Закон Планка.

Закон Планка устанавливает зависимость спектральной плотности потока излучения абсолютно черного тела  $E_{0\lambda}$  от длины волны  $\lambda$  и температуры  $T$ .

Используя статистические методы и гипотезу о квантовом характере теплового излучения, Планк теоретическим путем получил, что

$$E_{0\lambda} = \frac{c_1}{\lambda^5} \left[ \exp\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right) - 1 \right]^{-1},$$

где  $c_1 = 0,374 \cdot 10^{-15} \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right]$  – первая постоянная

Планка;  $c_2 = 1,4388 \cdot 10^{-2} [\text{м} \cdot \text{К}]$  – вторая постоянная Планка;  $\lambda$  – длина волны, м;  $T$  – абсолютная температура, К.

Графический вид зависимости от длины волны при трех значениях температуры представлены на рисунке 19. Видно, что распределение энергии в сплошном спектре излучения неравномерное. Кривые имеют явный максимум, который с ростом температуры смещается в область коротких длин волн.

Качественно вид зависимостей можно объяснить следующим образом. При низких температурах ( $T < 500 - 600$  К) излучение обусловлено только колебательно-вращательным движением молекул, а также колебаниями атомов или ионов, составляющих твердое тело. Энергия, выделяемая при этом в единичных актах испускания, мала, и поэтому практически весь спектр излучения тел при низких температурах находится в инфракрасной невидимой области.

С ростом температуры тела его энергия становится достаточной, чтобы перевести атомы или молекулы в возбужденные электронные состояния. Энер-

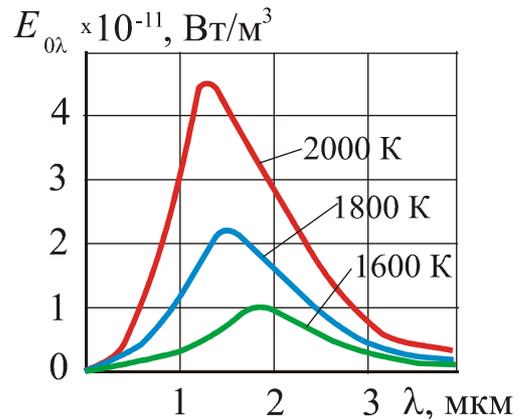


Рис. 19. Распределение энергии излучения абсолютно черного тела в зависимости от длины волны

гия излучения из этих состояний значительно больше, чем колебательно-вращательная, поэтому с увеличением  $T$  весь спектр теплового излучения смещается в сторону более коротких длин волн, т. е. в видимую область.

Если  $\lambda T \gg c_2$ , то закон Планка переходит в закон Релея-Джинса:

$$E_{0\lambda} = \frac{c_1 T}{c_2 \lambda^4}.$$

Если  $\lambda T \ll c_2$ , то закон Планка трансформируется в формулу Вина:

$$E_{0\lambda} = \frac{c_1}{\lambda^5} \exp\left(-\frac{c_2}{\lambda T}\right).$$

## 2. Закон смещения Вина.

Закон смещения вина является частным случаем закона Планка. Он показывает как длина волны  $\lambda_{\max}$ , соответствующая максимуму функции  $E_{0\lambda}$ , зависит от температуры излучающего тела.

Для абсолютно черного тела имеет место выражение вида

$$\lambda_{\max} = b_1 / T,$$

где  $b_1 = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$  – постоянная Вина.

При этом само максимальное значение спектральной интенсивности излучения абсолютно черного тела становится пропорциональным пятой степени абсолютной температуры:

$$E_{0\lambda}^{\max} = b_2 T^5,$$

где  $b_2 = 1,29 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3 \text{Т}^4}$ .

## 3. Закон Стефана–Больцмана.

Закон Стефана–Больцмана устанавливает связь плотности интегрального полусферического излучения абсолютно черного тела с его абсолютной температурой

$$E_0 = \sigma \cdot T^4,$$

где  $\sigma = 5,67 \cdot 10^8 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^4}$  – постоянная Стефана–Больцмана.

Для удобства практических расчетов эта зависимость обычно представляется в виде

$$E_0 = c_0 \cdot \left(\frac{T}{100}\right)^4,$$

где  $c_0 = 5,67 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}^4}$  – коэффициент излучения абсолютно черного тела.

Для серых тел, излучательная способность которых меньше, чем для черных тел, а собственное излучение также пропорционально четвертой степени температуры, закон принимает вид

$$E = \varepsilon \cdot E_0 ,$$

где  $\varepsilon$  – интегральная или средняя степень черноты серого тела.

Таким образом, закон Стефана – Больцмана является теоретической основой для вычисления потока энергии, излучаемой всяким нагретым телом, если известны его температура и радиационные характеристики.

#### 4. Закон Кирхгофа.

Закон Кирхгофа устанавливает связь между способностями излучать и поглощать энергию излучения.

*В условиях термодинамического равновесия отношение спектральной интенсивности испускаемого потока излучения к спектральной поглощательной способности тела является одинаковым для всех тел и равным спектральной интенсивности потока излучения абсолютно черного тела при той же температуре:*

$$\frac{E_\lambda}{A_\lambda} = E_{0\lambda}(T).$$

Для излучения в полном спектре справедливо соотношение:

$$\frac{E}{A} = E_0(T),$$

где  $E_0$  – плотность интегрального полусферического излучения абсолютно черного тела.

Поверхностную плотность потока излучения для серых тел системы можно выразить через степень черноты и поверхностную плотность потока излучения абсолютно черного тела:

$$E = \varepsilon \cdot E_0(T) .$$

Тогда

$$\frac{\varepsilon}{A} = 1.$$

Из закона Кирхгофа вытекает ряд следствий, имеющих важное практическое значение.

*Первое следствие:* из всех тел в природе наибольшей излучательной способностью обладает абсолютно черное тело.

*Второе следствие:* при равновесном излучении коэффициент поглощения численно равен степени черноты:  $A = \varepsilon$ .

*Третье следствие:* если тело в каком-то интервале длин волн не поглощает энергию излучения, то оно в этом интервале длин волн и не излучает ее.

### 5. Закон Ламберта.

Закон Ламберта определяет угловое распределение равновесного излучения. *Интенсивность излучения в общем случае зависит от направления и является величиной, пропорциональной косинусу угла между направлением излучения и нормалью к поверхности тела:*

$$J_{\varphi} = \frac{E}{\pi} \cdot \cos \varphi.$$

Закон Ламберта строго справедлив лишь для поверхности абсолютно черного тела в состоянии равновесия.

## 52. Эффективное и результирующее излучение

Обычно непрозрачное тело участвует в теплообмене с другими телами, энергия излучения которых, попадая на данное тело, частично им поглощается, а частично отражается. Сумма собственного излучения и отраженного излучения, испускаемого поверхностью данного тела, называется *эффективным излучением*. Лучистый поток при этом выражается зависимостью

$$E_{\text{эф}} = E + R \cdot \frac{dQ^{\text{пад}}}{dS} = E + R \cdot E^{\text{пад}}.$$

Эффективное излучение зависит не только от физических свойств и температуры данного тела, но и от физических свойств и температуры окружающих его тел, от формы, размеров и относительного расположения тел в пространстве, поэтому физические свойства эффективного и собственного излучений различны. Различными оказываются и спектры их излучения.

Для черной поверхности эффективное излучение равно собственному (черные тела все поглощают и ничего не отражают).

*Результирующее излучение* представляет собой разность между лучистым потоком, испускаемым в окружающее его пространство и лучистым потоком, получаемым данным телом:

$$q_{\text{рез}} = E - A \frac{dQ^{\text{пад}}}{dS} = E - A \cdot E^{\text{пад}} = E - (1 - R) \cdot E^{\text{пад}} = E_{\text{эф}} - E^{\text{пад}}.$$

Тогда эффективное излучение может быть определено как

$$E_{\text{эф}} = \frac{1}{A} [E - (1 - A)q_{\text{рез}}].$$

Результирующий поток считается положительным, если он направлен от поверхности наружу.

Все предыдущие соотношения справедливы и для спектральных величин.

Из изложенного следует: все виды полусферического излучения, кроме собственного, являются линейными функциями падающего излучения. Собственное излучение объединяется и увязывается с другими видами излучения через эффективное излучение.

Эти простые балансовые соотношения мы будем часто использовать при расчете теплообмена излучением между телами.

### 53. Теплообмен излучением в системе тел с плоскопараллельными поверхностями

Рассмотрим излучающую систему, которая состоит из двух непрозрачных неограниченных тел с плоскопараллельными поверхностями. Температура, коэффициент поглощения и излучательная способность поверхностей этих тел, соответственно, равны  $T_1, A_1, E_1$  и  $T_2, A_2, E_2$ . Будем считать для определенности, что  $T_1 > T_2$ .

Примем также следующие допущения:

- 1) тела, входящие в излучающую систему, подчиняются закону Ламберта в отношении как собственного, так и отраженного излучений;
- 2) тела имеют изотермические поверхности, и вся лучистая энергия, поглощаемая ими, переходит в тепловую энергию;
- 3) перенос тепла за счет теплопроводности и конвекции отсутствует;
- 4) коэффициенты поглощения и степени черноты не зависят от температуры;
- 5) процесс лучистого теплообмена – стационарный.

Согласно зависимости  $q_{\text{рез}} = E_{\text{эф}} - E^{\text{пад}}$  результирующий лучистый поток от первого тела ко второму составит величину

$$q_{1,2} = E_{\text{эф}1} - E_{\text{эф}2}.$$

Здесь  $E_{\text{эф}1}, E_{\text{эф}2}$  – плотности потоков эффективного излучения с поверхностей 1-го и 2-го тела, которые равны суммарным потокам собственного и отраженного излучения для этих поверхностей (рис. 20), т. е.

$$\begin{aligned} E_{\text{эф}1} &= E_1 + (1 - A_1)E_{\text{эф}2}; \\ E_{\text{эф}2} &= E_2 + (1 - A_2)E_{\text{эф}1}. \end{aligned}$$

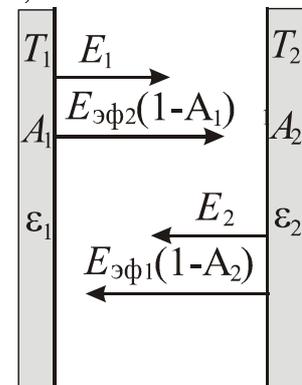


Рис. 20. Радиационные тепловые потоки между параллельными стенками

Решение данной системы линейных уравнений с двумя неизвестными имеет вид:

$$E_{\text{эф1}} = \frac{E_1 + E_2 - A_1 E_2}{A_1 + A_2 - A_1 A_2}; \quad E_{\text{эф2}} = \frac{E_1 + E_2 - A_2 E_1}{A_1 + A_2 - A_1 A_2}.$$

Подставляя эти значения в формулу для результирующего потока, получим

$$q_{1,2} = \frac{A_2 E_1 - A_1 E_2}{A_1 + A_2 - A_1 A_2} = \frac{E_1/A_1 - E_2/A_2}{1/A_1 + 1/A_2 - 1}.$$

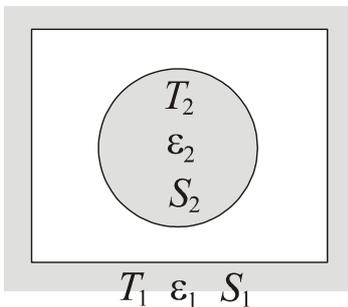
Если рассматриваемые тела – серые ( $\epsilon = A$ ), то, используя закон Стефана–Больцмана, данное соотношение можно представить через разность температур в виде:

$$q_{1,2} = \epsilon_{\text{пр}} \sigma (T_1^4 - T_2^4),$$

где  $\epsilon_{\text{пр}} = \frac{1}{1/\epsilon_1 + 1/\epsilon_2 - 1}$  – *приведенная степень черноты* рассматриваемой системы твердых тел.

Эта формула часто используется при анализе теплообмена излучением как первое приближение для системы тел, имеющих более сложную форму, чем рассмотренная нами.

В случае, когда одно тело окружено поверхностью другого тела (находится внутри полости) (рис.21)



$$\epsilon_{\text{пр}} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{S_2}{S_1} \left( \frac{1}{\epsilon_2} - 1 \right)},$$

Рис. 21. Система выпуклого тела с оболочкой

где  $S_1$  – площадь окружающей тело поверхности;  $S_2$  – площадь поверхности тела, окруженного некоторой поверхностью.

Если же излучающая система состоит из нескольких тел, произвольно расположенных в пространстве, то только часть потока излучения от одного тела попадает на другое. Доля потока излучения одного тела, попадающая на другое, зависит от формы, размеров тел, их взаимного расположения, расстояния между ними и т. д. Для учета той части потока излучения от поверхности одного тела, которая попадает на поверхность другого тела, используется понятие *коэффициента облученности*. Для ряда конкретных случаев значение коэффициента облученности приводится в справочных пособиях по теплообмену.

## 54. Теплообмен излучением при наличии экранов

Лучистый теплообмен может быть уменьшен за счет применения экранов, которые устанавливаются ортогонально к направлению распространения теплового излучения. В результате переизлучения экранами в направлении, обратном направлению распространения тепла, величина результирующего теплового потока уменьшается.

Эффективность экранов рассмотрим на примере двух параллельных поверхностей 1 и 2, поместив между ними тонкий плоский экран и предположив, что его степень черноты постоянна и равна  $\varepsilon_{\text{экр}}$  (рис. 22).

Основной идеей вывода расчетного соотношения является равенство результирующих потоков по обеим сторонам экрана, так как в противном случае его температура изменялась бы во времени – увеличивалась, если подводится тепла больше, чем отводится, или уменьшалась в противоположной ситуации.

Для каждого из промежутков «поверхность 1 – экран» и «экран – поверхность 2» можно записать:

$$q_{1,\text{экр}} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_{\text{экр}}^4)}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_{\text{экр}} - 1}; \quad q_{\text{экр},2} = \frac{\sigma(T_{\text{экр}}^4 - T_2^4)}{1/\varepsilon_2 + 1/\varepsilon_{\text{экр}} - 1}.$$

Учитывая, что  $q_{1,\text{экр}} = q_{\text{экр},2} = q_{1,2}^{\text{экр}}$ , и исключив неизвестную температуру экрана  $T_{\text{экр}}^4$ , получим для плотности результирующего потока формулу:

$$q_{1,2}^{\text{экр}} = \varepsilon_{\text{пр}}^{\text{экр}} \sigma(T_1^4 - T_2^4),$$

где  $\varepsilon_{\text{пр}}^{\text{экр}} = \frac{1}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1 + (2/\varepsilon_{\text{экр}} - 1)}$  – приведенная степень черноты рассматриваемой системы при наличии экрана.

Расчеты показывают, что если между телами разместить  $n$  одинаковых экранов, то

$$\varepsilon_{\text{пр}}^{\text{экр}} = \frac{1}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1 + (2/\varepsilon_{\text{экр}} - 1) \cdot n}.$$

Сравним плотности результирующих потоков между телами при наличии экранов и без них. Для этого рассмотрим отношение:

$$\frac{q_{1,2}^{\text{экр}}}{q_{1,2}} = \frac{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1 + (2/\varepsilon_{\text{экр}} - 1) \cdot n}.$$

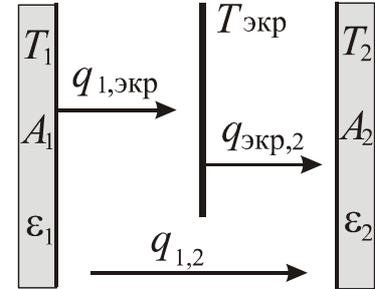


Рис. 22. Теплообмен излучением через экран

Предположим, что стенки и экраны выполнены из одного материала ( $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_{\text{экp}}$ ). Тогда  $\frac{q_{1,2}^{\text{экp}}}{q_{1,2}} = \frac{1}{n+1}$ , т. е. величина лучистого теплового потока уменьшается в  $n+1$  раз.

Например, для  $n=2$  получим снижения теплового потока в три раза. Если  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,8$ ;  $\varepsilon_{\text{экp}} = 0,1$ , то для этого же случая  $\frac{q_{1,2}^{\text{экp}}}{q_{1,2}} = \frac{1}{26,3}$ , т. е. тепловой поток снижается уже в 26,3 раз.

Из этих примеров видно, что экраны целесообразно делать многослойными и из материалов, имеющих малую степень черноты и соответственно высокую отражательную способность (полированные тонкие листы алюминия, вольфрама и др.).

## 55. Оптическая пирометрия

Основываясь на законах теплового излучения, можно определять температуру раскаленных тел. Если излучающее тело является черным (или достаточно к нему приближается), то для определения его температуры можно воспользоваться законами черного излучения. По существу для сильно нагретых (или удаленных) тел этот метод является единственным.

Прибор для измерения температуры тел по их тепловому излучению называется *пирометром*.

Пирометры измеряют не истинные температуры, а, в зависимости от способа, эквивалентные им: радиационную, яркостную и цветовую.

1. *Радиационная температура* – температура черного тела  $T_p$ , при которой его интегральная излучательная способность равна интегральной излучательной способности рассматриваемого тела. Используя закон Стефана-Больцмана, получим:

$$T_p = \sqrt[4]{E/\sigma}.$$

Радиационная температура  $T_p$  всегда меньше его истинной температуры  $T$ . Действительно, для серого тела  $E = \varepsilon\sigma T^4$ . Так как у серого тела  $\varepsilon < 1$ , то  $T_p = \sqrt[4]{\varepsilon} \cdot T < T$ .

2. *Яркостная температура* – температура черного тела  $T_y$ , при которой для выделенной длины волны его спектральная излучательная способность равна спектральной излучательной способности рассматриваемого тела, т. е.  $J_{\lambda, T_y}^{\text{ачт}} = J_{\lambda, T}$ , где  $T$  – истинная температура тела. По закону Кирхгофа

$$\frac{J_{\lambda, T_y}^{\text{ачт}}}{A_{\lambda, T_y}} = \frac{J_{\lambda, T}^{\text{ачт}}}{A_{\lambda, T}}.$$

Так как  $A_{\lambda, T} < 1$ , то истинная температура тела всегда выше яркостной

$$T_{\text{я}} < T .$$

В качестве яркостного пирометра обычно используется пирометр с исчезающей нитью. Накал нити подбирается таким, чтобы изображение нити пирометра стало неразличимым на фоне раскаленного тела, т. е. нить как бы «исчезает». Используя проградуированный по черному телу миллиамперметр, можно определить яркостную температуру. Зная поглощательную способность  $A_{\lambda, T}$  тела при той же длине волны, по яркостной температуре можно определить истинную.

3. *Цветовая температура* – температура черного тела  $T_{\text{ц}}$ , определяемая по длине волны излучения, на которую приходится максимум спектральной излучательной способности тела. Согласно закону смещения Вина

$$T_{\text{ц}} = b_1 / \lambda_{\text{max}} .$$

Для серых тел цветовая температура совпадает с истинной температурой. Например, для Солнца (с учетом поправок на поглощение в земной атмосфере) найдено, что  $\lambda_{\text{max}} = 470$  нм. Этому значению соответствует температура  $T_{\text{ц}} = 6150$  К . Для тел сильно отличающихся от серых тел, например, обладающих селективным поглощением, понятие цветовой температуры теряет смысл.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

### *Основная литература*

*Кудинов В. А., Карташов Э. М., Стефанюк Е. В.* Техническая термодинамика и теплопередача. Учебник для бакалавров М.: Издательство Юрайт, 2013. - 566 с. Базовый курс.

*Дульнев Г. Н., Тихонов С. В.* Основы теории тепломассообмена. Учебное пособие – СПб: СПбГУИТМО, 2010. - 93 с.

*Кошмаров Ю. А.* Теплотехника: - М.: Академкнига, 2006.- 501 с.

### *Дополнительная литература*

Задачник по термодинамике и теплопередаче. Под ред. Ю. А. Кошмарова. Части 1 - 3. - М.: Академия ГПС МВД РФ, 2005г.

Теплотехнический справочник. Под ред. В. Н. Юренева и П. Д. Лебедева. Том 2. - М.: «Энергия», 1976 г. 898 с.

*Мухачев Г. А., Щукин В. К.* Термодинамика и теплопередача. Учебник для авиац. вузов М.: Высшая шк. 1991. - 480 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

### ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ ТЕРМОДИНАМИКИ

1. Термодинамическая система	3
2. Термодинамические параметры состояния	4
3. Термическое уравнение состояния реальных газов	5
4. $P$ - $v$ диаграмма воды	8
5. Смеси идеальных газов. Закон Дальтона. Закон Амага	9
6. Уравнение состояния смеси идеальных газов	11
7. Энергия, работа, теплота	12
8. Внутренняя энергия, ее свойства	14
9. Первое начало термодинамики	16
10. Энтальпия и ее свойства	17
11. Теплоемкость газов, жидкостей и твердых тел	18
12. Обратимые и необратимые процессы	21
13. Второй закон термодинамики	22
14. Политропический процесс	23
15. Анализ изопроцессов с идеальным газом	24
16. Тепловой двигатель. Цикл Карно. КПД цикла	26
17. Двигатель внутреннего сгорания. Цикл Отто	27
18. Цикл с изобарным подводом тепла (Цикл Дизеля)	29

### ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТЕПЛООБМЕНА

19. Основные понятия теории теплообмена	30
20. Температурное поле. Температурный градиент. Плотность теплового потока	31
21. Основные законы теплопроводности и конвективного теплообмена	33
22. Коэффициент теплопроводности	35
23. Дифференциальное уравнение теплопроводности	37
24. Краевые условия задач теплопроводности	39

### СТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

25. Теплопроводность через плоскую стенку	40
26. Теплопроводность через многослойную плоскую стенку	42
27. Теплопередача через плоскую стенку	44
28. Температурное поле в плоской стенке при наличии тепловыделений	45
29. Теплопроводность в цилиндрической стенке	47
30. Теплопередача через цилиндрическую стенку	50
31. Критический диаметр изоляции	52
32. Теплопроводность цилиндра при наличии внутренних тепловыделений	54

### КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН

33. Основные понятия и определения конвективного теплообмена	55
34. Факторы, влияющие на интенсивность конвекции	56
35. Дифференциальные уравнения конвективного теплообмена	58

<b>ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ</b>	
36. Основные понятия теория подобия	61
37. Теоремы подобия	63
38. Определяющий размер и определяющая температура	65
39. Получение уравнений подобия на основе анализа размерностей	66
40. Получение эмпирических критериальных уравнений	68
41. Критериальные уравнения теплоотдачи при свободной конвекции	69
42. Критериальные уравнения теплоотдачи при движении теплоносителя в трубах	71
<b>НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЕ</b>	
43. Математическая формулировка задачи и приведение её к безразмерному виду	72
44. Аналитическое решение задачи методом разделения переменных	74
45. Зависимость решения от числа Био	77
46. Регулярный тепловой режим	78
47. Теоремы Кондратьева	79
<b>ОСНОВЫ ТЕПЛООБМЕНА ИЗЛУЧЕНИЕМ</b>	
48. Основные понятия и определения	80
49. Отражение и поглощение энергии излучения	81
50. Характеристики теплового излучения	83
51. Законы теплового излучения	85
52. Эффективное и результирующее излучение	88
53. Теплообмен излучением в системе тел с плоскопараллельными поверхностями	89
54. Теплообмен излучением при наличии экранов	91
55. Оптическая пирометрия	92
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ</b>	94